Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2612–2614

УДК 539.3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНАХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ С КРАЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Ю.В. Шевцова, Я.А. Парфенова

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

yv-shevtsova@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматриваются геометрические вопросы, возникающие при решении задач о распространении волн в пластинах и круговых цилиндрических оболочках, край которых имеет произвольную форму. Приводится методика выбора и построения системы координат на срединной плоскости пластины, позволяющая учитывать форму края пластины: в качестве координат здесь выбираются длина дуги нормали и параметр линии края. Для случая круговой цилиндрической оболочки с торцом произвольной формы на срединной поверхности строится полугеодезическая система координат. Для нахождения решения уравнения краевого эффекта применяется преобразование Лапласа и метод экспоненциальных представлений в пространстве изображений.

Ключевые слова: распространение нестационарных волн, оболочка, пластина, нормаль, полугеодезические координаты, динамический краевой эффект, преобразование Лапласа.

Постановка задачи

Рассмотрим упругую тонкую пластину или замкнутую круговую цилиндрическую оболочку толщиной $2h$, к торцу которой приложена ударная нагрузка. Положение точек пластины или оболочки в пространстве зададим векторным равенством $\overline{P} = \overline{M}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \overline{n}$, где $\overline{M}(\alpha_1, \alpha_2)$ – радиус-вектор срединной поверхности, $\overline{n}$ – единичный вектор нормали, α_3 – расстояние, отсчитываемое по нормали от срединной поверхности. При изучении волнового процесса в пластинах или оболочках с краем произвольной формы одной из важных геометрических проблем является выбор системы координат на срединной поверхности. При таком выборе определяющую роль играют следующие факты:

1) система координат должна быть введена таким образом, чтобы учитывалась форма торцевого края срединной плоскости пластины или срединной поверхности оболочки;

2) распространение волн происходит вдоль геодезических линий как наикратчайших линий на поверхности в направлении, ортогональном краю;

3) построенная система координат должна быть ортогональной.

Приведем методику построения систем координат, обладающих перечисленными свойствами.

Построение ортогональной системы координат на срединной плоскости пластины

Пусть в срединной плоскости пластины введена декартова система координат Oxy. Пусть параметрические уравнения края срединной плоскости имеют вид: $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$. Зафиксируем значение параметра $\alpha = \alpha_2$ и проведем через точку кривой, соответствующей этому параметру, нормаль к кривой. Отложим от данной точки на нормали отрезок длины α_1. В результате придем в некоторую точку плоскости, декартовы координаты которой представлены в виде функций параметров (α_1, α_2):

$$x = \pm \frac{\psi'(\alpha_2)}{\sqrt{\varphi'^2(\alpha_2) + \psi'^2(\alpha_2)}} \alpha_1 + \varphi(\alpha_2),$$

$$y = \mp \frac{\varphi'(\alpha_2)}{\sqrt{\varphi'^2(\alpha_2) + \psi'^2(\alpha_2)}} \alpha_1 + \psi(\alpha_2).$$

Таким образом, параметры (α_1, α_2) можно принять за координаты точек срединной плоскости.

Построение полугеодезической системы координат на срединной поверхности оболочки

Изложенная в предыдущем разделе методика обобщается на случай круговой цилиндрической оболочки с торцом произвольной формы. Роль нормалей на срединной плоскости в данной ситуации будут играть геодезические линии срединной поверхности. Построенная система координат называется полугеодезической [2].

Пусть в трехмерной декартовой системе координат $Oxyz$ векторное уравнение срединной поверхности оболочки имеет вид

$$\bar{r}(\alpha,\beta) = \varphi(\alpha)\bar{i} + \psi(\alpha)\bar{j} + \beta\bar{k},$$

где

$$\varphi(\alpha) = R\cos\alpha/R, \quad \psi(\alpha) = R\sin\alpha/R.$$

Пусть в криволинейных координатах (α, β) уравнение края срединной поверхности (базы полугеодезической системы координат) записано в векторной форме:

$$\bar{r}_1(\alpha) = \varphi(\alpha)\bar{i} + \psi(\alpha)\bar{j} + \chi(\alpha)\bar{k}.$$

Векторное уравнение двухпараметрического семейства геодезических линий для цилиндрической поверхности имеет вид:

$$\bar{r}_2(\alpha) = \varphi(\alpha)\bar{i} + \psi(\alpha)\bar{j} + (d_1\alpha + d_2)\bar{k}.$$

Зафиксируем значение параметра $\alpha = \alpha_2$. При каждом таком значении параметра запишем уравнение геодезической линии в ортогональном направлении, т.е. определим параметры d_1, d_2. Они находятся из следующих двух условий: 1) геодезическая пересекает линию края, 2) касательные векторы этих кривых в точке пересечения ортогональны. Подставим найденные значения параметров d_1, d_2 в уравнение геодезической линии и отложим на построенной геодезической дугу длины α_1. Выражая параметры α, β через параметры α_1, α_2, получим векторное уравнение поверхности в полугеодезических координатах:

$$\bar{r}(\alpha_1,\alpha_2) = \varphi\left(\pm\frac{\chi'(\alpha_2)\alpha_1}{\sqrt{1+\chi'^2(\alpha_2)}} + \alpha_2\right)\bar{i} +$$

$$+\psi\left(\pm\frac{\chi'(\alpha_2)\alpha_1}{\sqrt{1+\chi'^2(\alpha_2)}} + \alpha_2\right)\bar{j} +$$

$$+\left(\mp\frac{\chi'(\alpha_2)\alpha_1}{\sqrt{1+\chi'^2(\alpha_2)}} + \chi(\alpha_2)\right)\bar{k}.$$

Динамический простой краевой эффект

Рассмотрим ударное воздействие на торец цилиндрической оболочки, для которого граничные условия на краю $\alpha_1 = 0$ в терминах трехмерной теории упругости записываются в виде

$$\sigma_{11}(0, \alpha_2, \alpha_3, t) = p_f(\alpha_2, \alpha_3)H(t),$$

$$\sigma_{12}(0, \alpha_2, \alpha_3, t) = \sigma_{13}(0, \alpha_2, \alpha_3, t) = 0.$$

Здесь t – время, $H(t)$ – функция Хевисайда, σ_{ik} – напряжения, $p_f(\alpha_2, \alpha_3)$ – амплитуда ударной нагрузки, являющаяся нечетной функцией α_3.

Рассмотрим случай нулевых начальных условий. Для описания движения оболочки применим теорию Кирхгофа–Лява. Воспользуемся уравнениями динамического простого краевого эффекта. Разрешающее уравнение в безразмерных переменных $x_1 = \alpha_1/R, t = Rc_2^{-1}t_1$ имеет вид [3]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2Rk_2\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} +$$

$$+\frac{3}{2}(1-\nu)\eta^{-4q}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2(1+\nu)\eta^{2a}r_{22}^{-2}w\right] = 0,$$

где w – прогиб, $\eta = h/R$ – основной малый параметр, k_2 – геодезическая кривизна α_2-линии, $R_{22} = r_{22}R$ – радиус кривизны, ν – коэффициент Пуассона, c_2 – скорость волны сдвига. Для нахождения решения уравнения динамического простого эффекта применяется преобразование Лапласа и метод экспоненциальных представлений в пространстве изображений. Нахождение оригинала осуществляется методом разложения по отрицательным степеням корня из параметра преобразования Лапласа [4]. Асимптотическое представление для изгибающего момента G_1 аналогично выражению, приведенному в [1] для скошенной круговой цилиндрической оболочки. Геометрическими параметрами в нем являются коэффициент A_2 первой квадратичной формы и безразмерный радиус кривизны r_{22}, нахождение которых для каждого типа геометрии края может быть произведено с учетом введенной полугеодезической параметризации срединной поверхности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-01-00545).

Список литературы

1. Шевцова Ю.В. Динамический простой краевой эффект в скошенной круговой цилиндрической оболочке // Механика деформируемых сред. Саратов. 1997. Вып. 13. С. 83–87.

2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.

3. Каплунов Ю.Д. Распространение нестационарных упругих волн в оболочке общего очертания // Изв. РАН. МТТ. 1992. №6. С. 156–167.

4. Kossovich L.Yu., Parfenova Ya.A. Flexural transient waves in shells of revolution: An asymptotic approach // J.Appl.Math.Phys.(ZAMP). 2000. V. 51. P. 611–628.

GEOMETRIC ASPECTS OF THE PROBLEM OF THE PROPAGATION OF NONSTATIONARY WAVES IN PLATES AND CYLINDRICAL SHELLS WITH EDGE OF AN ARBITRARY SHAPE

Yu.V. Shevtsova, Ya.A. Parfenova

We consider geometric problems concerning the wave propagation in plates and circular cylindrical shells with edge of an arbitrary shape. We give a method for the choice and the construction of a coordinate system on the middle plane of the plate which allows to take into account the shape of the plate edge: in this case the length of the arc of the normal and the parameter of the edge line are chosen as coordinates. In case of a circular cylindrical shells with the edge of an arbitrary shape a semi-geodesic coordinate system can be constructed on the middle surface. In order to find the solution of the edge effect equation we apply the Laplace transform and the method of exponential representations in the space of transforms.

Keywords: nonstationary waves propagation, shell, normal, semigeodesic coordinate, dynamic edge effect, Laplace transform.