УДК 531.01

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ПРИНЦИПА ГАУССА ПРИ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ КОНСОЛИ

***М.П. Юшков*[1], *С.А. Зегжда*[1], *Ш.Х. Солтаханов*[2], *Д.Т. Спасич*[3]**

[1]Санкт-Петербургский госуниверситет
[2]Чеченский госуниверситет, г. Грозный
[3]Университет в Новом Саде, Новый Сад (Сербия)

yushkovmp@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

В работах Ф.Л. Черноусько и его учеников [1] проблема управления колебаниями механических систем решалась на основе использования принципа максимума Понтрягина. В предлагаемом докладе при управлении колебаниями консоли используется обобщенный принцип Гаусса. Это позволяет связать краевую задачу с задачей неголономной механики о наложении связей высокого порядка. Для нахождения безударной управляющей силы формулируется и решается обобщенная краевая задача. Приводятся результаты расчетов.

Ключевые слова: обобщенный принцип Гаусса, связи высокого порядка, управление колебаниями, обобщенная краевая задача.

Применение уравнений Лагранжа второго рода

Пусть консоль длиной l является однородной и имеет постоянное поперечное сечение. Представим прогиб консоли в виде ряда по ее собственным функциям $y_r(x,t)=\sum_{\sigma=1}^{\infty}q_\sigma(t)X_\sigma(x)$, $0\le x\le l$. Пусть функцией $\xi(t)$ задается перемещение основания консоли по направлению, перпендикулярному оси стержня. Тогда абсолютное перемещение сечения x консоли представится в виде $y_a(x,t)=\xi(t)+y_r(x,t)$. Вычислив кинетическую энергию системы и подставив ее в уравнения Лагранжа, придем к уравнениям

$$\ddot{q}_\sigma+\omega_\sigma^2 q_\sigma=-\frac{a_\sigma}{A_\sigma^2}\ddot{\xi},\quad a_\sigma=\frac{1}{l}\int_0^l X_\sigma(x)dx,$$

$$A_\sigma^2=\frac{1}{l}\int_0^l X_\sigma^2(x)dx,\quad \sigma=\overline{1,\infty},$$

где ω_σ – собственные частоты консоли. Переходя к безразмерным переменным $x_0=\xi/l$, $s_\sigma=-(A_\sigma^2 q_\sigma)/(a_\sigma l)$, $\sigma=\overline{1,\infty}$, $\tau=\omega_1 t$, и обозначая для простоты также точкой производную по безразмерному времени, получим

$$\ddot{x}_0=u,\quad \ddot{x}_\sigma+\overline{\omega}_\sigma^2 x_\sigma=u,$$
$$\overline{\omega}_\sigma^2=\omega_\sigma/\omega_1,\quad \sigma=\overline{1,s}. \tag{1}$$

Здесь u – искомое безразмерное ускорение основания консоли, s – число учитываемых собственных форм колебаний.

Как показал Рэлей, при соударении шаров упругие колебания в них почти не возбуждаются по той причине, что и само ускорение центра масс каждого из шаров, и производная от него по времени в начале и в конце соударения равны нулю. Учитывая это обстоятельство, сформулируем следующую обобщенную краевую задачу:

$$x_0(0)=\dot{x}_0(0)=\ddot{x}_0(0)=u(0)=\ddot{x}(0)=\dot{u}(0)=0,$$
$$x_0(T)=a, \tag{2}$$
$$\dot{x}_0(T)=\ddot{x}_0(T)=u(T)=\ddot{x}(T)=\dot{u}(T)=0,$$

где T – время перемещения, a – его величина.

Вклад высших форм колебаний консоли в ее полную энергию в момент остановки мал. В работе [2] искомое ускорение, представленное в виде ряда по степеням времени t, предлагается определять, исходя из минимизации полной энергии консоли в момент остановки ее основания. Кривая прогиба, входящая в выражение для этой энергии, определяется по методу интегродифференциальных соотношений. В предлагаемом исследовании энергия вычисляется на основе применения к решению рассматриваемой задачи уравнений Лагранжа второго рода. Скачки ускорения консоли как абсолютно твердого тела в начале и в конце пути устраняются постановкой обобщенной краевой задачи (2). Энергия колебаний рассматривается не только в конце пути, но и в процессе перемещения консоли. Этот расширенный энергетический подход позволяет подойти к данной задаче с новой точки зрения.

Гашение колебаний консоли как краевая задача и как задача минимизации полной энергии

Первоначально задачу о гашении колебаний консоли в момент времени T рассмотрим как краевую задачу, т.е. дополним условия (2) условиями

$$x_\sigma(0) = \dot{x}_\sigma(0) = x_\sigma(T) = \dot{x}_\sigma(T) = 0, \quad \sigma = \overline{1, s}. \qquad (3)$$

Краевая задача (1)–(3) может быть решена при представлении искомой функции $u(t)$ в виде суммы любых линейно независимых функций, число которых равно $2s+6$. В статье [3] установлена связь наложения краевых условий на движение, описываемое уравнениями (1), со смешанной задачей механики [4]. Из этого следует, что если при решении рассматриваемой краевой задачи выбрана система линейно независимых функций, то каждой такой системе функций будет соответствовать наложение связи порядка $2s + 8$. В соответствии с обобщенным принципом Гаусса [5] порядка $2s + 6$ в рассматриваемой задаче наименьшее «принуждение» при связях порядка $2s + 8$ будем иметь в том случае, когда искомая функция $u(\tau)$ удовлетворяет уравнению $\overset{(2s+6)}{u} = 0$. Отсюда при учете условия $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ следует, что ускорение, согласно обобщенному принципу Гаусса, нужно искать в виде

$$u(\tau) = \sum_{k=1}^{2s+4} C_k \tau^{k+1}, \qquad (4)$$

где C_k – искомые постоянные, алгоритм определения которых описан в монографии [4].

Рассмотрим теперь метод минимизации полной энергии. Ограничимся случаем, когда функция $u(\tau)$, отыскиваемая в виде (4) и удовлетворяющая условиям (2), имеет два или четыре свободных параметра. Показывается, что решение по методу минимизации при двух свободных параметрах следует сравнивать с решением, соответствующим гашению одной формы ($s = 1$), а при четырех – гашению двух форм ($s = 2$). Установлено, что решения по этим двум методам в безразмерных переменных зависят только от отношения T/T_1, где T_1 – период первой формы колебаний. Характерным является значение $T/T_1 = 0.8$. Оно может быть выделено как особое в том смысле, что при его уменьшении различие между данными двумя методами гашения колебаний консоли резко возрастает, и, наоборот, при его возрастании быстро убывает. Оказывается, что при $0.8 \le T/T_1 < 1$ целесообразно гашение первых двух форм колебаний, и это эквивалентно минимизации полной энергии по четырем параметрам. Если же $1 \le T/T_1 \le 2$, то достаточным является гашение первой формы, и это эквивалентно минимизации по двум параметрам. При $T/T_1 \ge 2$ вообще нет необходимости гасить колебания.

Работа выполнена при поддержке государственным контрактом ГК.2.740.11.0619 от 29.03.2010.

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Костин Г.В., Саурин В.В. Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегро-дифференциальных соотношений // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 6. С. 750–753.
3. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х. Применение обобщенного принципа Гаусса к задаче гашения колебаний механических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 20–25.
4. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука, 2009. 344 с.
5. Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // ДАН СССР. 1983. Т. 269, № 6. С. 1328–1330.

APPLICATION OF THE GENERALIZED GAUSS PRINCIPLE IN CONTROLLING THE VIBRATION OF A CANTILEVER

M.P. Yushkov, S.A. Zegzhda, Sh.Kh. Soltakhanov, D.T. Spasić

In works by F.L. Chernous'ko and his disciples the control problem of vibrations of mechanical systems was solved on the basis of using the Pontryagin maximum principle. In the present report the generalized Gauss principle is applied to controlling the vibrations of a cantilever. This makes it possible to associate a boundary problem to a non-holonomic mechanics problem of imposing high-order constraints. A generalized boundary-value problem is formulated and solved to find an impact-free controlling force. The calculation results are presented.

Keywords: generalized Gauss principle, high-order constraints, control of vibrations, generalized boundary-value problem.