Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2634–2635

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИДЕНТИФИКАЦИИ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ

О.В. Явруян, И.В. Богачев

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

bogachev89@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Предложен способ идентификации свойств неоднородного упругого изотропного слоя, исходя из анализа установившихся плоских колебаний. С использованием метода линеаризации задача сведена к одномерной коэффициентной обратной задаче о продольных колебаниях консольной балки. Решение одномерной задачи осуществлено с привлечением итерационного процесса, на каждом этапе которого решаются интегральные уравнения Фредгольма первого и второго рода. Рассмотрены модельные примеры восстановления характеристик слоя, обсуждены различные аспекты численной реализации.

Ключевые слова: обратные задачи, идентификация, неоднородные материалы, итерационные процессы, регуляризация.

Задачи идентификации свойств неоднородных материалов актуальны во многих областях науки и техники, в биомеханике, наномеханике, механике функционально-градиентных и новых композиционных материалов.

Для решения любой прикладной задачи предварительно необходимо определить количественные характеристики материала исследуемого образца и очень важно иметь надежные, точные и вместе с тем простые схемы восстановления.

В случае однородных материалов, когда требуется определить лишь конечное число постоянных параметров, вычислительные схемы достаточно просты и сводятся к процедуре минимизации функционалов невязки. Подобные задачи рассмотрены в работах [1–3], где восстанавливаются постоянные или кусочно-постоянные модули материала.

В случае более сложной модели представления свойств, которая учитывает неоднородную структуру материалов, например для непрерывно распределенных неоднородностей, ситуация значительно усложняется и требуется более глубокий анализ проблемы, опирающийся на исследование решений краевых задач с переменными коэффициентами и изучение зависимости следов решений от коэффициентов.

Задачи об определении свойств одномерных объектов (стержней, балок), численное исследование которых реализовано с использованием итерационных процессов, представлены в статьях [4, 5].

В настоящем исследовании предложена схема восстановления свойств изотропного, стратифицированного по толщине слоя на основе данных акустического зондирования, снятых на верхней границе слоя. Предлагаемая схема основана на предварительном сведении к более простой краевой задаче, аналогичной задаче о продольных колебаниях неоднородного стержня, что позволяет применить эффективные алгоритмы, разработанные для неоднородных стержней.

Рассмотрены плоские установившиеся колебания с частотой   упругого изотропного неоднородного по толщине слоя, занимающего область $S=\{x_1, x_2 \in (-\infty,\infty),\ x_3 \in [0,h]\}$, с жестко закрепленной нижней границей S_1. На части S_{20} верхней границы слоя приложена двухкомпонентная нагрузка $pe^{-i\omega t}$, где $p = (p_1, 0, p_3)$. В рамках рассматриваемой постановки после отделения временного множителя краевая задача имеет вид:

$$
\begin{gathered}
(\lambda+2\mu)u_{1,1}+\lambda u_{3,31}+ \\
+(\mu(u_{1,3}+u_{3,1}))_{,3}+\rho\omega^2 u_1=0, \\
((\lambda+2\mu)u_{3,3})_{,3}+(\lambda u_{1,1})_{,3}+ \\
+(\mu(u_{1,3}+u_{3,1}))_{,1}+\rho\omega^2 u_3=0, \\
u_i\,|_{S_1}=0, \quad i=1,3, \\
\lambda u_{1,1}+(\lambda+2\mu)u_{3,3}\,|_{S_2}=\begin{cases} p_3,\ x_1\in S_{20}, \\ 0, \quad x_1\notin S_{20}, \end{cases} \\
\mu(u_{1,3}+u_{1,3})\,|_{S_2}=\begin{cases} p_1,\ x_1\in S_{20}, \\ 0, \quad x_1\notin S_{20}, \end{cases}
\end{gathered}
\qquad (1)
$$

где $\lambda = \lambda(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$ – упругие характеристики неоднородного слоя, которые могут быть произвольными положительными функциями, $\rho(x_3)$ – плотность слоя.

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения.

Восстановление законов изменения функций Ламе по данным акустического зондирования сведено к последовательному решению обратных коэффициентных задач для одномерных областей. Для этого достаточно применить интегральное преобразование Фурье по переменной x_1 к задаче (1), далее, полагая параметр преобразования равным нулю, получить две схожие по структуре задачи, в которых неизвестные функции Ламе разделены. Обе задачи имеют вид:

$$(g(x)u'(x,\kappa))' + \kappa^2\rho(x)u(x,\kappa) = 0, \qquad (2)$$

$$u(0) = 0,\ g(l)u'(l) = 1,$$

при дополнительном условии

$$u(l,\kappa) = f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2],$$

из которого восстанавливается неизвестная функция $g(x)$.

Решение задачи (2) об определении функций $g(x)$, $u(x, \kappa)$ возможно лишь численно с привлечением аппарата численного исследования интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода. Решение системы интегральных уравнений сведено к построению итерационного процесса, на каждом шаге которого происходит уточнение неизвестных функций на основе метода линеаризации [4].

По предложенной схеме был проведен вычислительный эксперимент по восстановлению неизвестных функций $\lambda = \lambda(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$ для слоя толщины $h = 1$. В серии расчетов плотность выбиралась постоянной $\rho = 1$. Начальные приближения неизвестных функций выбирались из условия минимума функционала невязки в классе линейных функций. Были рассмотрены модельные задачи, когда восстанавливаемые функции имели монотонный либо произвольный характер. Выход из цикла во всех экспериментах производился либо по числу итераций (менее 20), либо по норме разности восстанавливаемой функции на соседних итерациях. Во всех случаях точность восстановления составила не более 3-4%, при этом требовалось от 5 до 15 итераций.

На основе результатов вычислительных экспериментов, где наблюдалась уверенная картина восстановления неизвестных законов изменения параметров слоя, можно заключить, что предложенный подход, примененный к одномерным объектам, может быть успешно развит и для областей типа слоя, свойства которого меняются по толщине. Для эффективного использования этого алгоритма достаточно привести исходную краевую задачу к двум краевым задачам относительно усредненных смещений, сведя тем самым задачу восстановления двух функций к последовательному решению более простых коэффициентных обратных задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П596) и частичной поддержке Южного математического института (г. Владикавказ).

Список литературы

1. Martin L., Elliott L., Ingham D.B., Lesnic D. Parameter identification in isotropic linear elasticity using the boundary element method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2004. V. 28. P. 221–233.

2. Zhang H. et al. Identification of elastic-plastic mechanical properties for bimetallic sheets by hybrid-inverse approach // Acta Mechanica Solida Sinica. 2010. V. 23, No 1. P. 29–35.

3. Yoshida F., Urabe M., Hino R., Toropov V.V. Inverse approach to identification of material parameters of cyclic elasto-plasticity for component layers of a bimetallic sheet // International Journal of Plasticity. 2003. V. 19. P. 2149–2170.

4. Бочарова О.В., Ватульян А.О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. 2009. Т. 55, №3. С. 281–288.

5. Ватульян А.О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. 2010. №6. С. 911–918.

ON A METHOD OF THE IDENTIFICATION OF THE PROPERTIES OF AN INHOMOGENEOUS LAYER

O.V. Yavruyan, I.V. Bogachev

The method to identify the properties of an inhomogeneous isotropic elastic layer in the analysis of steady-plane vibrations is proposed. Using the method of linearization, the problem is reduced to a one-dimensional coefficient inverse problem of longitudinal vibrations of a beam. The one-dimensional problem is analyzed using the iterative process, solving Fredholm integral equations of the first and second kinds at every step. Model examples of the recovery of the characteristics of the layer are considered, various aspects of numerical implementation are discussed.

Keywords: inverse problems, identification, inhomogeneous materials, iterative processes, regularization.