УДК 532.5

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА СФЕРЕ

А.В. Иванова

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

ivanovaannav@gmail.com

Поступила в редакцию 24.08.2011

Приведена система законов сохранения массы и полного импульса для уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. На основе явной двухслойной по времени разностной схемы проведено численное моделирование процесса эволюции двумерных нестационарных прерывных волн на вращающейся притягивающей сфере.

Ключевые слова: законы сохранения для уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере, разрывные течения типа бора на сфере, разностная схема, численное моделирование.

Введение

Модель мелкой воды на сфере оказывается сложнее для аналитического исследования по сравнению с классической [1]. Важную роль при ее изучении играют численные методы. Для случая двумерных течений предложена консервативная разностная схема, аппроксимирующая дивергентную форму записи уравнений мелкой воды на вращающейся сфере, полученную из интегральных законов сохранения. Приведены численные расчеты задачи о распространении волн от возмущения в виде шеврона, демонстрирующие эффективность предложенной разностной схемы для сквозного расчета разрывных решений для уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере в двумерном случае.

Законы сохранения

Модель мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере была предложена А.П. Чупахиным и А.А. Черевко в [1] и представляет собой гиперболическую систему дифференциальных уравнений на сфере. Эта система записана в недивергентной форме, в силу чего на ее основе можно строить только непрерывные решения, описывающие гладкие течения мелкой воды. Поскольку система является гиперболической и допускает разрывные решения, для их корректного описания ее можно сформулировать как полную систему законов сохранения.

Дифференциальные законы сохранения массы и импульса, полученные из интегральных законов сохранения, можно представить в следующем виде:

$$(rh\sin\theta)_t + (q\sin\theta)_\theta + Q_\varphi = 0,$$

$$(rq\sin\theta)_t + \left(\left(q\upsilon + \frac{gh^2}{2}\right)\sin\theta\right)_\theta + (qV)_\varphi -$$

$$-\left(QV + \frac{gh^2}{2}\right)\cos\theta = W(Wh\sin^2\theta\cos\theta + Q\sin 2\theta),$$

$$(rQ\sin\theta)_t + (Q\upsilon\sin\theta)_\theta + \left(QV + \frac{gh^2}{2}\right)_\varphi +$$

$$+ qV\cos\theta = -Wq\sin 2\theta, \qquad (1)$$

где $0 < \theta < \pi$ – широта, $0 < \varphi \le 2\pi$ – долгота; υ – меридиональная, V – долготная компоненты скорости, $h > 0$ – глубина слоя, g – ускорение свободного падения, Ω – угловая скорость вращения сферы, $W = \Omega r$. Закон сохранения энергии является выпуклым расширением.

Разностная схема, численное моделирование

Предложена разностная схема, аппроксимирующая дивергентную форму записи уравнений мелкой воды на вращающейся сфере (1), для расчета двумерных течений, зависящих как от широты, так и от долготы. Схема построена методом расщепления по физическим процессам на разнесенной по пространству сетке, на которой компоненты скорости υ, V и расхода q, Q вычисляются в целых узлах, а глубина – в полуцелых узлах, расположенных в центрах ячеек [2].

Уравнение для закона сохранения массы аппроксимируется явной разностной схемой

$$r\sin\theta_\alpha \frac{h^{n+1}_{\alpha,\beta} - h^n_{\alpha,\beta}}{\tau_n} + \frac{q^n_{i+1,\beta}\sin\theta_{i+1} - q^n_{i,\beta}\sin\theta_i}{\Delta\theta} +$$

$$+\frac{Q^n_{\alpha,j+1}-Q^n_{\alpha,j}}{\Delta\theta}=0.$$

После определения по этой схеме глубины $h^{n+1}_{\alpha,\beta}$ значения расхода $q^{n+1}_{i,j}$ находятся путем аппроксимации уравнений для закона сохранения импульса:

$$r\sin\theta_i\frac{q^{n+1}_{i,j}-q^n_{i,j}}{\tau_n}+$$
$$+\frac{(q\upsilon)^n_{i+1,j}\sin\theta_{i+1}-(q\upsilon)^n_{i-1}\sin\theta_{i-1}}{2\Delta\theta}+$$
$$+\frac{(qV)^n_{i,j+1}-(qV)^n_{i,j-1}}{2\Delta\phi}+\frac{g}{2}\sin\theta_i\times$$
$$\times\frac{(h^2)^{n+1}_{\alpha,j}-(h^2)^{n+1}_{\alpha-1,j}}{\Delta\theta}=W^2h^{n+1}_{i,j}\sin^2\theta_i\cos\theta_i+$$
$$+(\omega^n_{i,j})_1+WQ^{n+1}_{i,j}\sin 2\theta_i+Q^{n+1}_{i,j}\cos\theta_i.$$

Разностное уравнение для расхода $Q^{n+1}_{i,j}$ записывается аналогично.

На рис. 1 в пять последовательных моментов времени приведены результаты расчета задачи о распространении волн от возмущения в виде шеврона. В начальный момент профиль жидкости на сфере в целом и на возвышенной области соответствует состояниям равновесия (рис. 1*а*).

Распространение возмущений происходит циклически, в каждом цикле при этом можно выделить четыре основных этапа.

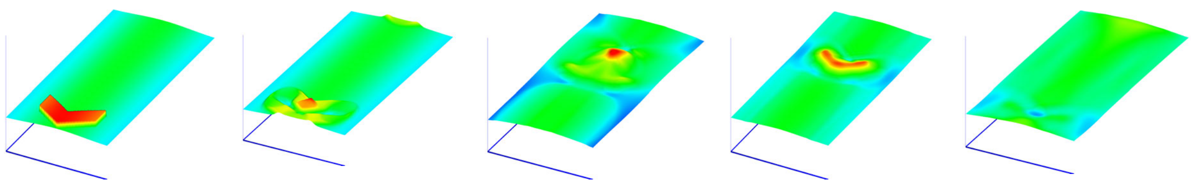
Первый этап – это кумулятивная струя, порождающая эффект фокусировки, при котором сталкиваются крылья шеврона и возмущение становится больше первоначального (рис. 1*б*). Затем в результате распространения возмущений возникает максимальное возвышение свободной поверхности (рис. 1*в*). После этого в диаметрально противоположной части сферы от начального расположения шеврона образуется возмущение, по форме подобное исходному шеврону, но меньше по высоте и размеру (рис. 1*г*). Цикл завершается образованием шеврона меньшего масштаба и более «размытого» на том же месте, что и первоначальный (рис. 1*д*). Поскольку на устойчивых разрывах в модели мелкой воды происходит потеря полной энергии, то с течением времени они постепенно затухают и движение асимптотически выходит на состояние равновесия.

Работа выполнена при участии В.В. Остапенко, А.П. Чупахина, А.А. Черевко при поддержке Интеграционного проекта СО РАН №40, гранта Министерства образования и науки РФ №2.1.1/3543, гранта НШ-4368.2010.1.

Список литературы

1. Черевко А.А., Чупахин А.П. Уравнения модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере 1. Вывод и общие свойства // ПМТФ. 2009. Т. 50, №2. С. 37–45.

2. Иванова А.В., Остапенко В.В., Чупахин А.П. Численное моделирование течений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 30–45.



а) $t = 0$, max$h$ = 0.645 *б*) $t = 26$, max$h$ = 0.650 *в*) $t = 196$, max$h$ = 0.661 *г*) $t = 235$, max$h$ = 0.635 *д*) $t = 490$, max$h$ = 0.577

Рис. 1

NUMERICAL SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL FLUID FLOWS IN THE SHALLOW WATER MODEL ON A SPHERE

A.V. Ivanova

A system of laws of mass and total momentum conservation for the equations of shallow water on a rotating attracting sphere is derived. Based on an explicit two-layer in time difference scheme, the evolution of two-dimensional non-stationary discontinuous waves on a rotating attracting sphere is numerically modeled.

Keywords: conservation laws for shallow water equations on a rotating attractive sphere, discontinuous flow of boron type on a sphere, difference scheme, numerical simulation.