УДК 539.373,539.6,532.613.1

О ВЛИЯНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПОВЕРХНОСТНОЙ УПРУГОСТИ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ ШАРООБРАЗНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НАНОМЕТРОВЫХ РАЗМЕРОВ В УПРУГОЙ МАТРИЦЕ

К.Б. Устинов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

ustinov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Дано обобщение аналитического решения задачи Эшелби о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде, вызванной однородными собственными деформациями внутри включения и заданными напряжениями вдали от него, при учете наряду с поверхностной упругостью поверхностных остаточных напряжений. Найдены выражения тензоров концентрации напряжений внутри и вне включения при учете указанных двух типов поверхностных эффектов и внешних напряжений, а также тензоров концентрации деформаций (внутреннего и внешнего тензоров Эшелби). Выявлен характер неоднородности полей деформаций и зависимости от диаметра включения (масштабный эффект), проявляющихся на нанометровых масштабах. Показано, что при определенных условиях (для ряда кубических кристаллов) влияние остаточных напряжений превосходит эффект поверхностной упругости.

Ключевые слова: поверхностные напряжения, задача Эшелби, тензор концентрации напряжений, тензор Эшелби.

Введение

Одним из эффективных способов описания масштабных эффектов на микро- и наноуровне, проявляющихся, в частности, в зависимости упругих модулей и прочностных параметров от размера рассматриваемого тела [1] и не описываемых в рамках классической теории деформирования твердого тела, является использование теории поверхностной упругости [2–5]. Роль особенностей поверхностной упругости наночастиц может быть оценена на примере известной задачи Эшелби [6] – определения напряженно-деформированного состояния упругой безграничной среды с включением из другого материала, подверженного однородной собственной деформации. Решение задачи Эшелби для шарообразного включения с учетом дополнительных поверхностных деформаций, описываемых двумерным законом Гука с обобщенными поверхностными модулями упругости, было подробно разобрано в [3, 4]. Однако в этих работах не принимался во внимание такой важный фактор, как поверхностные остаточные напряжения. Решение аналогичной задачи с учетом данного фактора дано в [5].

Постановка задачи

Рассматривается линейно-упругая изотропная среда, занимающая бесконечную область с шаровым включением из другого материала (также изотропного, линейно-упругого) с возможными однородными собственными деформациями. Предполагается (в силу линейности, симметрии формы и однородности собственных деформаций), что тензор полных малых деформаций внутри включения может быть представлен в виде суммы упругой и неупругой составляющих. Предположение об однородности достаточно для существования разложения не только деформаций, но и смещений на упругую и неупругую составляющие.

Кинематика поверхности. Рассматриваются двусторонне когерентные границы раздела, т.е. предполагается, что полные смещения поверхности совпадают с полными смещениями обеих прилегающих объемных областей (включения и окружающей матрицы). Тензор полных поверхностных деформаций есть проекция тензора полных объемных деформаций на плоскость, касательную к границе раздела, он предполагается представимым в виде суммы упругой и неупругой составляющих.

Статика поверхности. Предполагается, что равновесное состояние поверхности полностью описывается обобщенным законом Лапласа–Юнга [2], связывающим компоненты поверхностных напряжений и скачок объемных напряжений при переходе через поверхность раздела фаз.

Определяющие соотношения на поверхности принимаются в виде пропорциональности поверхностных напряжений и упругих поверхностных деформаций. Определяющие уравнения с учетом начальных деформаций (напряжений) являются более общими, чем использованные в [3, 4].

Метод решения

Задача решается разложением полей смещения, деформации и напряжения в сферических координатах внутри и вне включения (автоматически удовлетворяющим всем уравнениям линейной теории упругости) по полиномам Лежандра и приравниванием соответствующих коэффициентов в точках сферической границы для удовлетворения кинематическим и статическим граничным условиям, записанным с учетом определяющих соотношений на границе. В силу симметрии задачи и однородности поля собственных деформаций и поля напряжения на бесконечности оказалось достаточным ограничиться рассмотрением полиномов до второй степени включительно.

Основные результаты

Найдены распределения полей напряжений и деформаций в безграничной линейно-упругой среде с шаровым включением при наличии собственных деформаций внутри него и с заданными напряжениями вдали от него при учете поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости. Отличительными чертами найденных решений являются отсутствие однородности полей деформаций и напряжений и масштабный эффект (зависимость вида решения от диаметра включения).

Настоящее исследование – результат совместной работы с сотрудниками ИПМех РАН Р.В. Гольдштейном и В.А. Городцовым.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН №22.

Список литературы

1. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. // Докл. РАН. 2001. Т. 381. №3. С. 825–827.
2. Gurtin M.E., Murdoch A.I. // Arch. Ration. Mech. Anal. 1975. V. 57, No 4. P. 291–323; 1975. V. 59. P. 389–390.
3. Duan H.L., Wang J., Huang Z.P., Karihaloo B.L. // Proc. Roy. Soc. L. A. 2005. V. 461, No 2062. P. 3335–3353.
4. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. // Advances in Appl. Mech. 2008. V. 42. P. 1–68.
5. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. // Физическая мезомеханика. 2010. Т. 13, №5. С. 127–138.
6. Eshelby J.D. // Proc. Roy. Soc. L. A. 1957. V. 241, No 1226. P. 376–396.

ON EFFECTS OF RESIDUAL SURFACE STRESS AND SURFACE ELASTICITY ON THE DEFORMATION OF SPHERICAL INCLUSIONS OF A NANOMETER SCALE IN AN ELASTIC MATRIX

K.B. Ustinov

An analytical solution of Eshelby problem, describing the deformation of en elastic medium containing an inclusion having different elastic constants due to uniform remote stress field, uniform eigenstrains within the inclusion and uniform surface eigenstrains, was obtained for a spherical inclusion. It was shown that, while considering inhomogeneous media with eigenstrains, the assumption that the interfaces possesses some specific properties leads to the necessity to account both for effect of residual surface stress (or surface eigenstrain) and surface elasticity simultaneously. The problem of determining the stressed-strained state for a described configuration was formulated and solved in terms of small deformations. Expressions are derived for both internal and external Eshelby tensors and for stress concentration tensors with regards to both effects. It is shown that due to the considered surface effects the stresses and strains become inhomogeneous within the inclusion. It is shown that under certain conditions the effect of residual surface stress may surpass that of surface elasticity. In case of a vanishing residual stress, the obtained results reduce to the solution.

Keywords: surface stress, Eshelby problem, stress concentration tensor, Eshelby tensor.