М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.9:514.7

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ КИРАЛЬНОГО ТИПА

А.В. Баландин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

balandin@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 05.06.2013

Предложен способ построения законов сохранения для систем кирального типа непосредственно из представления Лакса.

Ключевые слова: интегрируемые системы, законы сохранения, системы кирального типа, нелинейные сигма-модели, представление Лакса.

В работе изучаются законы сохранения для систем кирального типа, т.е. систем n дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными следующего вида:

$$U^i_{xy} + \Gamma^i_{jk} U^j_x U^k_y + Q^i = 0 . \qquad (1)$$

Индексы i, j, k, m принимают значения от 1 до n; функции Γ^i_{jk}, Q^i являются гладкими функциями переменных U^m. Связность, определенную коэффициентами Γ^i_{jk}, будем называть ассоциированной с системой связностью. Системы (1), имеющие вариационное происхождение, называются общими нелинейными сигма-моделями.

Представление Лакса системы (1) со значениями в алгебре Ли g будем понимать следующим образом.

Определение 1. Будем говорить, что система (1) допускает представление Лакса со значениями в алгебре Ли g, если существует набор гладких функций $\widetilde{A} = A_j(U^i,\lambda)U^j_x + M(U^i,\lambda)$, $\widetilde{B} = B_j(U^i,\lambda)U^j_y + N(U^i,\lambda)$ (здесь λ – произвольный параметр) со значениями в матричной алгебре Ли g ($g \subset gl(N,R)$), таких, что условия совместности системы $F_x = \widetilde{A}F, \;\; F_y = \widetilde{B}F$ при каждом значении параметра λ приводят к системе, эквивалентной системе (1).

Далее будем использовать следующие обозначения: $S^\alpha_i = (A^\alpha_i - B^\alpha_i)/2$, $P^\alpha_i = (A^\alpha_i + B^\alpha_i)/2$ (где α – координаты относительно некоторого базиса в g) и предполагать, что ранг матрицы S^α_i равен n.

Замечание 1. Из определения 1 непосредственные вычисления приводят к условиям:

$$P_{[j,k]} + S_{(j,k)} - S_i\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}[(P_k - S_k),(P_j + S_j)]\,, \qquad (2)$$

$$M,_i = [(P_i - S_i), M]\,,\;\; N,_i = [(P_i + S_i), N]\,, \qquad (3)$$

$$S_i Q^i = \frac{1}{2}[M, N]\,.$$

В работе [1] указан способ, позволяющий каждому представлению Лакса системы (1) и каждому ad-инвариантному симметрическому однородному полиному f степени s на алгебре g поставить в соответствие тензорное поле K^f Киллинга ранга s. Далее приведено обобщение этого результата.

Теорема 1. Пусть система (1) допускает представление Лакса со значениями в полупростой алгебре Ли g и f – ad-инвариантный симметрический однородный полином степени p на алгебре g. Тогда симметрические тензоры $K^{p1}{}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ и $K^{p2}{}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$, определенные равенствами

$$K^{p1}{}_{i_1,i_2,\dots,i_k} = f(\underbrace{M, M,\dots, M}_{s}, S_{i_1}, S_{i_2},\dots, S_{i_k})\,,$$

$$K^{p2}{}_{i_1,i_2,\dots,i_k} = f(\underbrace{N, N,\dots, N}_{s}, S_{i_1}, S_{i_2},\dots, S_{i_k})\,, \qquad (4)$$

являются тензорными полями Киллинга ранга k относительно связности, ассоциированной с системой (1), т.е. удовлетворяют условию

$$\nabla_{(j}K^{p1}_{i_1,i_2,\dots,i_k)} = 0\,,\;\; \nabla_{(j}K^{p2}{}_{i_1,i_2,\dots,i_k)} = 0\,. \qquad (5)$$

Кроме того, если s=p–1, то выполнены равенства

$$Q^{i_1}K^{p1}{}_{i_1} = Q^{i_1}K^{p2}{}_{i_1} = 0. \qquad (6)$$

Доказательство. Проведем доказательство для первого равенства (4). Из (2) получим $\nabla_k S_j + [S_j, P_k] = D_{jk}$, где $D_{(jk)} = 0$. С учетом этого и (3) имеем равенства

$$\nabla_j K^{p1}{}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} =$$
$$= sf([(P-S)_j, M], \underbrace{M, M, \ldots, M}_{s-1}, S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}) +$$
$$+ f(\underbrace{M, M, \ldots, M}_{s}, \nabla_j S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}) +$$
$$+ f(\underbrace{M, M, \ldots, M,}_{s} \ S_{i_1}, \nabla_j S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}) + \ldots +$$
$$+ f(\underbrace{M, M, \ldots, M,}_{s} \ S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, \nabla_j S_{i_k}) =$$
$$= sf([(P-S)_j, M], \underbrace{M, M, \ldots, M}_{s-1}, S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}) +$$
$$+ f(\underbrace{M, M, \ldots, M}_{s}, [P_j, S_{i_1}] + D_{ji_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}) + \ldots +$$
$$+ f(\underbrace{M, M, \ldots, M}_{s}, S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, [P_j, S_{i_k}] + D_{ji_k}) =$$
$$= -sf([S_j, M], \underbrace{M, M, \ldots, M}_{s-1}, S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}) +$$
$$+ f(\underbrace{M, M, \ldots, M}_{s}, D_{ji_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}) + \ldots +$$
$$+ f(\underbrace{M, M, \ldots, M}_{s}, S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, D_{ji_k}).$$

Окончательно, симметрируя последнее равенство по всем индексам, получим

$$\nabla_{(j} K^{p1}_{i_1,i_2,\ldots,i_k)} =$$
$$= -sf([S_{(j}, M], \underbrace{M, M, \ldots, M}_{s-1}, S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k)}) =$$
$$= f(M, \underbrace{M, M, \ldots, M}_{s-1}, [S_{(j} S_{i_1}], S_{i_2}, \ldots, S_{i_k)}) + \ldots +$$
$$+ f(M, \underbrace{M, M, \ldots, M}_{s-1}, S_{(i_1}, S_{i_2}, \ldots, [S_j S_{i_k)}]) = 0.$$

Таким образом, равенство (5) доказано.

Для проверки условия (6) заметим, что

$$Q^{i_1} K^{p1}{}_{i_1} = f(\underbrace{M, M, \ldots, M}_{s=p-1}, S_{i_1}) Q^{i_1} =$$
$$= f(\underbrace{M, M, \ldots, M}_{s=p-1}, S_{i_1} Q^{i_1}) =$$
$$= f(\underbrace{M, M, \ldots, M}_{s=p-1}, \frac{1}{2}[M, N]) = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что, если формулы (3) заменить на $M,_i = [(P_i - L_i^{\ j} S_j), M]$ (L – произвольная матрица), то и в этом случае равенства (5) остаются верными.

Следствие 1. Пусть связность, ассоциированная с системой (1), симметрична, и система (1) допускает представление Лакса. Тогда формы

$$\omega_1 = K^{p1}{}_i (U_x^{\ i} dx - U_y^{\ i} dy),$$
$$\omega_2 = K^{p2}{}_i (U_x^{\ i} dx - U_y^{\ i} dy) \qquad (7)$$

являются интегралами системы (1).

Доказательство. Дифференцируя форму ω_1 и учитывая уравнения (1), получим

$$d\omega_1 = (\nabla_j K^{p1}{}_i + \nabla_i K^{p1}{}_j + 2K^{p1}{}_k \Gamma^k_{[ij]}) U_x^i U_y^j dy \Lambda dx =$$
$$= \nabla_{(j} K^{p1}_{i)} U_x^i U_y^j dy \Lambda dx = 0.$$

Следствие 2. Пусть связность, ассоциированная с системой (1), симметрична и $Q^i \neq 0$ при некотором i. Пусть, кроме того, система допускает представление Лакса со значениями в компактной алгебре Ли g, причем размерность n системы (1) и размерность алгебры Ли g удовлетворяют условию $n \le \dim g \le n+1$. Тогда система (1) допускает ненулевой интеграл вида (7), где K_i – функции от U^j.

Доказательство. Покажем, что в этом случае тензор K_i, построенный по метрике Киллинга, является ненулевым. Действительно, в противном случае $(M, S_i) = 0$, $(N, S_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Таким образом, M и N ортогональны линейной оболочке $\left\langle S_i, i = \overline{1,n} \right\rangle$ и неколлинеарны в силу условия $Q^i \neq 0$, что противоречит ограничениям на $\dim g$.

Следствие 3. Пусть выполнены условия следствия 2 и система (1) является системой уравнений Эйлера–Лагранжа для лагранжиана $L = g_{ij} U_x^i U_y^j + Q$, где $g_{[ij]} = 0$, g_{ij}, Q – функции от переменных $U^1, \ldots, U^n$. Тогда система (1) допускает по крайней мере одну точечную симметрию вида $V = \varphi^i \partial_{U^i}$, $\varphi^i = g^{ij} K_j$.

Доказательство получается применением теоремы Нетер к закону сохранения (7).

Пример 1. Рассмотрим систему ПЛР (Полмайер–Лунд–Редже) [2]

$$U_{xy}^1 + \frac{(U_x^1 U_y^2 + U_x^2 U_y^1)}{\sin U^2} = 0,$$
$$U_{xy}^2 - \frac{U_x^1 U_y^1 \sin U^2}{(1 + \cos U^2)^2} - p \sin U^2 = 0,$$

которая, как известно (см., например, [2]), допускает представление Лакса со значениями в алгебре so(3) следующего вида:

$$d\Phi = \Phi \Lambda \Phi,$$
$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \Phi^3 & -\Phi^2 \\ -\Phi^3 & 0 & \Phi^1 \\ \Phi^2 & -\Phi^1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\Phi^1 = U_x^2 dx, \quad \Phi^2 = \mathrm{tg}\frac{U^2}{2} U_x^1 dx + \frac{1}{\lambda} \sin U^2 dy,$$
$$\Phi^3 = \left(\lambda p - \frac{\cos U^2}{2\cos^2(U^2/2)} U_x^1 \right) dx -$$
$$- \left(\frac{1}{\lambda} \cos U^2 + \frac{1}{2\cos^2(U^2/2)} U_y^1 \right) dy.$$

Кроме того, система ПЛР является системой Эйлера для лагранжиана

$$L = \mathrm{tg}^2 \frac{U^2}{2} U_x^1 U_y^2 + U_x^2 U_y^2 + \cos U^2 .$$

Найдем симметрии системы ПЛР, используя следствие 3.

Имеем равенства

$$S_1^1 = 0,\ S_2^1 = -\frac{1}{2},\ S_1^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{U^2}{2},$$

$$S_2^2 = 0,\ S_1^3 = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\frac{U^2}{2},\ S_2^3 = 0.$$

Учитывая, что в данном базисе метрика Киллинга пропорциональна $\delta_{[ij]}$, получим $K_i^1 = (S_i, M) = (\mathrm{tg}^2\frac{U^2}{2}, 0)$. Отсюда находим, что $V = \partial_{U^1}$ – симметрия. Второй тензор $K_i^2 = (S_i, N)$ оказывается пропорциональным и потому не приводит к новой симметрии. Непосредственные вычисления показывают, что V является единственной симметрией системы ПЛР вида $V = \varphi^i \partial_{U^i}$, $\varphi^i = \varphi^i(U^1, U^2)$. Таким образом, в данном случае все симметрии указанного вида можно получить с помощью следствия 3.

Замечание 3. Далее окажется полезным понятие характеристического элемента или характеристической матрицы $\widetilde{S}_i$ представления Лакса [3], [4]. Для данного случая представления Лакса системы (1) $\widetilde{S}_i$ можно определить из равенства

$$\widetilde{A}_y - \widetilde{B}_x - [\widetilde{A}, \widetilde{B}] = \widetilde{S}_i\ \Delta^i, \qquad (8)$$

где $\Delta^i = U_{xy}^i + \Gamma_{jk}^i U_x^j U_y^k + Q^i$.

Замечание 4. Спектральный параметр в представлении Лакса системы (1) можно получить заменой $x \to \lambda x, y \to \frac{1}{\lambda} y$. Тогда M и N с точностью до пропорциональности определяются производными $\partial\widetilde{A}/\partial\lambda$, $\partial\widetilde{B}/\partial\lambda$.

Теорема 2. Пусть система (1), ассоциированная связность которой имеет нулевое кручение, допускает представление Лакса (8) со значениями в алгебре *g*. Тогда для любого ad-инвариантного многочлена *f* на алгебре *g* функция

$$R = f(\underbrace{\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}, \ldots, \frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}}_{p-1}, \widetilde{A}_y) -$$

$$- f(\underbrace{\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}, \ldots, \frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}}_{p-1}, \widetilde{B}_x) - f(\underbrace{\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}, \ldots, \frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}}_{p-1}, [\widetilde{A}, \widetilde{B}])$$

удовлетворяет условию $R = \operatorname{div} P$, где P – некоторый закон сохранения. Другими словами, набор

$$f(\underbrace{\partial\widetilde{A}/\partial\lambda, \partial\widetilde{A}/\partial\lambda, \ldots, \partial\widetilde{A}/\partial\lambda}_{p-1}, \widetilde{S}_i\ ) \qquad (9)$$

является характеристикой некоторого закона сохранения.

Доказательство. Сначала заметим, что для представления Лакса, указанного в определении 1, характеристика $\widetilde{S}_i$ и функции S_i отличаются постоянным множителем. Теперь по следствию 1 получаем, что $K^{p1}{}_i = f(\underbrace{\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}, \ldots, \frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\lambda}}_{p-1}, \widetilde{S}_i\ )$ является характеристикой закона сохранения. Подставляя обе части равенства (9) в Ad-инвариантный полином степени p в качестве последнего аргумента и $\partial\widetilde{A}/\partial\lambda$ в качестве p первых аргументов, получим равенство $R = K^{p1}{}_i\ \Delta^i = \mathrm{Div}\, P$.

Замечание 5. Нетрудно видеть, что справедлив аналог теоремы 2, если заменить $\partial\widetilde{A}/\partial\lambda$ на $\partial\widetilde{B}/\partial\lambda$.

Замечание 6. Как видно из приведенных ниже примеров, набор (9) является характеристикой закона сохранения не только для систем кирального типа с нулевым кручением ассоциированной связности, но и для ряда эволюционных уравнений.

Пример 2. Как известно (см., например, [5]), уравнение Кортевега–де Вриза допускает представление Лакса вида

$$L_t - A_x - [A, L] = i(U_t - 6UU_x + U_{xxx})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где

$$L = i\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & U \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda\begin{pmatrix} -U & -iU_x \\ 0 & U \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} U_X & iU_{xx} + 2iU^2 \\ 2iU & -U_x \end{pmatrix}.$$

Отсюда характеристика $\widetilde{S} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Непосредственные вычисления показывают, что $(\partial A/\partial\lambda, \widetilde{S}) = 8\lambda i$. Теперь нетрудно видеть, что $(\partial A/\partial\lambda, \widetilde{S})(U_t - 6UU_x + U_{xxx}) = \mathrm{Div}\ P$, где $P = (U, -3U_x^2 + U_{xx})$.

Пример 3. Нелинейное уравнение Шредингера (система Абловица–Каупа–Ньюэла Сигура, также система Захарова–Шабата)

$$U_t - U_{xx} - 2U^2 V = 0,\ V_t + V_{xx} + 2UV^2 = 0$$

допускает представление Лакса со значениями в sl(2) следующего вида [6]:

$$L=\begin{pmatrix}\lambda & -V\\ U & -\lambda\end{pmatrix},\quad A=-2\lambda L-\begin{pmatrix}-UV & V_x\\ U_x & UV\end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что для характеристики представления Лакса в этом случае имеем равенство

$$\widetilde{S}_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \widetilde{S}_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial A}{\partial\lambda}=\begin{pmatrix}-4\lambda & -2V\\ 2U & 4\lambda\end{pmatrix}.$$

Поэтому $(\frac{\partial A}{\partial\lambda},\widetilde{S}_1)=-2V$, $(\frac{\partial A}{\partial\lambda},\widetilde{S}_2)=-2U$. Отсюда $R=-D_t(2UV)-D_x(UV_x-VU_x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Минобрнауки РФ (шифр заявки 1.1907.2011) и ФЦП «Кадры», № 14.В37.21.0361.

Список литературы

1. Баландин А.В., Кащеева О.Н. // Нелинейная динамика. 2007. Т. 3. С. 1–23.
2. Lund F., Regge T. //Phys. Rev. D. 1976. V. 14. № 6. P. 1524–1535.
3. Marvan M. //Differential Geometry and Its Applications. Proc. Conf. Opava, 1993. P. 103–122.
4. Sakovich S.Yu. //J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 2861–2869.
5. Новокшенов В.Ю. Введение в теорию солитонов. Ижевск: ИКИ, 2002. 96 С.
6. Шабат А.Б., Адлер В.Э., Марихин В.Г. и др. Энциклопедия интегрируемых систем. ver. 0039. М: ИТФ, 2009. 449 С.

CONSERVATION LAWS OF INTEGRABLE CHIRAL TYPE SYSTEMS

A.V. Balandin

A method to construct conservation laws of integrable chiral type systems directly from the Lax representation has been proposed.

Keywords: integrable systems, conservation laws, chiral type systems, nonlinear sigma-models, Lax representation.