УДК 517.988+517.977.8

ОБ АНАЛОГЕ ОБОБЩЕННОГО НЕРАВЕНСТВА ГЕЛЬДЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

А.В. Чернов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

chavnn@mail.ru

Поступила в редакцию 04.07.2013

Доказывается оценка нормы произведения функций в пространстве Орлича, востребованная при исследовании различных вопросов теории оптимизации распределенных систем.

Ключевые слова: пространство Орлича, обобщенное неравенство Гельдера.

Введение

Пусть $n,m,\ell,s\in\mathsf{N}$ – заданные числа, $\Pi\subset\mathsf{R}^n$ – измеримое (в смысле Лебега) ограниченное множество, X, Z, U – некоторые *банаховы идеальные пространства* (БИП) функций, измеримых на множестве Π; $\mathsf{X}\subset\mathsf{Z}$, $\mathsf{U}\subset\mathsf{Z}$; $\mathsf{D}\subset\mathsf{U}^s$ – выпуклое множество, $A:\mathsf{Z}^m\to\mathsf{X}^\ell$ – заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО). Как показывают примеры [1, 2, 3], управляемые *начально-краевые задачи* (НКЗ), связанные с полулинейными эволюционными уравнениями достаточно широкого класса, допускают представление в виде следующего функционально-операторного уравнения:

$$x(t)=\theta(t)+A[f(.,x(.),u(.))](t),\quad t\in\Pi,\quad x\in\mathsf{X}^\ell. \tag{1}$$

Здесь $u\in\mathsf{D}$ – управление, $\theta\in\mathsf{X}^\ell$ – заданный элемент, $f(t,y,u):\Pi\times\mathsf{R}^\ell\times\mathsf{R}^s\to\mathsf{R}^m$ – заданная функция, непрерывно дифференцируемая по переменным $y\in\mathsf{R}^\ell$, $u\in\mathsf{R}^s$, и вместе с производными измеримая по $t\in\Pi$, и непрерывная по $\{y;u\}\in\mathsf{R}^\ell\times\mathsf{R}^s$, и такая, что:

F) для всех $y\in\mathsf{X}^\ell$, $u\in\mathsf{U}^s$ суперпозиция $f(.,y,u)$ принадлежит пространству Z^m.

В каждом из упомянутых выше примеров в качестве пространств X, Z выступали лебеговы пространства. При этом теория в [2, 3] развивалась для банаховых идеальных пространств в предположении, что выполняется следующее условие.

S) Существуют БИП Z_X и числа $K_X>0$ и $\alpha_X>0$, такие, что для всех $x\in\mathsf{X}$, $y\in Z_X$ имеем $yx\in\mathsf{Z}$, и справедливо неравенство: $\|yx\|_{\mathsf{Z}}\le K_X\cdot\|y\|_{Z_X}^{\alpha_X}\cdot\|x\|_{\mathsf{X}}$.

Выбор лебеговых пространств был обусловлен следующими обстоятельствами.

Во-первых, для лебеговых пространств условие **S**) выполняется. А именно, пользуясь неравенством Гельдера, нетрудно показать, что если, например, $\mathsf{Z}=L_p(\Pi)$, $\mathsf{X}=L_q(\Pi)$, $q\ge p\ge 1$, то условие **S**) выполнено при $Z_X=L_\sigma(\Pi)$, $K_X=\alpha_X=1$, где $1/q+1/\sigma=1/p$ (при $q=p$, соответственно, $\sigma=\infty$). В связи с этим следующее неравенство мы будем именовать *обобщенным неравенством Гельдера:*

$$\left(\int_\Pi |x(t)y(t)|^p dt\right)^{1/p}\le\left(\int_\Pi |x(t)|^q dt\right)^{1/q}\left(\int_\Pi |y(t)|^\sigma dt\right)^{1/\sigma}.$$

В частности, при $p=1$ данное неравенство обращается в обычное неравенство Гельдера (для интегралов). Здесь сразу следует оговориться, что существуют и другие обобщения неравенства Гельдера, см., например, [4, § 6.9], но их мы не имеем в виду. Таким образом, в соответствии с принятой нами терминологией, свойство **S**) (если оно выполняется для данных БИП) можно понимать как аналог обобщенного неравенства Гельдера.

Во-вторых, в случае, когда для решения НКЗ, связанной с линейным аналогом исследуемого уравнения в частных производных, установлено некоторое энергетическое неравенство (а оно, как правило, записывается через нормы соболевских пространств), подходящая теорема вложения Соболева как раз и позволяет свести НКЗ для полулинейного эволюционного уравнения к уравнению (1) в лебеговом пространстве.

В связи с указанными двумя обстоятельствами отметим следующее.

Теоремы вложения Соболева предполагают соблюдение некоторых соотношений между параметрами гладкости и суммируемости и определенными геометрическими свойствами области $\Pi \subset \mathsf{R}^n$. Первоначально это было условие звездности (или условие конуса), см. [5]. Позднее доказывались различные обобщения, см. обзор в [6]. Вместе с тем, возможны ситуации, когда геометрическая структура области Π не позволяет установить вложение пространства Соболева в какое бы то ни было лебегово пространство, а вложение в пространство Орлича может быть установлено, см., например, [7, 8]. Здесь вполне закономерно возникает вопрос: выполняется ли условие **S**) для пространств Орлича?

В данной статье дается утвердительный ответ на этот вопрос. А именно, пусть $\mathsf{X} = L_{M_X}$, $\mathsf{Z} = L_{M_Z}$ – пространства Орлича (см. [9], § IV.3), причем существует N-функция $M_{\hat{X}}(.)$, такая, что

$$M_Z(2M_{\hat{X}}(.)) = M_X(.). \tag{2}$$

Тогда функция

$$M_Y(.) = M_Z(2M^*_{\hat{X}}(.)) \tag{3}$$

будет, очевидно, N-функцией. Соответственно, определено пространство Орлича $\mathsf{Y} = L_{M_Y}$. Мы доказываем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. При сделанных предположениях и $\mathsf{X} = L_{M_X}$, $\mathsf{Z} = L_{M_Z}$ условие **S**) выполняется с $Z_X = \mathsf{Y} = L_{M_Y}$, $K_X = 2$ и $\alpha_X = 1$.

Необходимые сведения

Для удобства читателя напомним кратко определения N-функции и пространства Орлича функций, измеримых на множестве Π [9, IV.3].

Заданная на $(-\infty,\infty)$ четная выпуклая положительная при $\tau \neq 0$ непрерывная функция $M(\tau)$ называется N-функцией, если

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{M(\tau)}{\tau} = 0, \quad \lim_{\tau\to +\infty}\frac{M(\tau)}{\tau} = +\infty.$$

Для каждой N-функции равенством

$$M^*(\tau) = \sup_{-\infty<\xi<\infty}(\xi\tau - M(\xi))$$

определяется *дополнительная* N-функция.

Справедливы следующие свойства.

$\mathbf{N}_1$) N-функция $M(\tau)$ монотонно возрастает на $[0,+\infty)$ и $M(0) = 0$.

$\mathbf{N}_2$) Дополнительная N-функция $M^*(\tau)$ тоже является N-функцией, причем $M^{**} = (M^*)^* = M$.

$\mathbf{N}_3$) Для любых $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ имеет место *неравенство Юнга* $|\tau\xi| \le M(\tau) + M^*(\xi)$.

Пусть $M(\tau)$ – заданная N-функция. *Пространством Орлича* $L_M(\Pi)$ называется совокупность всех функций $x(t)$, измеримых на множестве Π, и таких, что найдется число $\lambda > 0$ (зависящее от x), для которого

$$\int_\Pi M(|x(t)|/\lambda)dt < \infty.$$

На пространстве Орлича вводятся следующие две эквивалентные нормы:

$$\|x\|_{L_M} = \sup\left\{\int_\Pi |x(t)y(t)|dt : \int_\Pi M^*(y(t))dt \le 1\right\},$$

$$\|x\|'_{L_M} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Pi M(|x(t)|/\lambda)dt \le 1\right\}.$$

При этом для любого $x \in L_M$ справедливы оценки

$$\|x\|_{L_M} \le 2\|x\|'_{L_M}, \quad \|x\|'_{L_M} \le \|x\|_{L_M}. \tag{4}$$

Как показано в [9, IV.3, теорема 7], пространство Орлича L_M (как с нормой $\|.\|_{L_M}$, так и с нормой $\|.\|'_{L_M}$) является банаховым фундаментальным пространством (а следовательно, БИП) с условиями (B) и (C) (по терминологии [9]).

Доказательство основного утверждения

Справедливость теоремы 1 вытекает из следующих трех лемм.

Лемма 1. При сделанных предположениях функция (3) является N-функцией.

Доказательство. Согласно свойству $\mathbf{N}_2$), функция $M^*_{\hat{X}}(.)$ является N-функцией. Тогда четность, непрерывность и положительность (всюду, кроме нуля) функции (3) очевидны. Исследуем предельные соотношения:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{M_Y(\tau)}{\tau} = 2\lim_{\tau\to 0}\frac{M_Z(2M^*_{\hat{X}}(\tau))}{2M^*_{\hat{X}}(\tau)}\frac{M^*_{\hat{X}}(\tau)}{\tau} = 0;$$

$$\lim_{\tau\to +\infty}\frac{M_Y(\tau)}{\tau} = 2\lim_{\tau\to +\infty}\frac{M_Z(2M^*_{\hat{X}}(\tau))}{2M^*_{\hat{X}}(\tau)}\frac{M^*_{\hat{X}}(\tau)}{\tau} = +\infty.$$

Проверим, наконец, выпуклость функции (3). Для произвольных $\tau, \xi \in \mathsf{R}$ и $\lambda \in [0;1]$ оценим:

$$M_Y(\lambda\tau + (1-\lambda)\xi) = M_Z(2M^*_{\hat{X}}(\lambda\tau + (1-\lambda)\xi)).$$

В силу выпуклости N-функции $M^*_{\hat{X}}(.)$ имеем

$$M^*_{\hat{X}}(\lambda\tau+(1-\lambda)\xi)\le\lambda M^*_{\hat{X}}(\tau)+(1-\lambda)M^*_{\hat{X}}(\xi),$$

причем все значения здесь неотрицательны. Тогда, пользуясь свойством $\mathbf{N}_1$), а также выпуклостью N-функции M_Z, можем оценить

$$M_Y(\lambda\tau+(1-\lambda)\xi)\le$$
$$\le M_Z(2\lambda M^*_{\hat{X}}(\tau)+2(1-\lambda)M^*_{\hat{X}}(\xi))\le$$
$$\le\lambda M_Z(2M^*_{\hat{X}}(\tau))+(1-\lambda)M_Z(2M^*_{\hat{X}}(\xi))=$$
$$=\lambda M_Y(\tau)+(1-\lambda)M_Y(\xi).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. При сделанных предположениях имеем: $xy\in L_{M_Z}$ для всех $x\in L_{M_X}$, $y\in L_{M_Y}$.

Доказательство. Выберем произвольно $x\in L_{M_X}$, $y\in L_{M_Y}$ и $z\in L_{M^*_Z}$, такое, что

$$\int\limits_{\Pi}M^*_Z(|z(t)|)dt\le 1.$$

По определению пространств L_{M_X}, L_{M_Y} найдутся числа λ_x, $\lambda_y>0$, при которых

$$\int\limits_{\Pi}M_X\left(\frac{|x(t)|}{\lambda_x}\right)dt<\infty,\quad \int\limits_{\Pi}M_Y\left(\frac{|y(t)|}{\lambda_y}\right)dt<\infty.$$

Пользуясь свойствами $\mathbf{N}_3$) и $\mathbf{N}_1$), оценим:

$$\int\limits_{\Pi}|x(t)y(t)z(t)|dt=\lambda_x\lambda_y\int\limits_{\Pi}\frac{|x(t)|}{\lambda_x}\frac{|y(t)|}{\lambda_y}|z(t)|dt\le$$
$$\le\lambda_x\lambda_y\left(\int\limits_{\Pi}M_Z\left(\frac{|x(t)|}{\lambda_x}\frac{|y(t)|}{\lambda_y}\right)dt+\int\limits_{\Pi}M^*_Z(|z(t)|)dt\right)\le$$
$$\le\lambda_x\lambda_y\left(\int\limits_{\Pi}M_Z\left(\frac{1}{2}2M_{\hat{X}}\left(\frac{|x(t)|}{\lambda_x}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}2M^*_{\hat{X}}\left(\frac{|y(t)|}{\lambda_y}\right)\right)dt+1\right)\le$$
$$\le\lambda_x\lambda_y\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi}M_Z\left(2M_{\hat{X}}\left(\frac{|x|}{\lambda_x}\right)\right)dt+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi}M_Z\left(2M^*_{\hat{X}}\left(\frac{|y|}{\lambda_y}\right)\right)dt+1\right).$$

Таким образом, в силу (2) и (3)

$$\int\limits_{\Pi}|x(t)y(t)z(t)|dt\le$$
$$\le\frac{\lambda_x\lambda_y}{2}\left(\int\limits_{\Pi}M_X\left(\frac{|x|}{\lambda_x}\right)dt+\int\limits_{\Pi}M_Y\left(\frac{|y|}{\lambda_y}\right)dt+2\right)<\infty.$$

Отсюда

$$\|xy\|_{L_{M_Z}}=\sup\left\{\int\limits_{\Pi}|x(t)y(t)z(t)|dt:\right.$$
$$\left.\int\limits_{\Pi}M^*_Z(|z(t)|)dt\le 1\right\}<\infty,$$

следовательно, $xy\in L_{M_Z}$. Лемма доказана.

Пример. Пусть $q>p$, $\mathsf{X}=L_q(\Pi)$, $\mathsf{Z}=L_p(\Pi)$. Нетрудно убедиться, что функции $M_X(\tau)=|\tau|^q$, $M_Z(\tau)=|\tau|^p$ являются N-функциями. Поэтому указанные пространства можно понимать как пространства Орлича $\mathsf{X}=L_{M_X}$, $\mathsf{Z}=L_{M_Z}$. Функция $M_Z^{-1}(M_X(\tau))=|\tau|^{q/p}$ тоже является N-функцией, поскольку $q/p>1$. В таком случае и функция $M_{\hat{X}}(\tau)=\frac{1}{2}|\tau|^{q/p}$, получаемая из условия (2), тоже является N-функцией. Дополнительная N-функция при $\tau>0$

$$M^*_{\hat{X}}(\tau)=\sup_{\xi\in\mathrm{R}}\left(\tau\xi-\frac{1}{2}|\xi|^{q/p}\right)=\sup_{\xi>0}\left(\tau\xi-\frac{1}{2}\xi^{q/p}\right).$$

Вычисляя производную и приравнивая ее к нулю, находим точку максимума:

$$\tau-\frac{q}{2p}\xi^{(q/p)-1}=0\;\Rightarrow\;\xi^{(q-p)/p}=\frac{2p}{q}\tau\;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\;\xi=\xi(\tau)=\left(\frac{2p\tau}{q}\right)^{p/(q-p)}.$$

Соответственно

$$M^*_{\hat{X}}(\tau)=\xi(\tau)\left(\tau-\frac{1}{2}\xi(\tau)^{(q-p)/p}\right)=$$
$$=\frac{q-p}{p}\xi(\tau)\tau=C(p,q)\tau^{q/(q-p)},$$

где

$$C(p,q)=\frac{q-p}{p}\left(\frac{2p}{q}\right)^{p/(q-p)}>0.$$

При произвольном $\tau\in\mathbb{R}$ функция $M^*_{\hat{X}}(\tau)=C(p,q)|\tau|^{q/(q-p)}$. Таким образом,

$$M_Y(\tau)=M_Z(2M^*_{\hat{X}}(\tau))=$$
$$=2^pC^p(p,q)|\tau|^{pq/(q-p)}=C_1(p,q)|\tau|^{\sigma},$$

где $C_1(p,q)>0$, $\sigma=\frac{pq}{q-p}$. Поэтому с точностью до эквивалентной нормы можем считать, что $\mathsf{Y}=L_{M_Y}=L_{\sigma}(\Pi)$.

Лемма 3. При сделанных предположениях для любых $x \in L_{M_X}$ и $y \in L_{M_Y}$ имеем оценку: $\|xy\|_{L_{M_Z}} \le 2\|x\|_{L_{M_X}} \|y\|_{L_{M_y}}$.

Доказательство. Выберем произвольно $x \in L_{M_X}$, $y \in L_{M_Y}$ и $z \in L_{M_Z^*}$, такое, что

$$\int_\Pi M_Z^*(|z(t)|)dt \le 1.$$

По определению пространства L_{M_X} найдется число $\lambda_x > 0$, при котором

$$\int_\Pi M_X\left(\frac{|x(t)|}{\lambda_x}\right)dt < \infty.$$

Выберем произвольно $\mu \ge 0$ и пользуясь выпуклостью *N*-функции M_X, оценим:

$$\int_\Pi M_X\left(\frac{|x(t)|}{\lambda_x+\mu}\right)dt = \int_\Pi M_X\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\mu}\frac{|x|}{\lambda_x} + \frac{\mu}{\lambda_x+\mu}0\right)dt \le$$

$$\le \frac{\lambda_x}{\lambda_x+\mu}\int_\Pi M_X\left(\frac{|x(t)|}{\lambda_x}\right)dt + \frac{\mu}{\lambda_x+\mu}\int_\Pi M_X(0)dt,$$

где согласно свойству $\mathbf{N}_1$) $M_X(0)=0$. Поскольку число $\mu \ge 0$ можно взять сколь угодно большим, то ясно, что найдется число $\lambda_1 = \lambda_x + \mu > 0$, при котором

$$\int_\Pi M_X\left(\frac{|x(t)|}{\lambda_1}\right)dt \le 1. \tag{5}$$

Аналогично, найдется число $\lambda_2 > 0$, при котором

$$\int_\Pi M_Y\left(\frac{|y(t)|}{\lambda_2}\right)dt \le 1. \tag{6}$$

Далее, повторяя практически дословно рассуждения из доказательства леммы 2, приходим к оценке

$$\int_\Pi |x(t)y(t)z(t)|dt \le$$

$$\le \frac{\lambda_1\lambda_2}{2}\left(\int_\Pi M_X\left(\frac{|x|}{\lambda_1}\right)dt + \int_\Pi M_Y\left(\frac{|y|}{\lambda_2}\right)dt + 2\right),$$

откуда

$$\int_\Pi |x(t)y(t)z(t)|dt \le 2\lambda_1\lambda_2. \tag{7}$$

Оценка (7) справедлива для любых $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, удовлетворяющих условиям (5) и (6). Согласно определению нормы

$$\|x\|'_{L_{M_X}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Pi M_X\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right)dt \le 1\right\}$$

найдется убывающая последовательность $\lambda_1^{(n)} \to \|x\|'_{L_{M_X}}$ и такая, что имеет место (5) при $\lambda_1 = \lambda_1^{(n)}$. Аналогичным образом, найдется убывающая последовательность $\lambda_2^{(n)} \to \|y\|'_{L_{M_Y}}$ и такая, что имеет место (6) при $\lambda_2 = \lambda_2^{(n)}$. По доказанному,

$$\int_\Pi |x(t)y(t)z(t)|dt \le 2\lambda_1^{(n)}\lambda_2^{(n)}. \tag{8}$$

Переходя в (8) к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$\int_\Pi |x(t)y(t)z(t)|dt \le 2\|x\|'_{L_{M_X}}\|y\|'_{L_{M_y}}.$$

Отсюда в соответствии с оценкой (4) заключаем, что

$$\int_\Pi |x(t)y(t)z(t)|dt \le 2\|x\|_{L_{M_X}}\|y\|_{L_{M_y}}.$$

В силу произвольности выбора z и определения нормы

$$\|xy\|_{L_{M_Z}} = \sup\left\{\int_\Pi |x(t)y(t)z(t)|dt : \int_\Pi M_Z^*(|z(t)|)dt \le 1\right\}$$

окончательно получаем

$$\|xy\|_{L_{M_Z}} \le 2\|x\|_{L_{M_X}}\|y\|_{L_{M_y}}.$$

Лемма доказана.

Об аналоге неравенства Гельдера

Неравенство из формулировки теоремы 1 можно понимать как аналог обобщенного неравенства Гельдера. Далее для полноты изложения докажем аналог собственно неравенства Гельдера.

Теорема 2. Пусть $M(.)$ – любая *N*-функция. Тогда для всех $x \in L_M$, $y \in L_{M^*}$ справедлива оценка:

$$\int_\Pi |x(t)y(t)|dt \le \|x\|_{L_M}\|y\|'_{L_{M^*}} \le \|x\|_{L_M}\|y\|_{L_{M^*}}. \tag{9}$$

Доказательство. В случае $y=0$ неравенство (9) выполняется очевидным образом. Предположим, что $\|y\|'_{L_{M^*}} \ne 0$. По определению нормы $\|.\|'_{L_{M^*}}$ найдется убывающая последовательность $\lambda_n \to \|y\|'_{L_{M^*}}$ и такая, что

$$\int_\Pi M^*\left(\frac{|y(t)|}{\lambda_n}\right)dt \le 1.$$

Обозначим $y_n = |y|/\lambda_n$. Тогда по определению нормы

$$\|x\|_{L_M} = \sup\left\{\int_\Pi |x(t)y(t)|dt : \int_\Pi M^*(|y(t)|)dt \le 1\right\}$$

имеем:

$$\int\limits_{\Pi} |x(t)y(t)|dt = \lambda_n \int\limits_{\Pi} |x(t)y_n(t)|dt \le \lambda_n \|x\|_{L_M}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и учитывая оценку (4), получаем (9). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках гос. задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными вузами (шифр заявки 1.1907.2011).

Список литературы

1. Чернов А.В. О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.
2. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
3. Чернов А.В. О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629.
4. Харди Г.Г., Литлвуд Дж.И., Полиа Г. Неравенства. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 456 с.
5. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
6. Бесов О.В. Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Мат. сборник. 2001. Т. 192. № 3. С. 3–26.
7. Похожаев С.И. О теореме вложения Соболева в случае $pl = n$ // Докл. науч.-техн. конф. МЭИ. Секц. Мат. М.: Изд-во МЭИ, 1965. С.158–170.
8. Трушин Б.В. Вложение пространства Соболева в пространства Орлича и BMO со степенными весами // Труды матем. института им. В.А. Стеклова. 2003. Т. 243. С. 334–345.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

ON AN ANALOG OF GENERALIZED HÖLDER INEQUALITY IN ORLICZ SPACES

A.V. Chernov

An estimate of the product norm of two functions in an Orlicz space is proved which is required to study a number of problems in the optimization theory for distributed systems.

Keywords: Orlicz space, generalized Hölder inequality.