Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2644–2645

УДК 531

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПИИ В ТЕКСТУРИРОВАННЫХ ОЦК И ГЦК МЕТАЛЛАХ И СПЛАВАХ

С.А. Берестова, Ш.М. Хананов

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

sber72@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Предложена основанная на алгебраических методах общая схема решения задачи определения осредненных упругих свойств текстурированных ОЦК и ГЦК металлов и сплавов.

Ключевые слова: линейный оператор упругости, поликристаллы, текстура, анизотропия, осреднение, эффективные свойства.

Обобщенный закон Гука как линейное преобразование

Как было показано Я. Рыхлевским [1], обобщенный закон Гука может рассматриваться как линейное преобразование пространства симметричных тензоров второго ранга в себя:

$$\sigma = C\varepsilon.$$

Здесь σ – тензор напряжений, C – линейный оператор упругости, ε – тензор деформаций.

В шестимерном пространстве симметричных тензоров особую роль играют тензоры, удовлетворяющие уравнениям

$$C\omega = \lambda\omega.$$

Как и в векторных пространствах, в пространстве симметричных тензоров второго ранга существует такой ортонормированный базис $\omega^{\mathrm{I}}, \omega^{\mathrm{II}}, \ldots, \omega^{\mathrm{VI}}$:

$$\omega^K \cdot \omega^L = \omega_{ij}^K \omega_{ij}^L = \delta_{KL} = \begin{cases} 0, & K \neq L, \\ 1, & K = L, \end{cases}$$

что тензоры напряжений и деформаций в этом базисе представимы в виде:

$$\sigma = \sigma_1\omega^{\mathrm{I}} + \sigma_2\omega^{\mathrm{II}} + \ldots + \sigma_6\omega^{\mathrm{VI}},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1\omega^{\mathrm{I}} + \varepsilon_2\omega^{\mathrm{II}} + \ldots + \varepsilon_6\omega^{\mathrm{VI}}.$$

Элементы тензорного базиса ω^K ($K = 1, 2, \ldots, 6$) соответствуют различным напряженно-деформированным состояниям (собственные упругие состояния). Для металлов с ОЦК и ГЦК структурой собственные упругие состояния соответствуют одному напряженному состоянию всестороннего сжатия (растяжения) и пяти напряженным состояниям чистых сдвигов.

Тензор четвертого ранга модулей упругости c, поставленный в соответствие линейному оператору C, записывается в виде следующего спектрального разложения:

$$c = \lambda_1\omega^{\mathrm{I}} \otimes \omega^{\mathrm{I}} + \lambda_2\omega^{\mathrm{II}} \otimes \omega^{\mathrm{II}} + \ldots + \lambda_6\omega^{\mathrm{VI}} \otimes \omega^{\mathrm{VI}},$$

$$(\omega^K \otimes \omega^K)_{ijmn} = \omega_{ij}^K \omega_{mn}^K.$$

Параметры λ_K ($K = 1, 2, \ldots, 6$) – это собственные значения линейного оператора C. Эти параметры определяются модулями упругости анизотропного тела и названы истинными модулями жесткости или модулями Кельвина – Рыхлевского, которые являются корнями уравнения шестой степени

$$\det(\hat{c}_{KL} - \lambda\delta_{KL}) = 0 \quad (K, L = 1, \ldots, 6),$$

$$\hat{c}_{KL} = \omega_K \cdot c \cdot \omega_L.$$

Не следует путать величины $\hat{c}_{KL}$ [2] с элементами матрицы модулей упругости c_{kl} в обозначениях Фойгта.

Формальная схема расчета

В рамках модели Фойгта, предполагающей однородность деформаций, упругие характеристики поликристаллов находятся путем осреднения тензоров модулей упругости по множеству ориентаций зерен в поликристалле

$$c^V = \langle c \rangle$$

или с учетом ортогональных разложений

$$c^V = \lambda_1\langle Q\rangle * (\omega^{\mathrm{I}} \otimes \omega^{\mathrm{I}}) + \lambda_2\langle Q\rangle * (\omega^{\mathrm{II}} \otimes \omega^{\mathrm{II}}) + \ldots + \lambda_6\langle Q\rangle * (\omega^{\mathrm{VI}} \otimes \omega^{\mathrm{VI}}).$$

Здесь

$$(\langle Q\rangle * (\omega^K \otimes \omega^K))_{ijmn} = \langle Q_{ip}Q_{jq}Q_{mr}Q_{ps}\rangle \omega_{pq}^K \omega_{mn}^K,$$

где Q_{ip} – элементы матрицы перехода при повороте кристаллографической системы координат случайным образом ориентированного кристаллита до совмещения ее с осями лабораторной системы координат, <...> – операция осреднения по множеству ориентаций зерен в поликристалле, λ_K – модули Кельвина–Рыхлевского зерен.

С другой стороны, тензор c^V может быть представлен спектральным разложением по элементам соответствующего тензорного базиса $\tilde{\omega}^K$:

$$c^V = \lambda_1^V \tilde{\omega}^{\mathrm{I}} \otimes \tilde{\omega}^{\mathrm{I}} + \lambda_2^V \tilde{\omega}^{\mathrm{II}} \otimes \tilde{\omega}^{\mathrm{II}} + \\ + \ldots + \lambda_6^V \tilde{\omega}^{\mathrm{VI}} \otimes \tilde{\omega}^{\mathrm{VI}}.$$

Таким образом, находим модули Кельвина–Рыхлевского в приближении Фойгта:

$$\lambda_K^V = p_{K1}\lambda_1 + p_{K2}\lambda_2 + \ldots + p_{K6}\lambda_6,$$

где

$$p_{KL} = (\tilde{\omega}^K \otimes \tilde{\omega}^K) * \langle Q \rangle * (\omega^L \otimes \omega^L),$$

$$p_{K1} + p_{K2} + \ldots + p_{K6} = 1.$$

В общем случае модули Кельвина–Рыхлевского находятся как взвешенные степенные средние значения соответствующих модулей кристаллитов

$$\lambda_K^{(\alpha)} = (p_{K1}\lambda_1^\alpha + p_{K2}\lambda_2^\alpha + \ldots + p_{K6}\lambda_6^\alpha)^{1/\alpha}.$$

При $\alpha = 1$ имеем средние значения, вычисленные по схеме Фойгта, при $\alpha = -1$ – средние значения по схеме Ройса, предполагающей однородность напряжений. При $\alpha \to 0$ степенное среднее стремится к геометрическому среднему

$$\lambda_K^{(0)} = \lambda_1^{p_{K1}} \lambda_2^{p_{K2}} \lambda_3^{p_{K3}} \lambda_4^{p_{K4}} \lambda_5^{p_{K5}} \lambda_6^{p_{K6}}.$$

Полученное соотношение с формальной точки зрения исчерпывающим образом решает задачу об осреднении упругих характеристик текстурированных металлов. Переход к тензорным обозначениям осуществляется на основе формулы

$$c^{(\alpha)} = \lambda_1^{(\alpha)} \tilde{\omega}^{\mathrm{I}} \otimes \tilde{\omega}^{\mathrm{I}} + \lambda_2^{(\alpha)} \tilde{\omega}^{\mathrm{II}} \otimes \tilde{\omega}^{\mathrm{II}} + \\ + \ldots + \lambda_6^{(\alpha)} \tilde{\omega}^{\mathrm{VI}} \otimes \tilde{\omega}^{\mathrm{VI}}.$$

Некоторые результаты, вытекающие из этих соотношений, были получены ранее другими методами [3–5].

Список литературы

1. Рыхлевский Я. // ПММ. 1984. Т. 48, №3. С. 420–435.

2. Mehrabadi M.M., Cowin S.C. // Mech. Appl. Math. 1990. V. 43, No 1. P. 15–41.

3. Александров К.С. // ДАН СССР. 1965. Т. 164. С. 800–803.

4. Peresada G.I. // Phys. Stat. Sol. 1971. V. (a) 4. P. K23–K26.

5. Берестова С.А., Митюшов Е.А. // ПММ. 1999. Т. 63, №1. С. 524–527.

MATHEMATICALLY MODELING ELASTIC ANISOTROPY IN TEXTURED B.C.C. AND H.C.P. METALS AND ALLOYS

S.A. Berestova, Sh.M. Hananov

A general scheme of the solution of the problem of averaging elastic properties based on algebraic methods for textured B.C.C. and H.C.P. metals and alloys is presented. The generalized Hook's law is a linear trans-formation.

Keywords: linear operator of elasticity, poly-crystals, texture, anisotropy, averaging, effective properties.