Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2586–2587

УДК 533

О МОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ПЛАНЕТЫ

А.А. Черевко[1,2]

[1]Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
[2]Новосибирский госуниверситет

cherevko@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Предложена модель газовой планеты как вращающегося газового шара в поле силы тяжести. Верхняя граница атмосферы определяется из условия монотонного убывания плотности в состоянии твердотельного вращения. Для полученной системы уравнений дано аналитическое описание характеристик и условий на них. Исследуется распространение звуковых возмущений в атмосфере планеты на состоянии равновесия.

Ключевые слова: газовая планета, вращающийся газовый шар в поле силы тяжести, состояние равновесия, звуковые возмущения в атмосфере газовой планеты.

1. Модель газовой планеты

Моделирование газовых планет [1, 2], таких как Сатурн, Юпитер и многие экзопланеты, является интересной и нетривиальной задачей газовой динамики. Газовый шар находится под действием двух физических факторов – вращения и притяжения. Математическая модель представляет собой систему гиперболических уравнений со многими переменными. Атмосфера классических планет образует тонкий газовый слой на их поверхности. В случае газовой планеты малым можно считать центральное ядро, находящееся в жидком или твердом состоянии, размеры которого малы по сравнению с протяженной газовой атмосферой.

Рассмотрим газовый шар, вращающийся с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_0$ в поле силы тяжести с постоянным ускорением $\mathbf{g}$, направленным к центру. Для определенности положим газ политропным и изоэнтропическим, $l = c^2$, где c – скорость звука. Уравнения, описывающие такую модель, имеют вид

$$D\mathbf{u} + 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{u} + \mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}) + \alpha_0 \nabla l = \mathbf{g}, \qquad (1)$$
$$Dl + \alpha_0^{-1} l \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,$$

где D – полная производная, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, $\alpha_0 = (\gamma - 1)^{-1}$, γ – показатель адиабаты, $\mathbf{u}$ – вектор скорости во вращающейся вместе с газовым шаром системе координат.

Уравнения (1) должны быть дополнены условием убывания плотности и скорости звука с высотой: $l_r < 0$, что дает некоторое условие «конечности» атмосферы (оно будет сформулировано в п. 2). Для системы (1) выписаны законы сохранения и условия на характеристиках.

2. Состояние равновесия

Система уравнений (1) имеет в качестве простейшего решения состояние равновесия

$$\mathbf{u} = 0, \quad l = b_0(r^2 \sin^2\theta - 2a_0 r + k_0), \qquad (2)$$

где $r = |\mathbf{r}|$, $0 \le \theta \le \pi$ – широта; a_0, b_0, k_0 – постоянные, связанные с характерными безразмерными параметрами задачи (числами Маха, Россби и Фруда). Решение (2) определяет состояние равновесия газового шара, в котором он вращается как твердое тело, а поверхности постоянной плотности имеют вид $l(r, \theta) = l_0$. Отметим, что безразмерные параметры меняются в широком диапазоне для различных газовых планет.

По состоянию равновесия (2) из условия убывания плотности с высотой $l_r < 0$, определяется верхняя граница атмосферы Г. На рис. 1 изображено меридиональное сечение некоторых поверхностей уровня $l = l_0$. В качестве границы Г принимается замкнутая поверхность уровня, внутри которой $l_r < 0$ (граница Г – выделенная линия на рис. 1). Вне поверхности Г величина l возрастает с ростом радиуса по некоторым направлениям. Таким образом, физически содержательное решение (2) определено только в области ограниченной Г.

Заметим, что параметры b_0 и k_0 влияют только на значение l на границе Г, но не оказывают влияния на геометрию самой поверхности Г.

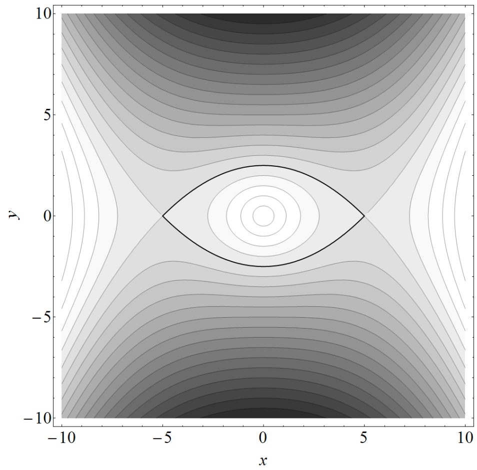

Рис. 1

3. Звуковые возмущения на состоянии равновесия

Звуковые характеристики $\chi(t, r, \theta, \varphi)$ $(0 \le \varphi \le \le 2\varphi$ – долгота) системы (1) на решении (2) определяются уравнением

$$\chi_t = \varepsilon\sqrt{l}\,|\nabla\chi|, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{3}$$

Характеристики уравнения (3), т.е. бихарактеристики (2), задаются решениями гамильтоновой системы

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}} \tag{4}$$

с гамильтонианом

$$H = \sqrt{l}(\chi_r + r^{-2}\chi_\theta^2 + (r\sin\theta)^{-2}\chi_\varphi^2)^{1/2}$$

и векторами $\mathbf{R} = (r, \theta, \varphi)$, $\mathbf{P} = (\chi_r, \chi_\theta, \chi_\varphi)$. Система (4) имеет один очевидный интеграл $\chi_\varphi = \mathrm{const}$ и достаточно сложна для аналитического исследования. Ее решения определяют характеристический коноид, описывающий распространение звуковых возмущений в атмосфере газовой планеты.

Система (4) интегрируется численно, исследуется поведение характеристических коноидов в зависимости от положения источника возмущения и параметров атмосферы.

Работа выполнена совместно с А.П. Чупахиным, поддержана грантами НШ-4368.2010.1, Министерства образования РФ 2.1.1/3543, программой ОМ 14.1, Интеграционным проектом СО РАН №65.

Список литературы

1. Хаббард У. Внутреннее строение планет. М.: Мир, 1987.
2. Wetherill G.W. // Annu. Rev. Eath. Planet. Sci. 1990. V. 18. P. 205.

ON THE MODEL OF A GAS PLANET

A.A. Cherevko

A model of a gas planet as a rotating gas ball in the gravitational field is suggested. The upper bound of the atmosphere is derived from the condition of monotonic decrease of density in the equilibrium state. The sound characteristics of the model are analytically investigated, and the propagation of sound wave in the rotating atmosphere is described.

Keywords: gas planet, rotating gas ball in a gravitational field, equilibrium state, sound perturbation in the atmosphere of a gas planet.