

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 62-504.14:681.511.4

АНАЛИЗ ФОРМЫ УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ СИНХРОНИЗАЦИИ С ИМПУЛЬСНЫМ ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ПРИ ИДЕАЛЬНОМ АСТАТИЗМЕ ФИЛЬТРА

© 2013 г.

О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов

НИИ прикладной математики и кибернетики
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

olga.antonovskaja@yandex.ru

Поступила в редакцию 31.05.2013

Приводятся результаты качественного и численного анализа формы установившихся процессов в системе синхронизации с импульсным частотно-фазовым управлением.

Ключевые слова: синтезатор частоты, математическая модель, динамика системы, точечное отображение, неподвижная точка, устойчивость, кратный цикл.

Введение

В работах [1,2] было установлено, что исследование условий существования и устойчивости движений в математической модели (ММ) системы синхронизации с частотно-фазовым управлением при идеальном астатизме фильтра [3] сводится к изучению точечного отображения T , равному произведению периодических разрывных отображений T_+ и T_- , одномерный характер которых позволяет установить, что плоскость основных параметров системы разбивается на счетное число подобластей существования простых и кратных неподвижных точек отображения T , переходящих на границах существования циклов всевозможной сложности в движения, устойчивые по Пуассону [4]. Наличие кратных циклов обуславливает сложную форму глобально устойчивого процесса управления, что является определяющим при выборе параметров фильтра, гарантирующего заданную спектральную чистоту сигнала управления, и поэтому требует более детального рассмотрения.

В настоящей работе приводятся результаты качественного и численного анализа формы установившихся процессов в системе управления из работы [2]. Качественный анализ затрагивает вопросы определения свойств границ областей существования простых неподвижных точек и циклов первой сложности отображения

T как наиболее крупных по размерам и локализуемых в пространстве основных параметров расположение границ областей существования циклов более высокой сложности. Качественно-численная методика использована для определения характеристик движений, соответствующих циклам высокой сложности.

Простые неподвижные точки отображения T и соответствующая им динамика процессов

Согласно [2] особенностью процесса управления в рассматриваемой ММ является возможность осуществления изображающей точкой движения (ИТД) при определенных значениях параметров возвратных петлеобразных движений, описываемых по методу точечных отображений как преобразование сечений $C_{21} \rightarrow C_{12} \rightarrow C_{21}$ и $C_{22} \rightarrow C_{31} \rightarrow C_{22}$. Указанные виды петлеобразных движений связаны с особенностями алгоритма работы импульсного частотно-фазового детектора (ИЧФД), соответствуют досчету фазы приходящих на входы ИЧФД импульсов от опорного генератора (ОГ) и счетчика (С) числа колебаний управляемого генератора (УГ).

В [2] показано, что при $\alpha \geq 1$ петлеобразные движения могут совершаться только между сечениями C_{12} и C_{21} , в то время как при прохождении через сечения C_{31} и C_{22} их нет. Поэтому

при $\alpha \geq 1$ функцию последования (ФП) отображения T целесообразно определить как $T = T_-(m_2 = 0)T_+(m_1)$, т.е. представить в виде

$$\bar{\theta} = (g(-1)/g(+1))\theta_0 + g(-1)((1/\alpha) + (1/g(+1)))(2 + m_1) \quad (1)$$

$$(0 \leq \bar{\theta}, \theta_0 \leq 1, \alpha \geq 1),$$

где $\bar{\theta}$ и θ_0 суть предыдущее и последующее за ней значение координаты C при попадании ИТД в C_{12} ,

$$m_1 = \text{ceil}[(\alpha/g(+1))((2 - \theta_0) - 1) \times (1 - (\alpha/g(+1)))^{-1}], \quad (2)$$

а операция «ceil» округления до целого в сторону большего числа определяет количество возвратно-петлеобразных движений между C_{12} и C_{21} .

Область определения по θ_0 участка непрерывности ФП (1) с номером m_1 удовлетворяет неравенству

$$1 - (g(+1)/\alpha - 1)(1 + m_1) \leq \theta_0 \leq 1 - (g(+1)/\alpha - 1)m_1, \quad (3)$$

при этом

$$g(-1)/\alpha \leq \bar{\theta} \leq g(-1)(2/\alpha - 1/g(+1)). \quad (4)$$

Левая часть неравенств (3), (4) определяет положение левой (нижней) точки графика ФП (1), а правая часть – правой (верхней) точки графика. В интерпретации, эффективно используемой при изучении точечных отображений с помощью диаграммы Кёнигса–Ламерея [4], условием существования неподвижной точки (НТ) отображения T является пересечение участком непрерывности графика ФП (1) с номером m_1 биссектрисы $\bar{\theta} = \theta_0$. Попадания НТ отображения T на границы (3) определения ФП (1) задают границы существования НТ в пространстве параметров. Приравнивая левые и, соответственно, правые части неравенств (3), (4), находим, что при $\alpha \geq 1$ НТ отображения T существует, если $\underline{\alpha}_h(m_1) \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_h(m_1)$ («н» – непрерывный), где

$$\bar{\alpha}_h(m_1) = ((m_1 + 1)g(+1) + g(-1))/(m_1 + 2) \quad (5)$$

$$(m_1 = 1, 2, \dots),$$

$$\underline{\alpha}_h(m_1) = (m_1 g(+1) + 2g(-1))g(+1) \times ((m_1 + 1)g(+1) + g(-1))^{-1}.$$

В формулах (5) m_1 начинается с единицы, потому что при $m_1 = 0$ базовый участок непрерывности с $m_1 = 0$ при линейной функции $g(x)$ и $\alpha \geq 1$ лежит правее биссектрисы и только при $\alpha = 1$ на биссектрису попадает его нижний край, как это показано на верхнем графике рис. 1. При

$\alpha = 1 + 0$ биссектриса $\bar{\theta} = \theta_0$ попадает в место разрыва графика ФП (1) и при дальнейшем увеличении α остается в нем вплоть до достижения величины $\underline{\alpha}_h(m_1 = 1)$, после чего начинается пересечение биссектрисы с графиком участка непрерывности с номером $m_1 = 1$.

Поскольку частная производная по α от левой и правой частей неравенства (3) положительна, а от левой и правой частей неравенства (4) отрицательна, постольку при увеличении α график ФП (1) на плоскости $(\theta_0, \bar{\theta})$ не только спускается вниз, но и порождает со стороны $\theta_0 = 0$ новые интервалы непрерывности, сжимая, как гармошку, вправо остальные части графика, т.е. так, как это показано на нижнем графике ФП рис. 1, на котором биссектриса $\bar{\theta} = \theta_0$ пересекает участок непрерывности с номером $m_1 = 2$.

Полагая в (1) $\bar{\theta} = \theta_0 = \theta^*$, находим величину координаты θ в НТ:

$$\theta^* = (g(+1)/\alpha - 1)g(-1)(2 + m_1)/(g(+1) - g(-1)) \quad (6)$$

$$(\underline{\alpha}_h(m_1) \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_h(m_1), m_1 = 1, 2, \dots).$$

Нетрудно проверить, что на нижней границе диапазона существования НТ, т.е. при $\alpha = \underline{\alpha}_h(m_1)$

$$\theta^* = \theta^*(\underline{\alpha}_h(m_1)) = g(-1)(2 + m_1)(2g(-1) + m_1 g(+1))^{-1}, \quad (7)$$

и на верхней границе диапазона при $\alpha = \bar{\alpha}_h(m_1)$

$$\theta^* = \theta^*(\bar{\alpha}_h(m_1)) = g(-1)(2 + m_1)(g(+1)(1 + m_1) + g(-1))^{-1}. \quad (8)$$

Из (6) следует, что с увеличением α величина θ^* монотонно уменьшается от значения (7) до значения (8).

Подставляя в формулу ФП отображения T_+ [2] величину $\theta_0 = \theta^*$, находим момент (по модулю единица)

$$\tau^* = \tau^*(C_{21} \rightarrow C_{31}) = ((m_1 + 2)\alpha - m_1 g(+1) - 2g(-1))/(g(+1) - g(-1)) \quad (9)$$

$$(\underline{\alpha}_h(m_1) \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_h(m_1), m_1 = 1, 2, \dots)$$

перехода ИТД из сечения C_{21} в сечение C_{31} .

При произвольном значении m_1 , т.е. при $\underline{\alpha}_h(m_1) \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_h(m_1)$, осциллограмма $x(\tau)^*$ установившегося процесса с периодом $2 + m_1$ определяется выражением

$$x(\tau)^* = \begin{cases} +1, & 0 \leq \tau \leq m_1 + \tau^*(m_1), \\ -1, & m_1 + \tau^*(m_1) \leq \tau \leq 2 + m_1 \end{cases} \quad (10)$$

$$(\alpha > 1, m_1 = 1, 2, \dots).$$

Согласно (9) и (10) среднее во времени значение частоты выходного сигнала УГ равно

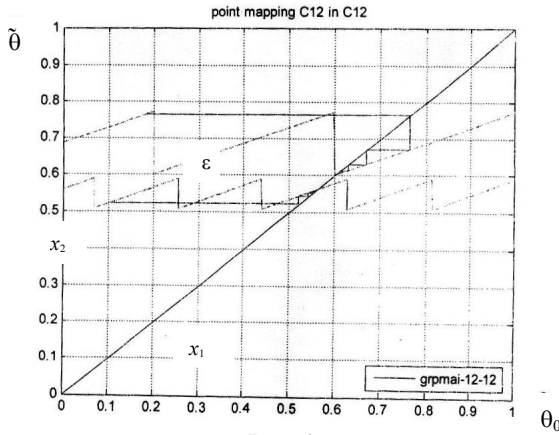


Рис. 1

$$\overline{g(x(\tau)^*)} = (g(+1)(m_1 + \tau^*(m_1)) + g(-1)(2 - \tau^*(m_1)))(2 + m_1)^{-1} = \alpha \quad (11)$$

и означает, что существование простой неподвижной точки отображения T при $\alpha > 1$ гарантирует установление величины средней частоты сигнала УГ, равной показателю счетчика.

При $\alpha < 1$ петлеобразные движения могут совершаться только между сечениями C_{31} и C_{22} , в то время как при прохождении через сечения C_{12} и C_{21} их нет. В этом случае ФП отображения T целесообразно определить как $T = T_+(m_1 = 0) \times T_-(m_2)$, т.е. представить в виде соотношения

$$\bar{\tau} = (g(-1)/g(+1))\tau_0 + (1/g(+1)) \times (\alpha - g(-1))(2 + m_2) \quad (12)$$

$(0 \leq \bar{\tau}, \tau_0 \leq 1, \alpha \leq 1)$,

где $\bar{\tau}$ и τ_0 суть начальное и последующее значение фазы появления ИТД в C_{31} , а

$$m_2 = \text{ceil}[(g(-1)/\alpha)(2 - \tau_0) - 1] \times (1 - g(-1)/\alpha)^{-1}, \quad (13)$$

соответствует количеству возвратно-петлеобразных движений ИТД между C_{31} и C_{22} .

Область определения по τ_0 участка непрерывности ФП (12) с номером m_2 удовлетворяет неравенству

$$1 - (\alpha/g(-1) - 1)(1 + m_2) \leq \tau_0 \leq 1 - (\alpha/g(-1) - 1)m_2, \quad (14)$$

и при этом

$$\alpha/g(+1) \leq \bar{\tau} \leq (1/g(+1))(2\alpha - g(-1)). \quad (15)$$

Приравнявая левые части и, соответственно, правые части неравенств (14), (15), находим, что НТ отображения T при $\alpha < 1$ существует, если $\underline{\alpha}_h(m_2) \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_h(m_2)$, где

$$\bar{\alpha}_h(m_2) = (g(-1) + g(+1)(m_2 + 1))g(-1) \times (2g(-1) + m_2g(+1))^{-1} \quad (16)$$

$(m_2 = 1, 2, \dots)$,

$$\underline{\alpha}_h(m_2) = (g(-1)g(+1)(2 + m_2)) \times ((m_2 + 1)g(+1) + g(-1))^{-1}.$$

Согласно (12) координата $\bar{\tau} = \tau_0 = \tau^*$ неподвижной точки определяется соотношением $\tau^* = (\alpha - g(-1))(2 + m_1)/(g(+1) - g(-1)) \quad (17)$

$$(\underline{\alpha}_h(m_2) \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_h(m_2), m_2 = 1, 2, \dots).$$

Нетрудно проверить, что при $\alpha = \underline{\alpha}_h(m_2)$ $\tau^* = \tau^*(\underline{\alpha}_h(m_2)) = g(-1)(2 + m_1) \times (g(-1) + (1 + m_2)g(+1))^{-1}, \quad (18)$

и на верхней границе диапазона при $\alpha = \bar{\alpha}_h(m_1)$ $\tau^* = \tau^*(\bar{\alpha}_h(m_2)) = g(-1)(2 + m_1) \times (2g(-1) + m_2g(+1))^{-1}. \quad (19)$

Поскольку, как и в случае $\alpha > 1$, при преобразовании сечений $C_{21} \rightarrow C_{12}$, $C_{31} \rightarrow C_{22}$, $C_{22} \rightarrow C_{12}$ имеет место импульс ОГ и вследствие этого осциллограммы движений привязаны к целочисленным значениям времени, постольку период движения, соответствующего существованию при $\alpha \leq 1$ неподвижной точки отображения T , равен $2 + m_2$.

Минимальный период движения при $m_2 = 0$ и линейной характеристике $g(x)$ вида

$$g(x) = 1 + Sx \quad (S > 0) \quad (20)$$

реализуется в диапазоне

$$1 - S^2 = \underline{\alpha}_h(m_2 = 0) \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_h(m_2 = 0) = 1. \quad (21)$$

Для участков непрерывности ФП (12) при $\alpha < 1$ и произвольном значении m_2 осциллограмма установившегося процесса определяется соотношением

$$x(\tau)^* = \begin{cases} +1, & 0 \leq \tau \leq \tau^*(m_2), \\ -1, & \tau^*(m_2) \leq \tau \leq 2 + m_2 \end{cases} \quad (22)$$

$(\alpha < 1, m_2 = 1, 2, \dots)$.

С учетом (22) находим, что

$$\overline{g(x(\tau)^*)} = ((g(+1)\tau^*(m_2) + g(-1)) \times (2 + m_2 - \tau^*(m_2)))(2 + m_2)^{-1} = \alpha, \quad (23)$$

т.е. параметр α , как и в случае $\alpha > 1$, выступает в роли управляющего параметра.

Необходимо отметить, что в диапазоне изменения α , определяемом неравенствами (21), период установившегося движения равен двум периодам сигнала ОГ, а значит, минимален и в целом при любых значениях $\alpha \geq 1$, поэтому минимальная частота составляющего ряда Фурье сигнала $x(\tau)^*$ максимальна и равна половине частоты сигнала ОГ. Но это означает, что диапазон изменения α , в котором требование к подавлению нежелательных спектральных составляющих минимально, при $g(x)$ вида (20)

определяется неравенством (21), т.е. располагается в области частот ниже частоты неуправляемого УГ.

Кратные циклы и их влияние на качество управления

Из проведенного исследования свойств ФП (1) вытекает, что при $1 < \bar{\alpha}_n(m_1) \leq \alpha \leq \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$ ($m_1 = 0, 1, 2, \dots$) биссектриса плоскости $(\theta_0, \bar{\theta})$ проходит через место разрыва между участками непрерывности с номерами m_1 (справа от биссектрисы) и $m_1 + 1$ (слева от биссектрисы), так что нижняя точка графика участка непрерывности с номером m_1 оказывается под биссектрисой, а верхняя точка графика ФП (1) участка непрерывности с номером $m_1 + 1$ оказывается над биссектрисой. Таким образом, при $1 < \bar{\alpha}_n(m_1) \leq \alpha \leq \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$ ($m_1 = 0, 1, 2, \dots$) возникает необходимость исследовать разрывное кусочно-линейное преобразование

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \frac{g(-1)}{g(+1)}\theta_0 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{g(+1)}\right)g(-1)(3 + m_1), \\ \theta_{0p}(m_1 + 1) \leq \theta_0 \leq \theta_{0p}(m_1), \\ \frac{g(-1)}{g(+1)}\theta_0 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{g(+1)}\right)g(-1)(2 + m_1), \\ \theta_{0p}(m_1) \leq \theta_0 \leq \theta_{0p}(m_1 - 1), \end{cases} \quad (24)$$

где

$$\theta_{0p}(m_1) = 1 - (g(+1)/\alpha - 1)(1 + m_1) \quad (25) \\ (0 \leq \theta_{0p}(m_1) \leq 1).$$

При $\bar{\alpha}_n(m_2 + 1) \leq \alpha \leq \underline{\alpha}_n(m_2) < 1$ ($m_2 = 0, 1, 2, \dots$), согласно свойствам ФП (12), имеем разрывное преобразование

$$\bar{\tau} = \begin{cases} \frac{g(-1)}{g(+1)}\tau_0 + \frac{\alpha - g(-1)}{g(+1)}(3 + m_2), \\ \tau_{0p}(m_2 + 1) \leq \tau_0 \leq \tau_{0p}(m_2), \\ \frac{g(-1)}{g(+1)}\tau_0 + \frac{\alpha - g(-1)}{g(+1)}(2 + m_2), \\ \tau_{0p}(m_2) \leq \tau_0 \leq \tau_{0p}(m_2 - 1), \end{cases} \quad (26)$$

где

$$\tau_{0p}(m_2) = 1 - (\alpha/g(-1) - 1)(1 + m_2) \quad (27) \\ (0 \leq \tau_{0p}(m_2) \leq 1).$$

Для того чтобы воспользоваться результатами работы [5] по анализу зависимости кратных циклов разрывного кусочно-линейного преобразования прямой в прямую от параметров, необходимо представить отображения (24) и (26) в виде зависимости

$$\bar{x} = Tx = \begin{cases} T_1x = a + \lambda_1x & (x < 0), \\ T_2x = -b + \lambda_2x & (x > 0), \end{cases} \quad (28)$$

где $a, b > 0$ и $x = 0$ – точка разрывности.

Переходя в (24) к переменной $x = \theta - \theta_{0p}(m_1)$, находим, что (24) в форме записи (28) имеет

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = g(-1)/g(+1), \\ a = [2g(-1) + g(+1)(1 + m_1)][1/\alpha - 1/\underline{\alpha}_n(m_1 + 1)], \\ b = [g(+1)(1 + m_1) + g(-1)][1/\bar{\alpha}_n(m_1) - 1/\alpha],$$

а диапазоны определения T_1 и T_2 принимают вид: для T_1 – $1 - g(+1)/\alpha < x < 0$, для T_2 – $0 < x < g(+1)/\alpha - 1$. Из вида приведенных соотношений непосредственно следует, что: λ от α не зависит; условие $a = 0$ соответствует границе $\alpha = \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$ существования разрыва отображения T , а условие $b = 0$ – границе $\alpha = \bar{\alpha}_n(m_1)$. Поскольку $\partial a/\partial \alpha < 0$, $\partial b/\partial \alpha > 0$, постольку при увеличении α ($\alpha > 1$) графики отображений T_1 и T_2 на плоскости (x, \bar{x}) спускаются вниз, и при этом диапазон определения T_1 и T_2 на оси x , оставаясь симметричным относительно $x = 0$, уменьшается в размере.

Переходя в (26) к переменной $x = \tau - \tau_{0p}(m_2)$, находим, что (26) в форме записи (28) имеет

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = g(-1)/g(+1), \\ a = [2g(-1) + g(+1)(1 + m_2)][\alpha - \bar{\alpha}_n(m_2 + 1)] \times \\ \times (g(+1)g(-1))^{-1}, \\ b = [g(+1)(1 + m_2) + g(-1)] \times \\ \times [\underline{\alpha}_n(m_2) - \alpha]/(g(+1)g(-1)),$$

а диапазоны определения T_1 и T_2 принимают вид: для T_1 – $-(\alpha/g(-1) + 1) < x < 0$, и для T_2 – $0 < x < \alpha/g(-1) - 1$. Из вида приведенных соотношений непосредственно следует, что: λ от α не зависит; условие $a = 0$ соответствует границе $\alpha = \bar{\alpha}_n(m_2 + 1)$, а условие $b = 0$ – границе $\alpha = \underline{\alpha}_n(m_2)$. Поскольку $\partial a/\partial \alpha > 0$, $\partial b/\partial \alpha < 0$, постольку при уменьшении α ($\alpha < 1$) графики отображений T_1 и T_2 на плоскости (x, \bar{x}) спускаются вниз, и при этом диапазон определения T_1 и T_2 на оси x , оставаясь симметричным относительно $x = 0$, уменьшается в размере.

Сравнивая приведенные выше результаты перехода к форме записи (28), нетрудно отметить, что качественное поведение графика ФП (28) инвариантно к величинам m_1, m_2 и является однотипным при увеличении α в пределах интервалов $\bar{\alpha}_n(m_1) \leq \alpha \leq \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$ ($m_1 = 0, 1, 2, \dots$) и при уменьшении α в пределах интервалов

$\bar{\alpha}_n(m_2 + 1) \leq \alpha \leq \underline{\alpha}_n(m_2)$ ($m_2 = 0, 1, 2, \dots$). Если при этом также учесть, что в [5] условия существования кратных циклов сформулированы для параметров λ_1, λ_2 и $\Delta = a/b$, а использование при переходе от ФП (24), (26) к ФП (28) дополнительного условия $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, представляющего при $\lambda = \text{const}$ в пространстве параметров $(\lambda_1, \lambda_2, \Delta)$ прямую, которая пересекает все без исключения области существования кратных циклов, то становится очевидным, что без потери общности рассмотрений можно ограничиться рассмотрением свойств ФП (28) при $1 < \bar{\alpha}_n(m_1) \leq \alpha \leq \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$ ($m_1 = 0, 1, 2, \dots$). В этом случае

$$\Delta = \Delta(\alpha) = (1 + g(-1))(\underline{\alpha}_n(m_1 + 1) - \alpha) \times ((2 + m_1)g(+1)(\alpha - \bar{\alpha}_n(m_1)))^{-1}, \quad (29)$$

и при увеличении α в пределах диапазона $\bar{\alpha}_n(m_1) \leq \alpha \leq \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$ ($m_1 = 0, 1, 2, \dots$) изменяется от бесконечности до нуля.

Согласно [5] циклы первой сложности типа $T_2^n T_1$ ($n = 1, 2, \dots$) существуют, если параметр Δ удовлетворяет неравенству

$$(1 - \lambda^{n-1})/(\lambda^{n-1}(1 - \lambda)) + \lambda = \underline{\Delta}(n) < \Delta < \bar{\Delta}(n) = (1 - \lambda^n)/(\lambda^n(1 - \lambda)) \quad (n \geq 1). \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29) и разрешая получающиеся уравнения относительно α , находим диапазоны $\alpha(\bar{\Delta}(n)) \leq \alpha \leq \alpha(\underline{\Delta}(n))$ существования циклов указанного типа. Величина $\alpha = \alpha(\Delta)$ определяется выражением

$$\alpha = \alpha(\Delta) = \frac{2\lambda + 1 + m_1 + (\lambda + 1 + m_1)\Delta(n)}{\lambda + 2 + m_1 + (2 + m_1)\Delta(n)} g(+1). \quad (31)$$

Поскольку

$$\text{sign} \partial \alpha(\Delta) / \partial \Delta = \text{sign}(\bar{\alpha}_n(m_1) - \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)) < 0,$$

а величина интервала $\Delta \alpha(n) = \alpha(\underline{\Delta}(n)) - \alpha(\bar{\Delta}(n))$ согласно (31) определяется соотношением

$$\Delta \alpha(n) = \lambda(1 - \lambda)g(+1) \times [(\lambda + (2 + m_1)(1 + \underline{\Delta}(n)))] \times [(\lambda + (2 + m_1)(1 + \bar{\Delta}(n)))]^{-1}, \quad (32)$$

постольку при разных n не пересекаются не только интервалы (30) [5], но и соответствующие им на оси α интервалы $\alpha(\bar{\Delta}(n)) \leq \alpha \leq \alpha(\underline{\Delta}(n))$. Согласно (3), при $n \rightarrow \infty$ $\underline{\Delta}(n), \bar{\Delta}(n) \rightarrow \infty$, т.е. с учетом (32) интервалы с $\Delta \alpha(n)$ стягиваются к нулю и в соответствии с (29) сходятся справа к левой границе $\alpha = \bar{\alpha}_n(m_1)$ диапазона $\bar{\alpha}_n(m_1) \leq \alpha \leq \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$ разрывности отображения с ФП (1).

Для определения областей существования циклов первой сложности типа $T_1^n T_2$, согласно [5], достаточно в формуле (30) заменить Δ на $1/\Delta$. Аналогично предыдущему можно показать, что для циклов $T_1^n T_2$ при $n \rightarrow \infty$ интервалы существования на оси α сужаются до нуля не пересекаясь и при этом сходятся слева к правой границе $\alpha = \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$ диапазона $\bar{\alpha}_n(m_1) \leq \alpha \leq \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$.

Поскольку для циклов $T_2^n T_1$ выполняется условие $\underline{\Delta}(n = \infty) \leq \underline{\Delta}(n) \leq \underline{\Delta}(n = 1)$, а для циклов $T_1^n T_2$ – условие $\bar{\Delta}(n = 1) \leq \bar{\Delta}(n) \leq \bar{\Delta}(n = \infty)$, постольку область существования цикла $T_2^n T_1$ с минимально возможным n находится в глубине диапазона $\bar{\alpha}_n(m_1) \leq \alpha \leq \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$, и, следовательно, при переходе на оси α от левой границы $\alpha = \bar{\alpha}_n(m_1)$ к правой границе $\alpha = \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$ диапазона кратность циклов типа $T_2^n T_1$ уменьшается до минимальной $n = 1$, а затем увеличивается, но уже в форме циклов $T_1^n T_2$. Интервал существования $T_2^n T_1$ не только занимает среднее положение в диапазоне $\bar{\alpha}_n(m_1) \leq \alpha \leq \underline{\alpha}_n(m_1 + 1)$, но и является максимально возможным по величине по отношению к циклам с $n > 1$.

На рис. 2 приведены совместные осциллограммы $x(\tau)^*$ и $c(\tau)^*$, соответствующие циклу $T_2^n T_1$, для случая минимально возможного $m_1 = 1$. Непосредственно из осциллограммы $c(\tau)^*$ рис. 2 следует, что в интервале $0 \leq \tau \leq 3$, когда действует оператор T_1 с параметром $m_1 + 1 = 2$, возвратных движений с уровня $C = 21$ на уровень $C = 12$ два, а в интервале $4 < \tau < 7$, когда действует оператор T_2 с параметром $m_1 = 1$, – одно.

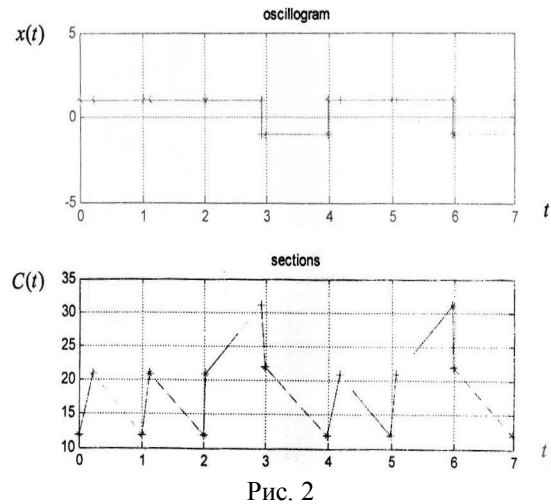


Рис. 2

При произвольных значениях параметра m_1 период цикла $T_2 T_1$ равен сумме двух временных интервалов: интервал, равный $3+m_1$, действия оператора T_1 и интервал действия оператора T_2 , равный $2+m_1$, – итого $5+2m_1$. При $m_1=1$ период цикла $T_2 T_1$ минимален и равен 7 (как на рис. 2), а минимальная частота ряда Фурье сигнала $x(\tau)^*$ соответственно равна $1/7$, т.е. в семь раз меньше частоты сигнала ОГ.

Необходимо отметить, что, используя выражения операторов T_+ и T_- работы [2] и их связь с циклом $T_2 T_1$, можно представить выражения для координат $\tau^*, \theta_1^*, \tau_1^*, \theta^*$ цикла в цепочке $T_2 T_1 = T_-(m_2=0)T_+(m_1)T_-(m_2=0)T_+(m_1+1)$ в явном виде:

$$\begin{aligned} T_+(m_1+1): \quad \tau^* &= (\alpha/g(+1))(m_1+3-\theta^*)-m_1-1, \\ T_-(m_2=0): \quad \theta_1^* &= (g(-1)/\alpha)(2-\tau^*), \\ T_+(m_1): \quad \tau_1^* &= (\alpha/g(+1))(m_1+2-\theta_1^*)-m_1, \\ T_-(m_2=0): \quad \theta^* &= (g(-1)/\alpha)(2-\tau_1^*). \end{aligned} \quad (33)$$

Используя приведенные соотношения и выражение для осциллограммы $x(\tau)^*$ цикла $T_2 T_1$

$$x(\tau)^* = \begin{cases} +1, & 0 \leq \tau \leq m_1+1+\tau^*, \\ -1, & m_1+1+\tau^* < \tau \leq 3+m_1, \\ +1, & 3+m_1 < \tau \leq 3+2m_1+\tau_1^*, \\ -1, & 3+2m_1+\tau_1^* < \tau \leq 5+2m_1, \end{cases} \quad (34)$$

находим, что среднее на периоде

$$\begin{aligned} \overline{g(x(\tau)^*)} &= (g(+1)(m_1+1+\tau^*) + \\ &+ g(-1)(2-\tau^*) + g(+1)(m_1+\tau^*) + \\ &+ g(-1)(2-\tau_1^*))(5+2m_1)^{-1} = \alpha, \end{aligned} \quad (35)$$

т.е. ИЧФД обеспечивает и в случае существования цикла равенство средней частоты выходного сигнала СЧ показателю счетчика.

Нетрудно проверить, что при произвольных значениях m_1 период цикла $T_1^n T_2$ во времени равен $(2+m_1)(n+1)+n$, а цикла $T_2^n T_1$ – $(2+m_1) \times (n+1)+1$ периодов сигнала ОГ. Используя вышеприведенную процедуру определения среднего значения $\overline{g(x(\tau)^*)}$, можно убедиться, что и для циклов $T_1^n T_2$, $T_2^n T_1$ $\overline{g(x(\tau)^*)} = \alpha$, т.е. и в этих случаях модуляции выходного сигнала СЧ в среднем сохраняется его работоспособность.

Согласно [5] интервалы существования циклов первой сложности $T_2^n T_1$, $T_2^{n+1} T_1$ граничат с интервалами существования циклов второй сложности типа $(T_2^{n+1} T_1)^m T_2^n T_1$, $(T_2^n T_1)^m T_2^{n+1} T_1$, а

интервалы существования циклов первой сложности типа $T_1^n T_2$, $T_1^{n+1} T_2$ – с циклами второй сложности типа $(T_1^{n+1} T_2)^m T_1^n T_2$, $(T_1^n T_2)^m T_1^{n+1} T_2$. На оси параметра α интервалы существования циклов второй сложности располагаются между интервалами существования циклов первой сложности. При этом в остающихся «пустых» интервалах по тем же правилам располагаются циклы третьей сложности и т.д. За вычетом всего множества интервалов существования циклов всевозможной сложности на оси α остается множество, соответствующее непериодическим движениям по координате x (движение по Пуассону).

Заключение

Для оценки спектра $x(\tau)^*$ установившегося движения, соответствующего определенному типу цикла, достаточно напомнить, что однократное применение оператора T_1 означает затрату времени, равную $3+m_1$ периодов сигнала ОГ, а для T_2 – $2+m_1$ периодов сигнала ОГ (здесь $i=1$ при $\alpha > 1$ и $i=2$ при $\alpha < 1$). Поэтому увеличение кратности цикла приводит к увеличению длительности его временной реализации. И поскольку, согласно [5], при определенных значениях α из интервалов разрывности ФП отображения T существуют циклы со сколь угодно большой кратностью, постольку минимальная частота ряда Фурье соответствующей осциллограммы $x(\tau)^*$ снизу не ограничена. Для таких значений параметра α спектр $x(\tau)^*$ приближается к сплошному. В этом случае применение узкополосного фильтра нижних частот может не обеспечить подавления детерминированных помех до заданного уровня.

Список литературы

1. Горюнов В.И. // Математическое моделирование и оптимальное управление. Вестник Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2003. Вып. 1(26). С. 207–215.
2. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. // Вестник Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 1. С. 184–190.
3. Левин В.А., Малиновский В.Н., Романов С.К. Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. М.: Радио и связь, 1989. 232 с.
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
5. Леонов Н.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2. № 6. С. 943–956.

**ANALYSIS OF THE FORM OF STEADY-STATE PROCESSES IN A SYNCHRONIZATION SYSTEM
WITH PULSED PHASE-FREQUENCY CONTROL AND IDEAL FILTER ASTATISM**

O.G. Antonovskaya, V.I. Goryunov

The article presents the results of qualitative and quantitative analysis of the form of steady-state processes in a system with pulsed phase-frequency control and ideal filter astatism.

Keywords: frequency synthesizer, mathematical model, system dynamics, point mapping, fixed point, stability, multiple cycle.