УДК 512.541.7

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 1 СВОИМИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ (ПОЛУГРУППАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ) И ГРУППАМИ ГОМОМОРФИЗМОВ

Т.А. Пушкова

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

bta17@mail.ru

Поступила в редакцию 07.03.2013

Пусть C – абелева группа. Класс X абелевых групп назовем ${}_cEH$-классом (${}_cE^{\bullet}H$-классом), если для любых групп $A, B \in X$ из изоморфизмов $E(A) \cong E(B)$ ($E^{\bullet}(A) \cong E^{\bullet}(B)$) и $Hom(C, A) \cong Hom(C, B)$ следует изоморфизм $A \cong B$. Исследуются условия, при которых класс абелевых групп без кручения ранга 1 является ${}_cEH$-классом (${}_cE^{\bullet}H$-классом), где C – вполне разложимая абелева группа без кручения.

Ключевые слова: вполне разложимая абелева группа без кручения, группа гомоморфизмов, кольцо эндоморфизмов, полугруппа эндоморфизмов, определяемость абелевых групп.

Хорошо известный результат Бэра [1] и Капланского [2] об определяемости периодических абелевых групп своим кольцом эндоморфизмов в классе периодических групп положил начало многочисленным исследованиям в этом направлении. Класс X абелевых групп называется E-классом, если для любых групп $A, B \in X$ из изоморфизма $E(A) \cong E(B)$ следует изоморфизм $A \cong B$. Заметим, что класс F всех абелевых групп без кручения не является E-классом [3]. Проблему определяемости абелевых групп кольцами эндоморфизмов рассматривали также А.М. Себельдин [4], Мэй [5]. Такой же вопрос, как для колец эндоморфизмов $E(A)$ группы A, стоит для его мультипликативной полугруппы $E^{\bullet}(A)$, называемой полугруппой эндоморфизмов группы A. Проблему определяемости абелевых групп их мультипликативными полугруппами рассматривали П. Пуусемп [6] и А.М. Себельдин [7]. В связи с вышеуказанным представляется естественным изучать вопросы определяемости абелевых групп своими кольцами и полугруппами эндоморфизмов вместе с дополнительным условием изоморфизма групп гомоморфизмов.

Пусть C – абелева группа. Класс X абелевых групп назовем ${}_cEH$-классом, если для любых групп $A, B \in X$ из изоморфизмов $E(A) \cong E(B)$ и $Hom(C, A) \cong Hom(C, B)$ следует изоморфизм $A \cong B$.

Класс X абелевых групп назовем ${}_cE^{\bullet}H$-классом, если для любых групп $A, B \in X$ из изоморфизмов $E^{\bullet}(A) \cong E^{\bullet}(B)$ и $Hom(C, A) \cong Hom(C, B)$ следует изоморфизм $A \cong B$.

В данной работе найдены необходимые и достаточные условия на вполне разложимую абелеву группу C без кручения, чтобы класс F_1 абелевых групп без кручения ранга 1 был ${}_cEH$-классом (${}_cE^{\bullet}H$-классом).

Введём следующие обозначения: $r(A)$ – ранг группы A; Ω – множество различных типов абелевых групп без кручения ранга 1; $\tau(A)$ – тип абелевой группы A без кручения ранга 1; $\tau(Q^{(p)})$ – тип из Ω, содержащий характеристику $(0,0,\ldots,0,\infty,0,..)$, в которой символ ∞ стоит на m-м месте, если $p = p_m$; $\Omega(A)$ – множество различных типов прямых слагаемых ранга 1 абелевой группы A без кручения; Ω_0 – множество всех типов из Ω, характеристики которых не содержат символов ∞; $\Omega_0(A)$ – множество всех типов из $\Omega(A)$, характеристики которых не содержат символов ∞; $\aleph_0$ – наименьший бесконечный кардинал; $|M|$ – мощность множества M.

Теорема 1. Пусть C – вполне разложимая абелева группа без кручения. Класс F_1 является ${}_c EH$-классом тогда и только тогда, когда группа C удовлетворяет одному из следующих условий:

1) C содержит прямое слагаемое, изоморфное Z;

2) $\tau(Z) \notin \Omega(C)$ и для любого типа $\tau_0 \in \Omega_0$, $\tau_0 \neq \tau(Z)$, найдется тип $\tau \in \Omega(C)$, такой, что $\tau \le \tau_0$.

Доказательство. Достаточность.

1) Пусть группа C удовлетворяет первому условию теоремы, то есть $C = Z \oplus \left(\bigoplus_{i \in I} C_i \right)$, где $r(C_i) = 1$. Из изоморфизма $Hom(C, A) \cong \cong Hom(C, B)$ и [8, теорема 43.1], получаем

$$A \oplus \left(\prod_{i \in I} Hom(C_i, A) \right) \cong$$
$$\cong B \oplus \left(\prod_{i \in I} Hom(C_i, B) \right).$$

Пусть $\tau(A) \neq \tau(B)$, тогда

$$\tau(A) \in \Omega\left(\prod_{i \in I} Hom(C_i, B) \right).$$

Значит, найдется $i \in I$, такой, что $\tau(A) = = \tau(Hom(C_i, B))$. Из [10, следствие 1] следует, что $\tau(A) \le \tau(B)$. Аналогичным образом доказывается, что $\tau(B) \le \tau(A)$. Тогда $\tau(A) = \tau(B)$. Противоречие.

2) Пусть группа $C = \bigoplus_{i \in I} C_i$, где $r(C_i) = 1$, удовлетворяет второму условию теоремы. Предположим, что существуют такие неизоморфные группы A, B из F_1, что $E(A) \cong E(B)$ и $Hom(C, A) \cong Hom(C, B)$. Согласно [8, теорема 43.1], получаем изоморфизм $\left(\prod_{i \in I} Hom(C_i, A) \right) \cong$ $\cong \left(\prod_{i \in I} Hom(C_i, B) \right)$. Пусть тип $\tau(A)$ группы A содержит характеристику $(..., \alpha_p, ..)$, тип $\tau(B)$ группы B содержит характеристику $(..., \beta_p, ...)$. Положим

$$P_B = \{p \in P : \beta_p > \alpha_p\},\ P_A = \{p \in P : \alpha_p > \beta_p\}.$$

Тогда из $E(A) \cong E(B)$ и $\tau(A) \neq \tau(B)$ следует $|P_B| = \aleph_0$ или $|P_A| = \aleph_0$. Пусть для определенности $|P_B| = \aleph_0$. Разобьем множество $P_B = P'_B \cup P''_B$ так, что $|P'_B| = |P''_B| = \aleph_0$. Рассмотрим тип τ, содержащий характеристику $(..., \gamma_p, ..)$, где $\gamma_p = 1$, если $p \in P'_B$, и $\gamma_p = 0$ в остальных случаях. Согласно условию теоремы, в $\Omega(C)$ найдется тип $\tau_1 \neq \tau(Z)$, такой, что $\tau_1 \le \tau$. Следовательно, в $\bigoplus_{i \in I} C_i$ найдется группа C_1 ранга 1, тип которой $\tau(C_1) = \tau_1$. Тогда по [9, теорема 1] $Hom(C_1, B) \neq 0$ и $\tau(Hom(C_1, B)) = \tau(B) - \tau_1 = = \bar{\tau}$, и $\bar{\tau}$ больше либо несравним с типом $\tau(A)$, так как содержит характеристику $(..., \overline{\beta_p}, ...)$, где для всех $p \in P''_1$: $\overline{\beta_p} = \beta_p > \alpha_p$. В то же время, для любой группы $C_i, i \in I$, имеем $\tau(Hom(C_i, A)) \le \tau(A)$ или $Hom(C_i, A) = 0$. Следовательно, в разложении группы $Hom(C, A)$ нет группы, изоморфной группе $Hom(C_1, B)$, что противоречит условию $Hom(C, A) \cong \cong Hom(C, B)$.

Необходимость будем доказывать от противного. Пусть $\tau(Z) \notin \Omega(C)$ и существует тип $\tau \neq \tau(Z)$, $\tau \in \Omega_0$, такой, что в $\Omega(C)$ нет типа меньше либо равного τ. Рассмотрим две неизоморфные группы A и B из F_1,

такие, что $A \cong Z$, а группа B имеет тип $\tau(B) = \tau$. Тогда $E(A) \cong E(B)$ и $Hom(C, A) \cong Hom(C, B) = 0$, но A и B не изоморфны. Противоречие.

Теорема 1 доказана.

Положим $P^* = \{p \in P : \tau(Q^{(p)}) \notin \Omega(C)\}$.

Теорема 2. Пусть C – вполне разложимая абелева группа без кручения. Класс F_1 является ${}_c E^{\bullet}H$-классом тогда и только тогда, когда группа C удовлетворяет одному из следующих условий:

1) C содержит прямое слагаемое, изоморфное Z;

2) а) $\tau(Z) \notin \Omega(C)$;

б) $|P^*| \le 1$;

в) для любого типа $\tau_0 \in \Omega_0$, $\tau_0 \neq \tau(Z)$, найдется тип $\tau \in \Omega(C)$, такой, что $\tau \le \tau_0$.

Доказательство.

Достаточность первого условия доказана в теореме 1.

Пусть группа C удовлетворяет второму условию теоремы. Предположим, что существуют такие неизоморфные группы A, B из F_1, что $E^{\bullet}(A) \cong E^{\bullet}(B)$ и $Hom(C, A) \cong Hom(C, B)$.

Пусть $(...,\alpha_p,..) \in \tau(A)$, $(...,\beta_p,..) \in \tau(B)$. Положим $P_B = \{p \in P : \beta_p > \alpha_p\}$, $P_A = \{p \in P : \alpha_p > \beta_p\}$. Поскольку $E^{\bullet}(A) \cong E^{\bullet}(B)$, то $|P_\infty(A)| = |P_\infty(B)|$, где $P_\infty(A) = \{p \in P / \alpha_p = \infty\}$, $P_\infty(B) = \{p \in P / \beta_p = \infty\}$. Тогда возможны два случая:

1) $P_\infty(A) = P_\infty(B)$. Тогда $|P_B| = \aleph_0$ или $|P_A| = \aleph_0$. Далее доказательство достаточности приведено в теореме 1.

2) $P_\infty(A) \neq P_\infty(B)$. Тогда, поскольку $|P_\infty(A)| = |P_\infty(B)| \neq 0$, то существует такое $p_1 \neq p_0$, что $p_1 \in P_\infty(B) \setminus P_\infty(A)$ или $p_1 \in P_\infty(A) \setminus P_\infty(B)$. Пусть для определенности $p_1 \in P_\infty(B) \setminus P_\infty(A)$. Согласно условию теоремы $\tau(Q^{(p_1)}) \in \Omega(C)$. Тогда по [9, теорема 1] в разложении группы $Hom(C,B)$ найдется группа типа $\tau(Hom(Q^{(p_1)},B)) = \tau(B) - \tau(Q^{(p_1)}) = \tau(B)$. Но в разложении группы $Hom(C,A)$ такой группы нет. Следовательно, группы $Hom(C,A)$ и $Hom(C,B)$ не изоморфны. Противоречие.

Значит, $A \cong B$.

Необходимость. Предположим, что группа C не удовлетворяет ни одному из условий. Тогда возможны два случая:

1) $\tau(Z) \notin \Omega(C)$ и $|P^*| > 1$. Тогда найдутся такие $p_0, p_1 \in P$, что $\tau(Q^{(p_0)}) \notin \Omega(C)$, $\tau(Q^{(p_1)}) \notin \Omega(C)$. Отсюда, положив $A = Q^{(p_0)}$, $B = Q^{(p_1)}$, имеем $Hom(C,A) \cong Hom(C,B) = 0$ и $E^{\bullet}(A) \cong E^{\bullet}(B)$, но группы A и B не изоморфны. Противоречие.

2) $\tau(Z) \notin \Omega(C)$, и существует тип $\tau \neq \tau(Z)$, $\tau \in \Omega_0$, такой, что в $\Omega(C)$ нет типа меньше либо равного τ. Рассмотрим две неизоморфные группы A и B из F_1, такие, что $A \cong Z$, а группа B имеет тип $\tau(B) = \tau$. Тогда $E^{\bullet}(A) \cong E^{\bullet}(B)$ и $Hom(C,A) \cong Hom(C,B) = 0$, но A и B не изоморфны. Противоречие.

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Baer R. Automorphism rings of primary Abelian operator groups // Ann. Math. 1943. V. 44. P. 192–227.
2. Kaplansky I. Some results on Abelian groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1952. V. 38. P. 538–540.
3. Мишина А.П. Абелевы группы // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ АН СССР. 1972. Т. 10. С. 5–45.
4. Себельдин А.М. Абелевы группы без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // В сб.: Абелевы группы и модули. Томск, 1979. С. 165–170.
5. May W. Endomorphism rings of mixed abelian group // Contemp. Math. 1989. V. 87. P. 61–74.
6. Пуусемп П. Об определяемости периодических абелевых групп своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех периодических абелевых групп // Изв. АН ЭстССР, Физ. Мат. 1980. Т. 29. № 3. С. 246–253.
7. Себельдин А.М. Определяемость векторных групп полугруппами эндоморфизмов// Алгебра и логика. 1994. Т. 33. № 4. С. 422–428.
8. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 1.
9. Себельдин А.М. Группы гомоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения// Изв. вузов. Математика. 1973. Т. 33. № 7. С. 77–84.

DEFINABILITY OF TORSION-FREE ABELIAN GROUPS OF RANK 1 BY THEIR ENDOMORPHISM RINGS (ENDOMORPHISM SEMIGROUPS) AND GROUPS OF HOMOMORPHISMS

T.A. Pushkova

Let C be an Abelian group. A class X of Abelian groups is called an ${}_C EH$-class (${}_C E^{\bullet} H$-class) if the relation $E(A) \cong E(B)$ ($E^{\bullet}(A) \cong E^{\bullet}(B)$) and $Hom(C,A) \cong Hom(C,B)$ implies $A \cong B$ for any groups $A, B \in X$. The paper studies the conditions under which a class of torsion-free Abelian groups of rank 1 is an ${}_C EH$-class (${}_C E^{\bullet} H$-class), where C is a completely decomposable torsion-free Abelian group.

Keywords: completely decomposable torsion-free Abelian group, group of homomorphisms, endomorphism ring, endomorphism semigroup, definability of Abelian groups.