

УДК 531; 629

КВАТЕРНИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В АСТРОДИНАМИКЕ И УПРАВЛЕНИЕ ТРАЕКТОРНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

© 2011 г.

Ю.Н. Челноков^{1,2}

¹Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского
²Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов

ChelnokovYuN@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматриваются проблемы регуляризации в небесной механике и астродинамике. Излагается кватернионный метод регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, предложенный автором. Приводятся основные регулярные кватернионные модели астродинамики. Показывается, что эффективность аналитического исследования и численного решения краевых задач оптимального управления траекторным движением космических аппаратов может быть повышена за счет использования кватернионных моделей астродинамики.

Ключевые слова: астродинамика, регуляризация, задача двух тел, кватернион, управление, траекторное движение.

1. Проблемы регуляризации в небесной механике и астродинамике

В основе небесной механики и астродинамики лежит векторное ньютоновское дифференциальное уравнение возмущенной пространственной задачи двух тел. Это уравнение вырождается при соударении второго (изучаемого) тела с притягивающим телом (при равенстве нулю расстояния r между телами), что делает использование этого уравнения неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности притягивающего тела или движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности.

Проблема устранения указанной особенности, известная в небесной механике и астродинамике как проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной задачи двух тел, восходит к Л. Эйлеру (1765) и Т. Леви-Чивита (1920), давшим решение одномерной и двумерной задачам о соударении двух тел. Наиболее эффективная регуляризация уравнений пространственной задачи двух тел, так называемая спинорная или KS -регуляризация, была предложена П. Кустанхаймо и Е. Штифелем (1964–1965). Она представляет собой обобщение регуляризации Т. Леви-Чивита плоского движения и наиболее полно изложена в широко известной монографии Е. Штифеля и Г. Шейфеле «Линейная и регулярная небесная механика», вышедшей в 1971 г.

В основе регуляризации Кустанхаймо–Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат (так называемое KS -преобразование), обобщающее преобразование Леви-Чивита. Это преобразование состоит в переходе от трехмерного пространства декартовых координат к четырехмерному пространству новых координат. Поэтому, по мнению Е. Штифеля и Г. Шейфеле, прямой вывод регулярных уравнений в трехмерном (пространственном) случае невозможен. В своей книге они постулируют матричное регулярное уравнение пространственной задачи двух тел, записанное ими по аналогии с матричным регулярным уравнением Леви-Чивита, и с помощью нескольких теорем доказывают, что при этом удовлетворяется старое векторное ньютоновское уравнение. Такой подход к построению регулярных уравнений пространственной задачи двух тел является во многом искусственным и мало наглядным.

KS -преобразование основано на четырехмерном параметрическом пространстве. Поэтому вскоре после открытия KS -преобразования было рассмотрено использование кватернионов (четырёхмерных гиперкомплексных чисел) для регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел. Однако в своей книге Е. Штифель и Г. Шейфеле полностью отвергли эту идею, написав, что «Любая попытка заменить теорию KS -матриц более популярной теорией кватернионных матриц приводит поэтому к неудаче или, во всяком случае, к очень громоздкому формализму». Это ут-

верждение было опровергнуто автором доклада, показавшим в конце 1970-х и начале 1980-х годов, что в действительности кватернионный подход к регуляризации упрощает вывод регулярных уравнений и связанные с ним доказательства, делает более естественными и наглядными основные положения, лежащие в основе KS -регуляризации, позволяет построить теорию, обобщающую KS -регуляризацию. Так, на основе кватернионного подхода автором доклада в 1981, 1984 гг. были даны наглядные геометрические и кинематические интерпретации регуляризующего преобразования Кустаанхеймо – Штифеля; устранены математические трудности, существующие в теории KS -регуляризации из-за неоднозначного перехода от декартовых координат к регулярным KS -переменным; получены более общие кватернионные регулярные уравнения задачи двух тел, из которых регулярные уравнения Кустаанхеймо – Штифеля следуют как частные; были даны эффективные приложения кватернионных регулярных уравнений к решению задач оптимального управления траекторным движением космического аппарата (совместно с Я.Г. Сапунковым (1996) и В.А. Юрко (1996)). Позже независимо была продемонстрирована применимость кватернионов к регуляризации уравнений небесной механики Виварелли (Vivarelli, 1983), Врбик (Vrbik, 1994, 1995), даны их приложения к орбитальной динамике Аррибас и др. (Arribas et al., 2006). В настоящее время считается доказанным, что «кватернионы являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике» (слова известного ученого Йорга Вальдфогеля). В последнее время Вальдфогелем (Waldvogel, 2006, 2008) был предложен свой кватернионный способ регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел. Этот способ регуляризации, хотя и представляет несомненный методический интерес, не имеет преимуществ перед кватернионным методом регуляризации, предложенным значительно ранее автором доклада, уступает ему по геометрической и кинематической наглядности, а также возможностям его дальнейшего обобщения на задачу регуляризации уравнений возмущенного центрального движения материальной точки (Челноков, 1985, 1992, 1993).

Излагается предложенный автором кватернионный метод регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел. Даются наглядные геометрические и кинематические интерпретации регуляризующим преобразованиям, приводятся кватернионные регулярные модели астеродинамики в переменных Кустаанхеймо – Штифеля, в па-

раметрах Эйлера, в кватернионных оскулирующих элементах. Рассматривается использование кватернионов для регуляризации дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел.

Другие особенности типа сингулярности (деления на ноль) имеют классические модели небесной механики и астеродинамики, записанные во вращающихся системах координат и использующие углы Эйлера (угловые оскулирующие элементы) для описания углового движения этих систем координат, а также модели, описывающие в угловых переменных мгновенную ориентацию орбиты (плоскости орбиты) небесного тела или космического аппарата (КА). Устранение такого рода особенностей достигается в небесной механике и астеродинамике с помощью использования в качестве кинематических параметров вращательного движения параметров Эйлера (Родрига – Гамильтона). Такие регулярные модели в параметрах Эйлера рассматривались, например, А. Deprit (1976), В.А. Брумбергом (1980), В.Н. Брагазиным, В.Н. Бранцем, И.П. Шмыглевским (1986, 1992).

Рассматриваются предложенные автором регулярные в указанном смысле кватернионные модели астеродинамики: уравнения траекторного движения, записанные в орбитальном и негोलонном сопровождающих трехгранниках, для описания вращательного движения которых используются кватернионы поворотов; кватернионные дифференциальные уравнения ориентации орбитальной системы координат и мгновенной орбиты КА. Эти уравнения не имеют особенностей, порождаемых использованием углов Эйлера, и удобны для решения задач небесной механики и астеродинамики.

2. Управление траекторным движением

Анализируются основные проблемы, возникающие при решении задач оптимального управления траекторным движением с помощью принципа максимума (в частности, неустойчивость в смысле Ляпунова решений сопряженных уравнений). Показывается, что эффективность аналитического исследования и численного решения краевых задач оптимального управления траекторным движением КА может быть повышена за счет использования кватернионных моделей астеродинамики. Так, их использование позволяет устранить особые точки в дифференциальных уравнениях движения и в их частных аналитических решениях, существенно уменьшить размерности систем дифференциальных уравнений краевых задач оптимизации с одновременным их упроще-

нием за счет использования кватернионных первых интегралов, построить общие решения дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных на участках пассивного движения КА в наиболее простой и удобной форме, что важно для решения задач оптимальных импульсных перелетов КА; расширить возможности аналитического исследования дифференциальных уравнений краевых задач с целью выявления основных закономерностей оптимального движения КА, улучшить вычислительную устойчивость решения краевых задач за счет появления в составе дифференциальных уравнений краевых задач кватернионных уравнений, имеющих неасимптотически устойчивые решения, уменьшить необходимый объем вычислений.

Эти достоинства кватернионных моделей демонстрируются на конкретных примерах аналитического исследования и численного решения задач об оптимальной встрече управляемого КА с неуправляемым аппаратом (в том числе, в задаче о мягкой встрече управляемого космического аппарата с двигателями большой и малой тяги, находящегося в начальный момент времени на орбите Земли, с аппаратом, который движется по орбите Марса), а также задач об оптимальной переориентации орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты (численные решения построены совместно с Я.Г. Сапунковым, Л.А. Челноковой, И.А. Панкратовым).

Работа поддержана РФФИ (проект 08-01-00310).

QUATERNION REGULARIZATION IN ASTRODYNAMICS AND CONTROL OF TRAJECTORY MOTION

Yu.N. Chelnokov

Problems of regularization in the celestial mechanics and astrodynamics are considered. A quaternion method of regularization of the equations of a perturbed spatial problem of two bodies is introduced. The basic regular quaternion models of astrodynamics are given. It is shown that the efficiency of analytical and numerical analyses of boundary value problems of optimal control of the trajectory motion of spacecraft can be improved by using quaternion models of astrodynamics.

Keywords: astrodynamics, regularization, problem of two bodies, quaternion, control, trajectory motion.