

УДК 532.516;537.84

## О ЗАТОПЛЕННЫХ МГД СТРУЯХ

© 2011 г.

*Н.И. Яворский<sup>1,2</sup>, Р.И. Мулладжанов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский госуниверситет

nick@itp.nsc.ru

*Поступила в редакцию 24.08.2011*

Исследуется осесимметричное струйное стационарное течение несжимаемой проводящей жидкости, вызванное источником механического импульса, расположенным на конце полубесконечного прямолинейного проводника электрического тока. Получено точное решение полной нелинейной системы уравнений магнитной гидродинамики для конического класса течений. Показано, что при увеличении электрического тока в проводнике возникает возвратное течение вдоль проводника, затем по достижении некоторого критического значения тока происходит бифуркация закрученного режима течения. В рамках автомодельной постановки задачи это соответствует спонтанному возникновению вращения вязкой проводящей жидкости. Исследуется устойчивость полученных решений. Показано, что вращательный режим течения возникает в результате неустойчивости течения без вращения и является устойчивым в рассматриваемом классе возмущений. Рассматривается неавтомодельная задача о затопленной МГД струе. Показано, что главные члены асимптотического разложения решения на бесконечности определяются точными интегралами сохранения магнитогидродинамической задачи. Особенностью такого разложения является наличие логарифмических членов сферического радиуса, при этом общее асимптотическое разложение ведется по собственным функциям линеаризованной задачи, которое представляет собой разложение по дробным степеням сферического радиуса, показатели которого находятся как собственные значения специальной спектральной задачи и являются функциями режимных параметров струйного течения (чисел Рейнольдса и Бэтчелора).

*Ключевые слова:* магнитная гидродинамика, уравнения Навье–Стокса, струйные течения.

### Автомодельная МГД струя

Течение вызвано точечным источником импульса, расположенным на конце линейного полубесконечного проводника с электрическим током.

Решение ищется в классе конических течений, когда поле скорости и магнитной индукции пропорциональны обратному сферическому радиусу  $R$  от начала координат, которое совпадает с концом проводника. В случае уравнений Навье–Стокса данному классу течений принадлежит хорошо известное автомодельное решение Слезкина–Ландау–Сквайра (СЛС) [1], которое описывает затопленную струю. Для уравнений магнитной гидродинамики также существуют решения из конического класса течений [2]. В настоящей работе исследуются струйные течения, генерируемые не только источником механического импульса, но и пондеромоторной силой магнитного поля. В рамках конического класса течений уравнения магнитной гидродинамики сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений типа Лежандра на функции, зависящие от сферического угла  $\varphi$ .

Задача имеет три безразмерных критерия подобия: число Рейнольдса  $Re$ , безразмерный электрический ток в проводнике  $J$ , число Бэтчелора  $Vt$  (магнитное число Прандтля, представляющее собой отношение кинематической и магнитной вязкости). Было получено решение задачи для различных значений параметров  $Re, J, Vt$ . Задачу усложняет то, что наличие полубесконечного проводника с током вызывает появление особой точки у угловых функций логарифмического характера. Был установлен вид разложения угловых функций в окрестности особой точки. Это позволило построить регулярную процедуру численного интегрирования полученной нелинейной системы дифференциальных уравнений.

При небольших значениях  $J$  решение близко по форме к автомодельному решению Слезкина–Ландау–Сквайра. Однако исследование показало наличие ряда нетривиальных эффектов в рассматриваемой задаче. Во-первых, с увеличением электрического тока  $J$  в проводнике возникает возвратное течение вдоль проводника. Это создает условия для появления положительной обратной связи при возмущении вращательного движения. По достижении некоторого критического

значения тока  $J_{cr}$  от решения без вращения с нулевым полоидальным магнитным полем отвечает решение с ненулевыми компонентами полоидального магнитного поля. Возникновение полоидального магнитного поля рождает пондеромоторную силу, которая приводит к закрутке течения. Таким образом, реализуется бифуркация вращательного режима течения. С другой стороны, усиление возвратного течения вдоль проводника с ростом электрического тока приводит к усилению конвективного переноса зарядов в обратном направлении. В результате плотность электрического тока в самой затопленной струе растет все медленнее и не превышает некоторого значения при любых значениях тока в проводнике. Таким образом, имеет место эффект запирающей плотности электрического тока в фиксированной точке пространства от значения тока в проводнике  $J$ .

Для выяснения физического механизма обнаруженной бифуркации вращения была решена линейная задача устойчивости относительно возмущений, принадлежащих коническому классу. Исследование показало, что при  $J < J_{cr}$  устойчивым является режим без вращения жидкости, а при  $J > J_{cr}$  устойчивым является режим с вращением.

### Неавтономная МГД струя

Неавтономная затопленная МГД струя соответствует постановке задачи, когда решение ищется, например, вне некоторой сферы заданного радиуса, на которой заданы профили скорости и магнитного поля (или плотности электрического тока) такие, что имеется ненулевой поток импульса на этой сфере. В этом случае решение задачи будет иметь не только член, пропорциональный обратному сферическому радиусу  $R$ , но и другие члены, характеризующие ненулевой расход жидкости, поток момента количества движения, источник электрического (магнитного) поля на поверхности сферы.

Следует отметить, что в этом случае магнитное поле не будет иметь члена с  $1/R$ . Решение строится в виде асимптотического разложения в бесконечно удаленной точке по обратным степеням сферического радиуса  $1/R^\alpha$ .

Для нахождения вида асимптотического разложения формулируется спектральная задача для линейризованных на решении СЛС уравнений магнитной гидродинамики, в которой показатели степени сферического радиуса  $\alpha$  являются собственными значениями соответствующей системы однородных уравнений. Собственные решения этой задачи имеют физический смысл магнитно-гидродинамических мультиполей. Оказывается, что показатели степени зависят от чисел  $Re$  и  $Vt$ . Это означает, что решение является неаналитическим в бесконечно удаленной точке, которая является существенно особой точкой. Необходимо отметить, что вид разложения определяется интегралами сохранения, связанными с основными физическими законами сохранения импульса, массы и момента количества движения. Указанная неаналитичность проявляется уже во втором члене асимптотического разложения. Независимые законы сохранения массы и момента количества движения требуют наличия члена в разложении, обратно пропорционального квадрату сферического радиуса. Таким образом, спектральный параметр, равный 2, является кратным. Для того чтобы задача была разрешима, разложение необходимо пополнить слагаемым, пропорциональным  $R^{-2} \text{Log } R$  [3]. Этот логарифмический член вызовет появление логарифмических слагаемых при больших степенях радиуса. В общем виде асимптотическое разложение записывается в виде бесконечного ряда, каждое слагаемое в котором можно определить по профилям скорости и магнитного поля (плотности электрического тока) на сфере заданного радиуса.

Приводятся сравнения экспериментальных данных для затопленных струй с вышеуказанным асимптотическим решением, которые оказываются хорошо согласованными. Также приводится расчет для модельной задачи о неавтономной МГД струе.

### Список литературы

1. Бэтчелор Дж. К. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
2. Щербинин Е. В. // Магнитная гидродинамика. 1969. №4. С. 46–58.
3. Гольдштик М. А., Яворский Н. И. // Прикладная математика и механика 1986. Т. 50, №4. С. 438–445.

### SUBMERGED MHD JETS

*N.I. Yavorsky, R.I. Mullyadzhyanov*

The work analyzes an axisymmetric steady jet flow of a viscous incompressible conductive fluid induced by a point source of momentum located at the end of the semi-infinite linear conductor of electric current. The exact solutions of the full

system of MHD equations are obtained for conical self-similar flows. It is shown that with the increase of the current value, the reverse flow is observed along the conductor and at a certain value of the current the bifurcation of the poloidal magnetic field occurs and causes the rotation of the fluid. The stability problem of the solutions obtained is studied. It is shown that rotations occurs due to instability of the flow without rotation and is stable in the class of the disturbances discussed. The non-self-similar problem for MHD submerged jet is studied. The main terms of the asymptotic expansion depending on exact conservation integrals have been found. It is shown that the solution of the problem is not analytic in a point in the infinity, and the type of its non-analyticity has been determined. An approach is formulated, using which it is possible to provide a general solution as the infinite series that complies with the given Reynolds and Batchelor numbers and velocity and magnetic field (or electric current density) profiles in the sphere of a given radius.

*Keywords:* magneto-hydrodynamics, Navier – Stokes equations, jet flows.