Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2636–2637

УДК 519.71

АНАЛИЗ РОБАСТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Г.Н. Яковенко

Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный

yakovenko_g@mtu-net.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Обсуждаются математические модели механических систем в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Модели являются нестационарно робастными: на месте некоторых параметров могут находиться достаточно произвольные функции независимой переменной – времени. Эта неопределенность сближает указанные системы с управляемыми объектами и дает возможность применить разнообразные методы теории управления. В качестве примера рассмотрен линейный осциллятор с возмущением по частоте и с внешним воздействием. Методами теории управления дифференциальная модель осциллятора заменяется конечной. Затронут также вопрос вычисления симметрий математической модели.

Ключевые слова: математическое моделирование, механические системы, нестационарная робастность, управляемый процесс.

1. Введение

При математическом моделировании реальных процессов (технических, биологических, экологических) следует учитывать, что природе свойственно из-за изменения атмосферного давления, температуры, влажности, дуновения ветра вносить в параметры системы непредсказуемые изменения, то есть на месте некоторых параметров в модели могут находиться достаточно произвольные функции времени (нестационарная робастность). Аналогичная ситуация имеет место в управляемых процессах. Аналогия позволяет инструментарий теории управления использовать при исследовании робастных систем.

2. Робастный осциллятор

Осциллятор, подверженный внешнему воздействию $u(t)$, дополнительно испытывает воздействие на частоту

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = u(t). \tag{2.1}$$

Для дальнейшего исследования приведем уравнение (2.1) к нормальному виду:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2(t) + u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ 1 \\ -\omega^2(t) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Следуя теории, развитой в [1], пополним систему (2.2): формально добавим два столбца

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2(t) + u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \\ 1 \\ -\omega^2(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Осциллятор (2.1) приобрел в терминологии [1] вид групповой системы; операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.4}$$

построенные по столбцам из (2.3), есть базис алгебры Ли (проверяется коммутированием операторов (2.4)).

3. Группа сдвигов вдоль решений

По операторам (2.4) вычисляется 5-параметрическая группа сдвигов вдоль решений системы (при всевозможных функциях $\omega(t)$, $u(t)$:

$$\begin{aligned} x &= x_0(1 + v_3v_4)e^{-v_5} + y_0v_e e^{v_5}, \\ y &= x_0v_4e^{-v_5} + y_0e^{v_5} + v_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для конкретных функций $\omega(t)$, $u(t)$ и при заданном интервале $[0, T]$ общее решение уравнения

(2.1) осуществляет преобразование фазовой плоскости: $x_0, \dot{x}_0 = y_0 \to x(T, x_0, \dot{x}_0)$, $\dot{x}(T, x_0, \dot{x}_0) = y$. Доказывается [1], что для любой тройки $\omega(t)$, $u(t)$, T найдется набор параметров $v_1, \ldots, v_5$, подстановка которого в уравнения (3.1) создаст такое же преобразование фазовой плоскости. Дифференциальная связь (2.3) между входом $\omega(t)$, $u(t)$ в систему и выходом $x(t)$, $y(t)$ эквивалентно заменяется конечной (3.1). Для вычисления параметров $v_1, \ldots, v_5$ нужно погрузить групповую систему (2.3) в L-систему (добавить три уравнения), переименовать фазовые переменные

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_2 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_1 & v_2 \\ 0 & 0 & -v_3^2 & 1 & 2v_3 \\ 0 & 0 & 1+2v_3v_4 & 0 & -2v_4 \\ 0 & 0 & v_3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \\ 1 \\ -\omega^2(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

и найти решение $v_i(t)$ при начальных данных $v_i(0) = 0$ [1]. Нужный набор равен $v_i = v_i(T)$. Отметим, что даже при простой функции $\omega(t)$ (например $\omega(t) = t$) общее решение уравнения (2.1) не находится ни в элементарных функциях, ни в квадратурах. Предложенный способ требует для построения общего решения вычислить одно решение системы (3.2) и подставить его в формулу (3.1).

4. Симметрии возмущенного осциллятора

Переход от уравнения (2.1) к групповой системе с управлением (2.3) и к L-системе (3.2) открывает алгоритмический путь вычисления для (2.1) симметрий по состоянию: преобразованию фазовых переменных, сохраняющих вид уравнения и переводящих любое решение в решение того же уравнения [1]. Для вычисления симметрий по уравнениям L-системы находятся пять операторов симметрий, по ним строится 5-параметрическая группа преобразований симметрий. Результаты достаточно громоздкие, поэтому ставят под сомнение целесообразность их помещения в краткий текст доклада. Отметим, что группа симметрий, как и группа сдвигов, дает возможность по одному решению построить семейство решений с достаточным количеством произвольных постоянных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00228) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009-2011 гг.» (проект №2.1.1/3604).

Список литературы

1. Яковенко Г.Н. Теория управления регулярными системами. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 264 с.

THE ANALYSIS OF ROBUST MECHANICAL SYSTEMS CONTROL THEORY METHODS

G.N. Yakovenko

Mathematical models of mechanical systems in the form of ordinary differential equations are discussed. A model is non-stationary robust: instead of some parameters there may be quite arbitrary functions of independent time variable. This uncertainty brings these systems to controlled objects and allows applying various methods of control theory. A linear oscillator with a perturbation of frequency and external influence is considered as an example. Methods of control theory of a differential model of the oscillator is replaced by the finite one. Calculation of symmetries of a mathematical model is also discussed.

Keywords: mathematical modeling, mechanical systems, time-varying robustness, the controlled process.