

УДК 519.2

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СООБЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И ЦИКЛИЧЕСКИМ АЛГОРИТМОМ УПРАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

© 2013 г.

А.В. Зорин,¹ Н.Ю. Кузнецов,² И.Н. Кузнецов²

¹Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

²Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев

zoav1602@gmail.com

Поступила в редакцию 24.07.2013

Изучается тандем из систем массового обслуживания конфликтных потоков по циклическому алгоритму. Входные потоки формируются в случайной среде. Перемещение требований между системами осуществляется со случайной скоростью. Требования могут совершать поворот для движения в другом потоке. Получены необходимые условия существования стационарного режима в тандеме. Доказана устойчивость очереди из перемещаемых между системами требований.

Ключевые слова: циклический алгоритм управления, внешняя случайная среда, повторные требования, тандем систем массового обслуживания.

Введение

Задачи управления конфликтными транспортными потоками на пересечениях автомагистралей в рамках теории массового обслуживания изучаются давно [1, 2]. При этом решались сложные задачи управления в различных классах алгоритмов: циклических с фиксированным ритмом, с продлениями («с петель»), с динамическими приоритетами и другие [3–6]. В реальных автотранспортных сетях автомобили на своем пути пересекают несколько перекрестков, следовательно, потоки транспорта на одних перекрестках являются выходными потоками с других перекрестков. Поэтому исследователь уже не может априорно считать известной вероятностную структуру входного потока (например, считать его неординарным пуассоновским), но должен учитывать реальные условия формирования выходных потоков реализуемыми управляющими алгоритмами. В работах [7, 8] рассматривался процесс прохождения «главного» стационарного неординарного транспортного потока без последствия через два последовательных перекрестка. На каждом из перекрестков кроме главного потока присутствовал транспортный поток «в перпендикулярном направлении». Поэтому обслуживание конфликтных потоков на каждом из перекрестков осуществлялось в классе циклических алгоритмов. Кроме того, в работе [8] допускался поворот автотранспортных средств из одного конфликтного направления в другое на первом

перекрестке. Математическая модель приняла вид однородной счетной цепи Маркова

$$\{(Г_i, \chi_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \kappa_{3,i}, \kappa_{4,i}, \kappa_{5,i}); i = 0, 1, \dots\}, \quad (1)$$

описывающей динамику смены состояния управляющих устройств на перекрестках, состояния внешней случайной среды и флуктуации длин очередей. Настоящая статья продолжает работу [8] и использует все введенные там обозначения.

Анализ модели

Основной практический интерес представляет предельное поведение длин очередей. В частности, важно иметь простые и легко проверяемые условия на вероятности смены состояний случайной среды, на интенсивности входных потоков, на длительности пребывания обслуживающего устройства в каждом из своих состояний, на вероятности «левого поворота» и окончания переезда между перекрестками, при выполнении которых длины тех или иных очередей остаются ограниченными в среднем. Для получения необходимых и достаточных условий существования стационарного режима функционирования для периодических счетных цепей Маркова удобно воспользоваться итеративно-мажорантным методом [9]. Этот метод существенным образом опирается на анализ производящих функций

$$\Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r, k) = \sum_{w \in X} z_1^{w_1} z_2^{w_2} z_3^{w_3} z_4^{w_4} z_5^{w_5} Q_i(r, k; w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) \quad (2)$$

для вероятностей

$$\begin{aligned} Q_i(r, k; w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = \\ = P(A_i(r, k; w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)). \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим

$$q(z; j, k, t) = \exp \left\{ \lambda_j^{(k)} t \left(\sum_{b=1}^{\infty} z^b \pi(b; j, k) - 1 \right) \right\},$$

где $j=1,2,4$, производящие функции для распределения числа поступивших требований потока Π_j за время $t > 0$ при состоянии $e^{(k)}$ внешней случайной среды. Будем предполагать, что функции $q(z; j, k, T_r)$ являются аналитическими в круге $|z| < 1 + \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Следующее утверждение обосновывается аналогично доказательству теоремы 3 из [7] с использованием вероятностной интерпретации производящих функций.

Теорема. При $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^I$

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r \oplus 1, l) = \\ = \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, (1 - p_{r \oplus 1})z_5 + \\ + p_{r \oplus 1}z_3; r, k), \end{aligned} \quad (4)$$

при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^{II}$

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r \oplus 1, l) = \\ = \left(\frac{z_5}{z_1} \right)^{\ell_{r \oplus 1, 1}} \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times \Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, (1 - p_{r \oplus 1})z_5 + p_{r \oplus 1}z_3; r, k) + \\ + \sum_{k=1}^d a_{k,l} \sum_{x_1=0}^{\ell_{r \oplus 1, 1}-1} \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{x_4=0}^{\infty} \sum_{x_5=0}^{\infty} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\ \times z_2^{x_2} z_3^{x_3} z_4^{x_4} q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) ((1 - p_{r \oplus 1})z_5 + p_{r \oplus 1}z_3)^{x_5} \times \\ \times \sum_{b=0}^{\ell_{r \oplus 1, 1}-1-x_1} \phi(b; 1, k, T_{r \oplus 1}) (z_5^{x_1+b} - z_1^{x_1+b-\ell_{r \oplus 1, 1}} z_5^{\ell_{r \oplus 1, 1}}), \end{aligned} \quad (5)$$

при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^{III}$

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r \oplus 1, l) = \\ = \left(\frac{1 - \alpha + \alpha z_5}{z_2} \right)^{\ell_{r \oplus 1, 2}} \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, (1 - p_{r \oplus 1})z_5 + \\ + p_{r \oplus 1}z_3; r, k) + \sum_{k=1}^d a_{k,l} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\ell_{r \oplus 1, 2}-1} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{x_4=0}^{\infty} \sum_{x_5=0}^{\infty} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\ \times z_1^{x_1} z_3^{x_3} z_4^{x_4} q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) ((1 - p_{r \oplus 1})z_5 + p_{r \oplus 1}z_3)^{x_5} \times \\ \times q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \sum_{b=0}^{\ell_{r \oplus 1, 2}-1-x_2} \phi(b; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times ((1 - \alpha + \alpha z_5)^{x_2+b} - z_2^{x_2+b-\ell_{r \oplus 1, 2}} (1 - \alpha + \alpha z_5)^{\ell_{r \oplus 1, 2}}), \end{aligned} \quad (6)$$

при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^{IV}$

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r \oplus 1, l) = \\ = z_3^{-\ell_{r \oplus 1, 3}} \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, (1 - p_{r \oplus 1})z_5 + \\ + p_{r \oplus 1}z_3; r, k) + \sum_{k=1}^d a_{k,l} \times \\ \times \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\ell_{r \oplus 1, 3}-1} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{x_4=0}^{\infty} \sum_{x_5=0}^{\infty} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\ \times z_1^{x_1} z_2^{x_2} z_4^{x_4} q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \sum_{b=0}^{\min\{x_5, \ell_{r \oplus 1, 3}-1-x_3\}} \phi(b; 3, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times \psi(b; x_5, p_{r \oplus 1}) z_5^{x_5-b} (1 - z_3^{x_3+b-\ell_{r \oplus 1, 3}}), \end{aligned} \quad (7)$$

при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^V$

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r \oplus 1, l) = \\ = z_4^{-\ell_{r \oplus 1, 4}} \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, (1 - p_{r \oplus 1})z_5 + \\ + p_{r \oplus 1}z_3; r, k) + \sum_{k=1}^d a_{k,l} \times \\ \times q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\ell_{r \oplus 1, 4}-1} \sum_{x_4=0}^{\infty} \sum_{x_5=0}^{\infty} z_1^{x_1} z_2^{x_2} z_3^{x_3} \times \\ \times ((1 - p_{r \oplus 1})z_5 + p_{r \oplus 1}z_3)^{x_5} \times \\ \times Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\ \times \sum_{b=0}^{\ell_{r \oplus 1, 4}-1-x_4} \phi(b; 4, k, T_{r \oplus 1}) (1 - z_4^{x_4+b-\ell_{r \oplus 1, 4}}), \end{aligned} \quad (8)$$

при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^{VI}$

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r \oplus 1, l) = \\ = \left(\frac{z_5}{z_1} \right)^{\ell_{r \oplus 1, 1}} z_3^{-\ell_{r \oplus 1, 3}} \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \times \\ \times \Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, (1 - p_{r \oplus 1})z_5 + p_{r \oplus 1}z_3; r, k) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_4=0}^{\infty} \sum_{x_5=0}^{\infty} z_2^{x_2} z_4^{x_4} \times \\
& \times \left(\sum_{x_1+b_1 < \ell_{r \oplus 1,1}} \sum_{\ell_{r \oplus 1,3} - x_3 \leq y \leq x_5} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \right. \\
& \times \phi(b_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \psi(y; x_5, p_{r \oplus 1}) z_5^{x_5-y} z_3^{x_3+y-\ell_{r \oplus 1,3}} \times \\
& \times \left(z_5^{x_1+b_1} - z_1^{x_1+b_1-\ell_{r \oplus 1,1}} z_5^{\ell_{r \oplus 1,1}} \right) + \\
& + \sum_{x_1+b_1 \geq \ell_{r \oplus 1,1}} \sum_{y \leq \min\{x_5, \ell_{r \oplus 1,3} - x_3 - 1\}} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\
& \times \phi(b_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \psi(y; x_5, p_{r \oplus 1}) z_5^{x_5+\ell_{r \oplus 1,1}-y} z_1^{x_1+b_1-\ell_{r \oplus 1,1}} \left(1 - z_3^{x_3+y-\ell_{r \oplus 1,3}} \right) + \\
& + \sum_{x_1+b_1 < \ell_{r \oplus 1,1}} \sum_{y \leq \min\{x_5, \ell_{r \oplus 1,3} - x_3 - 1\}} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\
& \times \phi(b_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \psi(y; x_5, p_{r \oplus 1}) z_5^{x_5-y} \times \\
& \times \left(z_5^{x_1+b_1} - z_1^{x_1+b_1-\ell_{r \oplus 1,1}} z_3^{x_3+y-\ell_{r \oplus 1,3}} z_5^{\ell_{r \oplus 1,1}} \right) \Big), \quad (9)
\end{aligned}$$

при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^{\text{VII}}$

$$\begin{aligned}
& \Psi_{i+1}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r \oplus 1, l) = \\
& = \left(\frac{1 - \alpha + \alpha z_5}{z_2} \right)^{\ell_{r \oplus 1,2}} z_3^{-\ell_{r \oplus 1,3}} \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, (1 - p_{r \oplus 1}) z_5 + p_{r \oplus 1} z_3; r, k) + \\
& + \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_1; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_4=0}^{\infty} \sum_{x_5=0}^{\infty} z_1^{x_1} z_4^{x_4} \times \\
& \times \left(\sum_{x_2+b_2 < \ell_{r \oplus 1,2}} \sum_{\ell_{r \oplus 1,3} - x_3 \leq y \leq x_5} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \right. \\
& \times \phi(b_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \psi(y; x_5, p_{r \oplus 1}) \times \\
& \times z_5^{x_5-y} z_3^{x_3+y-\ell_{r \oplus 1,3}} \times \\
& \times \left((1 - \alpha + \alpha z_5)^{x_2+b_2} - z_2^{x_2+b_2-\ell_{r \oplus 1,2}} (1 - \alpha + \alpha z_5)^{\ell_{r \oplus 1,2}} \right) + \\
& + \sum_{x_2+b_2 \geq \ell_{r \oplus 1,2}} \sum_{y \leq \min\{x_5, \ell_{r \oplus 1,3} - x_3 - 1\}} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\
& \times \phi(b_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \psi(y; x_5, p_{r \oplus 1}) z_5^{x_5-y} (1 - \alpha + \alpha z_5)^{\ell_{r \oplus 1,2}} \times \\
& \times z_2^{x_2+b_2-\ell_{r \oplus 1,2}} \left(1 - z_3^{x_3+y-\ell_{r \oplus 1,3}} \right) + \\
& + \sum_{x_2+b_2 < \ell_{r \oplus 1,2}} \sum_{y \leq \min\{x_5, \ell_{r \oplus 1,3} - x_3 - 1\}} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\
& \times \phi(b_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \psi(y; x_5, p_{r \oplus 1}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times z_5^{x_5-y} \left((1 - \alpha + \alpha z_5)^{x_2+b_2} - z_2^{x_2+b_2-\ell_{r \oplus 1,2}} \times \right. \\
& \times z_3^{x_3+y-\ell_{r \oplus 1,3}} (1 - \alpha + \alpha z_5)^{\ell_{r \oplus 1,2}} \Big), \quad (10)
\end{aligned}$$

при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^{\text{VIII}}$

$$\begin{aligned}
& \Psi_{i+1}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r \oplus 1, l) = \\
& = \left(\frac{z_5}{z_1} \right)^{\ell_{r \oplus 1,1}} z_4^{-\ell_{r \oplus 1,4}} \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, (1 - p_{r \oplus 1}) z_5 + p_{r \oplus 1} z_3; r, k) + \\
& + \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{x_5=0}^{\infty} z_2^{x_2} z_3^{x_3} ((1 - p_{r \oplus 1}) z_5 + p_{r \oplus 1} z_3)^{x_5} \times \\
& \times \left(\sum_{x_1+b_1 < \ell_{r \oplus 1,1}} \sum_{x_4+b_4 \geq \ell_{r \oplus 1,4}} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \right. \\
& \times \phi(b_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \phi(b_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) z_4^{x_4+b_4-\ell_{r \oplus 1,4}} \times \\
& \times \left(z_5^{x_1+b_1} - z_1^{x_1+b_1-\ell_{r \oplus 1,1}} z_5^{\ell_{r \oplus 1,1}} \right) + \\
& + \sum_{x_1+b_1 \geq \ell_{r \oplus 1,1}} \sum_{x_4+b_4 < \ell_{r \oplus 1,4}} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\
& \times \phi(b_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \phi(b_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) z_1^{x_1+b_1-\ell_{r \oplus 1,1}} \times \\
& \times z_5^{\ell_{r \oplus 1,1}} \left(1 - z_4^{x_4+b_4-\ell_{r \oplus 1,4}} \right) + \\
& + \sum_{x_1+b_1 < \ell_{r \oplus 1,1}} \sum_{x_4+b_4 < \ell_{r \oplus 1,4}} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\
& \times \phi(b_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \phi(b_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \left(z_5^{x_1+b_1} - z_1^{x_1+b_1-\ell_{r \oplus 1,1}} z_4^{x_4+b_4-\ell_{r \oplus 1,4}} z_5^{\ell_{r \oplus 1,1}} \right) \Big), \quad (11)
\end{aligned}$$

при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma^{\text{IX}}$

$$\begin{aligned}
& \Psi_{i+1}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r \oplus 1, l) = \\
& = \left(\frac{1 - \alpha + \alpha z_5}{z_2} \right)^{\ell_{r \oplus 1,2}} z_4^{-\ell_{r \oplus 1,4}} \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times q(z_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) q(z_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, (1 - p_{r \oplus 1}) z_5 + p_{r \oplus 1} z_3; r, k) + \\
& \times \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z_1; 1, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{x_5=0}^{\infty} z_1^{x_1} z_3^{x_3} ((1 - p_{r \oplus 1}) z_5 + p_{r \oplus 1} z_3)^{x_5} \times \\
& \times \left(\sum_{x_2+b_2 < \ell_{r \oplus 1,2}} \sum_{x_4+b_4 \geq \ell_{r \oplus 1,4}} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \right. \\
& \times z_4^{x_4+b_4-\ell_{r \oplus 1,4}} \phi(b_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \times \phi(b_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \left((1 - \alpha + \alpha z_5)^{x_2+b_2} - \right. \\
& \left. - z_2^{x_2+b_2-\ell_{r \oplus 1,2}} (1 - \alpha + \alpha z_5)^{\ell_{r \oplus 1,2}} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{x_2+b_2 \geq \ell_{r \oplus 1,2}} \sum_{x_4+b_4 < \ell_{r \oplus 1,4}} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\
& \quad \times z_2^{x_2+b_2-\ell_{r \oplus 1,2}} \phi(b_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \quad \times \phi(b_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) (1 - \alpha + \alpha z_5)^{\ell_{r \oplus 1,2}} \times \\
& \quad \times \left(1 - z_4^{x_4+b_4-\ell_{r \oplus 1,4}} \right) + \\
& + \sum_{x_2+b_2 < \ell_{r \oplus 1,2}} \sum_{x_4+b_4 < \ell_{r \oplus 1,4}} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times \\
& \quad \times \phi(b_2; 2, k, T_{r \oplus 1}) \phi(b_4; 4, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
& \quad \times \left((1 - \alpha + \alpha z_5)^{x_2+b_2} - z_2^{x_2+b_2-\ell_{r \oplus 1,2}} \times \right. \\
& \quad \left. \times z_4^{x_4+y-\ell_{r \oplus 1,4}} (1 - \alpha + \alpha z_5)^{\ell_{r \oplus 1,2}} \right). \quad (12)
\end{aligned}$$

Соотношения (4)–(12) определяют функции $\Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r, k)$, аналитические в поликруге

$$\{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) : |z_1| < 1 + \varepsilon, |z_2| < 1 + \varepsilon, |z_3| < 1 + \varepsilon, |z_4| < 1 + \varepsilon, |z_5| < 1 + \varepsilon\}.$$

При $j=1, 2, \dots, 5$ обозначим совместное распределение величин $\Gamma_i, \chi_i, \kappa_{j,i}$ через

$$Q_{j,i}(r, k; x_j) = \sum Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

где суммирование распространяется на все переменные x_s с индексом $s \neq j$ и $x_s = 0, 1, \dots$. В дальнейшем нам будет нужна производящая функция

$$\Psi_{j,i}(z; r, k) = \sum_{x_j=0}^{\infty} z^{x_j} Q_{j,i}(r, k; x_j)$$

для этого совместного распределения вероятностей. Заметим, что ряд $\Psi_{j,i}(z; r, k)$ получается из функции $\Psi_i(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; r, k)$, если подставить значения переменных $z_j = z$ и $z_s = 1$ для $s \neq j$. Пусть $\bar{\lambda}_j^{(k)} = \lambda_j^{(k)} \sum_{b=1}^{\infty} b \pi(b; j, k)$ есть среднее число требований потока Π_j при состоянии среды $e^{(k)}$ в единицу времени, $\mathbf{a}_k$ – стационарная вероятность состояния среды $e^{(k)}$, $k=1, 2, \dots, d$, и положим $\ell_j = \sum_{\Gamma(r) \in j \Gamma} \ell_{r,j}$, $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$.

Теорема 2. Для существования стационарного распределения марковской цепи (1) необходимо выполнение для $j=1, 2, 4$ неравенств

$$T \sum_{k=1}^d \mathbf{a}_k \bar{\lambda}_j^{(k)} - \ell_j \leq 0.$$

Доказательство. Зафиксируем $j=1, 2, 4$. Для производящих функций $\Psi_{j,i}(z; r, k)$, $i=0, 1, \dots$, в силу равенств (4)–(12) имеют место следующие рекуррентные по i соотношения: для $\Gamma^{(r \oplus 1)} \notin j \Gamma$

$$\begin{aligned}
\Psi_{j,i+1}(z; r \oplus 1, l) = \\
= \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z; j, k, T_{r \oplus 1}) \Psi_{j,i}(z; r, k), \quad (13)
\end{aligned}$$

а для $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in j \Gamma$

$$\begin{aligned}
\Psi_{j,i+1}(z; r \oplus 1, l) = \sum_{k=1}^d a_{k,l} q(z; j, k, T_{r \oplus 1}) \times \\
\times z^{-\ell_{r \oplus 1,j}} \Psi_{j,i}(z; r, k) + \\
+ \sum_{k=1}^d a_{k,l} \sum_{x_j=0}^{\ell_{r \oplus 1,j}-1} Q_{j,i}(r, k; x_j) \times \\
\times \sum_{b=0}^{\ell_{r \oplus 1,j}-1-x_j} \phi(b; j, k, T_{r \oplus 1}) (1 - z^{x_j+b-\ell_{r \oplus 1,j}}). \quad (14)
\end{aligned}$$

Заметим, что при $0 < z < 1$ входящие в правую часть равенства (14) величины $1 - z^{x_j+b-\ell_{r \oplus 1,j}}$ отрицательны. Пусть g обозначает натуральное число, которое выберем позже. Последовательно применяя равенства (13), (14) с заменой $i+1$ на $i+ng, i+ng-1, \dots$, получим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^d \Psi_{j,i+ng}(z; r, l) \leq \\
& \leq \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_{gn}) \in E^{gn}} a_{k_1, k_2} a_{k_2, k_3} \times \dots \times a_{k_{gn-1}, k_{gn}} z^{-g \ell_1} \times \\
& \quad \times q(z; j, k_1, T_{r \oplus 1}) q(z; j, k_2, T_{r \oplus 2}) \times \\
& \quad \times \dots \times q(z; j, k_{gn}, T_{r \oplus (gn)}) \Psi_{j,i}(z; r, k_1). \quad (15)
\end{aligned}$$

Здесь $E^{gn} = E \times \dots \times E$ – прямое произведение gn копий множества E . Предположим, что $T \sum_{k=1}^d \mathbf{a}_k \bar{\lambda}_j^{(k)} - \ell_j > 0$. Вычислим производную сомножителя при $\Psi_{j,i}(z; r, k_1)$ в точке $z=1$:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dz} \sum_{(k_2, \dots, k_{gn}) \in E^{gn-1}} a_{k_1, k_2} a_{k_2, k_3} \times \dots \times a_{k_{gn-1}, k_{gn}} z^{-g \ell_1} \times \\
& \quad \times q(z; j, k_1, T_{r \oplus 1}) q(z; j, k_2, T_{r \oplus 2}) \times \\
& \quad \times \dots \times q(z; j, k_{gn}, T_{r \oplus (gn)}) \Big|_{z=1} = \\
& = \sum_{(k_2, \dots, k_{gn}) \in E^{gn-1}} a_{k_1, k_2} a_{k_2, k_3} \times \dots \times a_{k_{gn-1}, k_{gn}} \times \\
& \quad \times \left(\bar{\lambda}_j^{(k_1)} T_{r \oplus 1} + \bar{\lambda}_j^{(k_2)} T_{r \oplus 2} + \dots + \bar{\lambda}_j^{(k_{gn})} T_{r \oplus (gn)} - g \ell_j \right).
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
& \sum_{(k_2, \dots, k_{gn}) \in E^{gn-1}} a_{k_1, k_2} a_{k_2, k_3} \times \dots \times a_{k_{gn-1}, k_{gn}} \bar{\lambda}_j^{(k_1)} = \\
& = \sum_{(k_2, \dots, k_j) \in E^{i-1}} a_{k_1, k_2} a_{k_2, k_3} \times \dots \times a_{k_{i-1}, k_i} \bar{\lambda}_j^{(k_i)} \times
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{(k_{i+1}, \dots, k_{gn}) \in E^{gn-i}} a_{k_i, k_{i+1}} a_{k_{i+1}, k_{i+2}} \times \dots \times a_{k_{gn-1}, k_{gn}} =$$

$$= \sum_{k_i=1}^d a_{k_i, k_i}^{(i)} \bar{\lambda}_j^{(k_i)},$$

выражение для производной преобразуется далее следующим образом:

$$\sum_{k=1}^d (a_{k_1, k}^{(0)} \bar{\lambda}_j^{(k)} T_{r \oplus 1} + a_{k_1, k}^{(1)} \bar{\lambda}_j^{(k)} T_{r \oplus 2} +$$

$$+ \dots + a_{k_1, k}^{(ng-1)} \bar{\lambda}_j^{(k)} T_{r \oplus (ng)}) - g \ell_j =$$

$$= T_{r \oplus 1} \sum_{k=1}^d \bar{\lambda}_j^{(k)} (a_{k_1, k}^{(0)} + a_{k_1, k}^{(n)} + \dots + a_{k_1, k}^{(ng-n)}) +$$

$$+ T_{r \oplus 2} \sum_{k=1}^d \bar{\lambda}_j^{(k)} (a_{k_1, k}^{(1)} + a_{k_1, k}^{(n+1)} + \dots + a_{k_1, k}^{(ng-n+1)}) + \dots +$$

$$+ T_r \sum_{k=1}^d \bar{\lambda}_j^{(k)} (a_{k_1, k}^{(n-1)} + a_{k_1, k}^{(2n-1)} + \dots + a_{k_1, k}^{(ng-1)}) - g \ell_j.$$

Поскольку при $g \rightarrow \infty$ средние по Чезаро

$$\frac{a_{k_1, k}^{(i)} + a_{k_1, k}^{(n+i)} + \dots + a_{k_1, k}^{(ng-n+i)}}{g} \rightarrow a_k,$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1,$$

то при достаточно большом значении g знак производной совпадет со знаком выражения

$$\sum_{k=1}^d \bar{\lambda}_j^{(k)} a_k (T_{r \oplus 1} + T_{r \oplus 2} + \dots + T_{r \oplus (ng)}) - \ell_j > 0.$$

Поскольку при $z = 1$

$$\sum_{(k_2, \dots, k_{gn}) \in E^{gn-1}} a_{k_1, k_2} a_{k_2, k_3} \times \dots \times a_{k_{gn-1}, k_{gn}} z^{-g \ell_j} \times$$

$$\times q(z; j, k_1, T_{r \oplus 1}) q(z; j, k_2, T_{r \oplus 2}) \times$$

$$\times \dots \times q(z; j, k_{gn}, T_{r \oplus (gn)}) = 1,$$

а производная отрицательна, существует точка $0 < z < 1$, такая, что

$$R_+ = \max \left\{ \sum_{(k_2, \dots, k_{gn}) \in E^{gn-1}} a_{k_1, k_2} a_{k_2, k_3} \times \dots \times a_{k_{gn-1}, k_{gn}} z^{-g \ell_j} \times \right.$$

$$\times q(z; j, k_1, T_{r \oplus 1}) q(z; j, k_2, T_{r \oplus 2}) \times$$

$$\times \dots \times q(z; j, k_{gn}, T_{r \oplus (gn)}) \left. \right\} < 1.$$

Тогда неравенство (15) можно усилить до следующего:

$$\sum_{l=1}^d \Psi_{j, i+gn}(z; r, l) \leq R_+ \sum_{k=1}^d \Psi_{j, i}(z; r, k).$$

Следовательно, независимо от начального распределения все производящие функции $\Psi_{j, i}(z; r, k) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть существует стационарное распределение вероятностей

$$\{Q(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \Gamma^{(r)} \in \Gamma,$$

$$e^{(k)} \in E, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in X\}$$

марковской цепи (1). Выбрав его в качестве начального, мы гарантируем существование пределов

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_{j, i}(r, k; x_j) = Q_j(r, k; x_j).$$

Тогда с необходимостью получаем $Q_j(r, k; x_j) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 3. Пусть $\kappa_{1,0} = \kappa_{2,0} = \kappa_{3,0} = \kappa_{4,0} = \kappa_{5,0} = 0$. Тогда последовательность $\{\mathbf{M}\kappa_{5,i}; i = 0, 1, \dots\}$ ограничена по i , а функции $\Psi_{5,i}(z; r, k)$ ограничены по абсолютной величине некоторой константой $M < \infty$ в круге $|z| \leq 1 + \rho$, где $0 < \rho < \varepsilon$, а константа M зависит только от ρ .

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из второго, так как, в силу формулы Коши, математические ожидания вещественной случайной величины $\kappa_{5,i}$ будут равномерно ограничены по i :

$$\mathbf{M}\kappa_{5,i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z-1|=\rho} (z-1)^{-2} \sum_{k=1}^d \sum_{r=1}^n \Psi_{5,i}(z; r, k) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-1|=\rho} (z-1)^{-2} \sum_{k=1}^d \sum_{r=1}^n \Psi_{5,i}(z; r, k) dz \right| \leq \frac{dnM}{\rho}.$$

Поэтому докажем второе утверждение теоремы. Производящие функции $\Psi_{5,i}(z; r, k)$, $i = 0, 1, \dots$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Psi_{5,i+1}(z; r \oplus 1, l) =$$

$$= \sum_{k=1}^d a_{k,l} \Psi_{5,i}(1 + (1 - p_{r \oplus 1})(z-1); r, k)$$

при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \notin \Gamma \cup \Gamma^2$,

$$\Psi_{5,i+1}(z; r \oplus 1, l) =$$

$$= z^{\ell_{r \oplus 1, l}} \sum_{k=1}^d a_{k,l} \Psi_{5,i}(1 + (1 - p_{r \oplus 1})(z-1); r, k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^d a_{k,l} \sum_{x_1=0}^{\ell_{r \oplus 1, l}-1} \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{x_4=0}^{\infty} \sum_{x_5=0}^{\infty} Q_i(r, k;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \times$$

$$\times (p_{r \oplus 1} + (1 - p_{r \oplus 1})z)^{x_5} \times$$

$$\times \sum_{b=0}^{\ell_{r \oplus 1, l}-x_1-1} \phi(b; 1, k, T_{r \oplus 1})(z^{x_1+b} - z^{\ell_{r \oplus 1, l}})$$

при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in \Gamma$,

$$\Psi_{5,i+1}(z; r \oplus 1, l) = (1 - \alpha + \alpha z)^{\ell_{r \oplus 1, 2}} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^d a_{k,l} \Psi_{5,i}(1 + (1 - p_{r \oplus 1})(z-1); r, k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^d a_{k,l} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\ell_{r \oplus 1,1}-1} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{x_4=0}^{\infty} \sum_{x_5=0}^{\infty} Q_i(r, k; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \times (p_{r \oplus 1} + (1 - p_{r \oplus 1})z)^{x_5} \times$$

$$\times \sum_{b=0}^{\ell_{r \oplus 1,2}-x_2-1} \phi(b; 2, k, T_{r \oplus 1}) \times$$

$$\times ((1 - \alpha + \alpha z)^{x_2+b} - (1 - \alpha + \alpha z)^{\ell_{r \oplus 1,2}})$$
 при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in {}^2\Gamma$.
 Для $1 < z < 1 + \rho$ выполняются неравенства:
 $z^{x_1+b} - z^{\ell_{r \oplus 1,1}} < 0$ при $0 \leq b + x_1 < \ell_{r \oplus 1,1}$, $(1 - \alpha + \alpha z)^{x_2+b} - (1 - \alpha + \alpha z)^{\ell_{r \oplus 1,2}} < 0$ при $0 \leq b + x_2 < \ell_{r \oplus 1,2}$ и, наконец, $(1 - \alpha + \alpha z)^{\ell_{r \oplus 1,2}} \leq z^{\ell_{r \oplus 1,2}}$.
 Пусть $\tilde{\ell}_r$ принимает значение 0 при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \notin {}^1\Gamma \cup {}^2\Gamma$, значение $\ell_{r \oplus 1,1}$ при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in {}^1\Gamma$ и значение $\ell_{r \oplus 1,2}$ при $\Gamma^{(r \oplus 1)} \in {}^2\Gamma$. Тогда для всех r и z , $1 \leq r \leq n$, $1 < z < 1 + \rho$, получим

$$\Psi_{5,i+1}(z; r \oplus 1, l) \leq z^{\tilde{\ell}_{r \oplus 1}} \times \sum_{k=1}^d a_{k,l} \Psi_{5,i}(1 + (1 - p_{r \oplus 1})(z - 1); r, k). \quad (16)$$

Итерируя соотношение (16), найдем:

$$\Psi_{5,i+2}(z; r \oplus 2, l) \leq z^{\tilde{\ell}_{r \oplus 2}} (p_{r \oplus 2} + (1 - p_{r \oplus 2})z)^{\tilde{\ell}_{r \oplus 1}} \sum_{k_1=1}^d \sum_{k_2=1}^d a_{k_1,k_2} a_{k_2,l} \times$$

$$\times \Psi_{5,i}(1 + (1 - p_{r \oplus 1})(1 - p_{r \oplus 2})(z - 1); r, k_1) =$$

$$= z^{\tilde{\ell}_{r \oplus 2}} (1 + (1 - p_{r \oplus 2})(z - 1))^{\tilde{\ell}_{r \oplus 1}} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^d a_{k,l}^{(2)} \Psi_{5,i}(1 + (1 - p_{r \oplus 1})(1 - p_{r \oplus 2})(z - 1); r, k).$$

По индукции устанавливается следующее неравенство, справедливое для любого натурального g :

$$\Psi_{5,i+gn}(z; r, l) \leq G(z, r, g) \times \sum_{k=1}^d a_{k,l}^{(ng)} \Psi_{5,i}(1 - P^g(z - 1); r, k),$$

где обозначено

$$P = (1 - p_1)(1 - p_2) \times \dots \times (1 - p_n),$$

$$G(z, r, g) = z^{\tilde{\ell}_r} (1 + P(z - 1))^{\tilde{\ell}_r} \times$$

$$\times \dots \times (1 + P^{g-1}(z - 1))^{\tilde{\ell}_r} \times$$

$$\times (1 + (1 - p_r)(z - 1))^{\tilde{\ell}_{r \oplus (n-1)}} \times$$

$$\times \dots \times (1 + P^{g-1}(1 - p_r)(z - 1))^{\tilde{\ell}_{r \oplus (n-1)}} \times$$

$$\times \dots \times \left[(1 + (1 - p_r)(1 - p_{r \oplus (n-1)})(z - 1))^{\tilde{\ell}_{r \oplus (n-2)}} \times \right.$$

$$\left. \times \dots \times (1 + P^{g-1}(1 - p_r)(1 - p_{r \oplus (n-1)})(z - 1))^{\tilde{\ell}_{r \oplus (n-2)}} \right] \times$$

$$\times \dots \times \left[(1 + (1 - p_r)(1 - p_{r \oplus (n-1)})(z - 1))^{\tilde{\ell}_{r \oplus 1}} \times \dots \right.$$

$$\left. \times \dots \times (1 + P^{g-1}(1 - p_r)(1 - p_{r \oplus (n-1)})(z - 1))^{\tilde{\ell}_{r \oplus 1}} \right].$$

Поскольку $0 < P < 1$, величины $P^g(1 - p_r) \times (1 - p_{r \oplus (n-1)}) \times \dots \times (1 - p_{r \oplus (n-s)})(z - 1)$, $g = 0, 1, \dots$, при каждом $s = 1, 2, \dots, n - 1$ сохраняют знак, то ряды

$$\sum_{g=0}^{\infty} P^g(1 - p_r)(1 - p_{r \oplus (n-1)}) \times \dots \times (1 - p_{r \oplus (n-s)})(z - 1)$$
 сходятся, поэтому, по известному критерию для бесконечных произведений [10], существует конечный предел величин $G(z, r, g)$ при $g \rightarrow \infty$. Следовательно, последовательности $\{\Psi_{5,i+gn}(z; r, l); g = 0, 1, \dots\}$ ограничены, если только ограничены соответствующие начальные члены $\Psi_{5,i}(z; r, l)$, $0 \leq i \leq n - 1$. Но при нулевых начальных очередях ограниченность $\Psi_{5,i}(z; r, l)$, $0 \leq i \leq n - 1$, следует из соотношений (4)–(12). Доказательство завершено.

Утверждение теоремы 3 можно пояснить следующим образом. Поскольку на каждом такте убыль длины очереди O_5 в среднем пропорциональна длине этой очереди, то приток транспорта из очередей O_1, O_2 существенно изменяет только малую длину очереди O_5 . В то же время, приток требований в очередь O_5 из очередей O_1 и O_2 ограничен случайными конечными характеристиками потока насыщения $\ell_{r,1}, \ell_{r,2}$. Поэтому даже в случае, когда длины очередей O_1 и O_2 неограниченно возрастают, за большой промежуток времени длина очереди O_5 должна колебаться около «равновесного значения», для которого доля требований, покинувших O_5 , в среднем равна числу требований потоков насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}$.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 12-01-90409 «Моделирование и анализ систем управления взаимодействующими транспортными потоками высокой интенсивности» (Договор № НК-12-01-90409/13) и при поддержке НАН Украины (НДР от 29.03.2012 г., договор № ВК.125.15.12).

Список литературы

1. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1971.
2. Афанасьева Л.Г., Белорусов Т.Н. Предельные теоремы для систем с нетерпеливыми клиентами в

условиях высокой загрузки // Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56. Вып. 4. С. 788–796.

3. Кувыкина Е.В., Федоткин М.А. Изучение предельных свойств процесса управления конфликтными потоками Бартлетта в классе однородных алгоритмов с ориентацией и переналадками // Тезисы докладов VII Белорусской зимней школы-семинара «Сети связи и сети ЭВМ как модели массового обслуживания». Минск: БГУ, 1991. С. 80–81.

4. Куделин А.Н., Федоткин М.А. Управление конфликтными потоками в случайной среде по информации о наличии очереди // Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, ВИНТИ, № 1717–В96, деп. 1996.

5. Литвак Н.В., Федоткин М.А. Вероятностная модель адаптивного управления конфликтными потоками // Автоматика и телемеханика. 2000. № 5. С. 67–76.

6. Пройдакова Е.В., Федоткин М.А. Управление выходными потоками в системе с циклическим об-

служиванием и переналадками // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 96–106.

7. Зорин А.В. Устойчивость тандема систем обслуживания с бернуллиевским немгновенным перемещением требований // Теория вероятностей и математическая статистика. 2011. Т. 84. С. 163–176.

8. Зорин А.В. Стохастическая модель сообщающихся систем массового обслуживания с повторными вызовами и циклическим управлением в случайной среде // Кибернетика и системный анализ. 2013. № 6 (принято к публикации).

9. Федоткин М.А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. II // Литовский математический сборник. 1989. Т. 29. № 1. С. 148–159.

10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 864 с.

ANALYSIS OF A STOCHASTIC MODEL OF COMMUNICATING RETRIAL QUEUEING SYSTEMS WITH A CYCLIC CONTROL ALGORITHM IN A RANDOM ENVIRONMENT

A.V. Zorine, N.Yu. Kuznetsov, I.N. Kuznetsov

A tandem of queueing systems servicing conflicting flows according to a cyclic algorithm is studied. The input flows are formed in a random environment. Demands are transferred between the systems with a random speed. The demands may turn to move in another flow. The necessary conditions for the existence of a stationary mode in the tandem are obtained. The stability of the queue of transferred demands is proved.

Keywords: cyclic control algorithm, external random environment, retrial demands, tandem of queueing systems.