УДК 534.1; 621.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ

© 2013 г.

А.В. Грезина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

aleksandra-grezina@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.10.2013

Построена математическая модель, описывающая самовозбуждение крутильных и поперечных колебаний расточной борштанги, замкнутая на динамику процесса резания. Исследование устойчивости состояния равновесия системы проведено методом D-разбиения. Получены области устойчивости и предельные глубины резания при конкретных значениях геометрических параметров борштанги и технологических режимах резания.

Ключевые слова: математическая модель, устойчивость, D-разбиение, самовозбуждение колебаний, борштанга.

Известно, что растачивание глубоких отверстий на токарных станках при наиболее производительных режимах резания сопровождается вибрациями, приводящими к ряду вредных явлений [1, 2]. Возникновению вибраций наиболее подвержена борштанга как менее жесткое звено технологической системы станка. Она в процессе обработки может совершать продольные, крутильные и поперечные как вынужденные колебания, так и автоколебания. Снижение интенсивности колебаний является одним из основных путей повышения производительности и стойкости инструмента. В целях упрощения при исследованиях обычно не учитывают влияние одних колебаний на другие, хотя в действительности влияние имеет место [1]. Это связано с тем, что математические модели, описывающие взаимосвязь колебаний, представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных со сложными краевыми условиями, замкнутые на динамику процесса резания. Исследование таких систем представляет трудности теоретического характера. В настоящей работе для исследования устойчивости состояния равновесия системы, описывающей взаимосвязь крутильных и поперечных колебаний, перейдем от распределенной модели к модели с сосредоточенными параметрами, что значительно упрощает процедуру исследования.

1. Построение математической модели

Эквивалентная механическая модель борштанги в распределенной идеализации изображена на рис. 1.

В связи с большой глубиной обрабатываемых отверстий ($l/d >> 5$, где l, d – глубина и диаметр отверстия) борштанга представляется в виде упругого стержня с непрерывным распределением массы с учетом ее жесткого крепления к суппорту на одном конце и специфики процесса металлообработки на другом. Предполагается, что материал борштанги обладает свойством однородности и изотропности и справедлива гипотеза плоских сечений. В соответствии с приведенными на рисунке обозначениями $\varphi(x,t)$, $y(x,t)$ и $z(x,t)$ описывают крутильные и поперечные колебания борштанги относительно осей x, y и z соответственно. В процессе обработки глубоких отверстий при колебаниях борштанги формируются динамические силы резания $F_{\text{рез}}$ и моменты резания $M_{\text{рез}}$ и трения $M_{\text{Т}}$. Одни из них связаны с силами трения направляющих, а другие – с динамическими силами резания. Имеется ряд причин [1], вызывающих поперечные автоколебания: во-первых, скорость резания обычно находится в зоне, отвечающей падающему участку зависимости силы резания от скорости; во-вторых, колебания толщины срезаемого слоя, приводящие к изменению сил резания, которые изменяются с запаздыванием по отношению к изменению толщины среза и возбуждают и усиливают автоколебания. Возникновение крутильных автоколебаний может происходить под влиянием тех же факторов, что возникновение поперечных автоколебаний.

Так как исследование устойчивости состояния равновесия системы, описывающей взаимосвязь крутильных и поперечных колебаний, затруднено в распределенной идеализации, то для упрощения задачи перейдем от системы с распределенными параметрами к системе с сосредоточенными параметрами, обладающей таким же энергетическим запасом, что и данная сис-

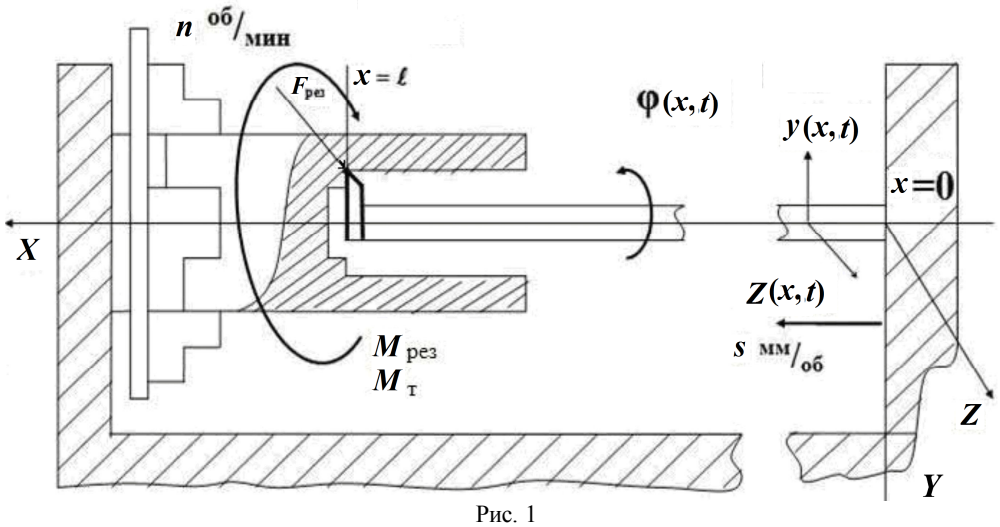

Рис. 1

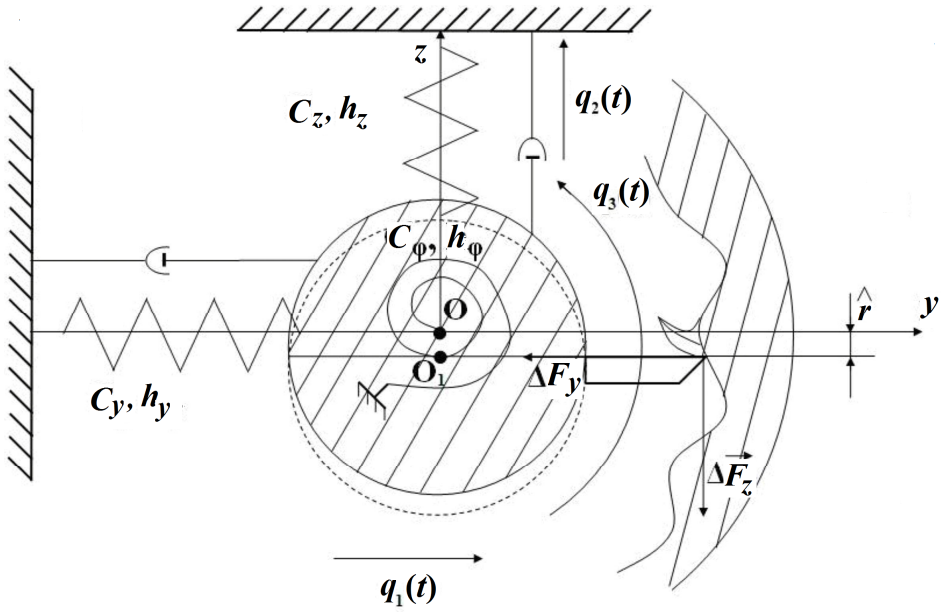

Рис. 2

тема. Рассмотрим случай обработки деталей из хрупких материалов, когда сила и момент резания не зависят от скорости, поэтому основной причиной самовозбуждения крутильных и поперечных колебаний при растачивании таких деталей является запаздывание, а роль трения не велика [1].

Так как борштанга представляет собой упругий стержень, один конец которого жестко закреплен в суппорте, а на другом имеется режущее лезвие, на которое в процессе обработки при колебаниях действуют динамические силы и моменты резания, то для упрощения модели можно заменить борштангу материальной точкой с координатой $x = l$ с приведенными массой и моментом инерции. Поперечные и крутильную жесткости борштанги учтем введением пружин с соответствующими коэффициентами жесткости (рис. 2).

На рис. 2 обозначены: $q_1(t), q_2(t)$ – линейные перемещения приведенной массы вдоль осей координат y и z, а $q_3(t)$ – угловое перемещение относительно x. Параметры приведенной системы (масса $m_{\text{пр}}$, момент инерции $J_{\text{пр}}$, коэффициенты жесткости c_y, c_z и c_φ) находятся из равенств кинетических и потенциальных энергий исходной и приведенной систем. Для определения параметров приведенной системы учтем, что самовозбуждение поперечных и крутильных колебаний борштанги при растачивании глубоких отверстий происходит на частотах, близких к первым собственным частотам системы [2, 3]. Коэффициенты рассеивания

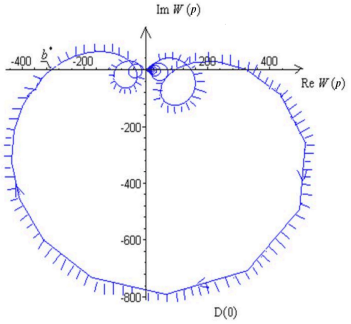

Рис. 3

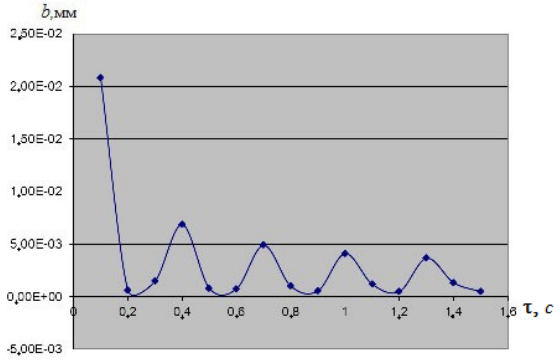

Рис. 4

энергии приведенной системы h_y, h_z и h_φ можно получить, используя следующие соотношения:

$$h_y = h_z = (m_{\text{пр}}\omega_0\Delta)/\pi$$

и

$$h_\varphi = (J_{\text{пр}}\omega_{0\varphi}\Delta)/\pi,$$

где ω_0, $\omega_{0\varphi}$ – первые собственные частоты приведенной системы, Δ – логарифмический декремент затухания колебаний, полученный по экспериментальным кривым затухающих колебаний в НИИ ПМК ННГУ [2].

Согласно приведенной эквивалентной механической модели (рис. 2) математическая модель, описывающая взаимосвязь крутильных и поперечных колебаний борштанги, запишется в виде [4]

$$\begin{aligned} &m_{\text{пр}}\ddot{q}_1(t) + m_{\text{пр}}\hat{r}\ddot{q}_3(t) + h\dot{q}_1(t) + cq_1(t) = -\Delta F_y,\\ &m_{\text{пр}}\ddot{q}_2(t) + h\dot{q}_2(t) + cq_2(t) = -\Delta F_z,\\ &(J_{\text{пр}} + m_{\text{пр}}\hat{r}^2)\ddot{q}_3(t) + m_{\text{пр}}\hat{r}\ddot{q}_1(t) +\\ &+ h_\varphi\dot{q}_3(t) + c_\varphi q_3(t) = -\Delta M_x, \end{aligned} \qquad (1)$$

где обозначено: $h = h_y = h_z$, $c = c_y = c_z$; $\Delta M_x = \Delta F_z r + \Delta F_y \hat{r}$, r – внешний радиус борштанги, $\hat{r}$ – статическое смещение приведённой массы борштанги под действием статической силы резания F_z при растачивании [2], ΔF_y и ΔF_z – приращения проекций динамической силы резания на оси координат.

Приращения проекций динамической силы резания ΔF_y и ΔF_z определяются динамическими силами, вызываемыми относительными колебаниями резца и детали в зоне резания в данный момент, а также силами, связанными со срезанием следа, и могут быть записаны с учетом основной причины самовозбуждения колебаний – запаздывания, следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \Delta F_y &= K_{22}(q_1(t) + \hat{r}q_3(t) -\\ &- \mu(q_1(t-\tau) + \hat{r}q_3(t-\tau))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta F_z &= K_{32}(q_1(t) + \hat{r}q_3(t) -\\ &- \mu(q_1(t-\tau) + \hat{r}q_3(t-\tau))), \end{aligned} \qquad (2)$$

где τ – запаздывание, равное времени одного оборота обрабатываемой детали, K_{22}, K_{32} – характеристики резания, μ – коэффициент перекрытия ($0 < \mu \le 1$).

Проведенные экспериментальные исследования показывают [2], что статическое смещение приведённой массы под действием статической силы приблизительно составляет 2 мм, тогда можно записать, что $|K_{32}|r >> |K_{22}|\hat{r}$. Поэтому для упрощения дальнейших исследований последний член в выражении приращения момента резания ΔM_x можно не учитывать.

2. Исследование устойчивости

Исследование устойчивости состояния равновесия системы проведем методом D-разбиения [4]. Для вывода характеристического уравнения запишем частные решения системы в виде $q_i(t) = C_i e^{pt}$ ($i = 1,2,3$) и подставим в систему уравнений (1). В результате несложных преобразований получим характеристическое уравнение, представляющее собой квазиполином следующего вида:

$$P_4(p) + (K_{32}r\hat{r}\overline{P}_1(p) + K_{22}\overline{P}_2(p))(1 - \mu e^{-p\tau}) = 0, \quad (3)$$

где

$$P_4(p) = P_1(p)P_2(p) - m_{\text{пр}}^2\hat{r}^2p^4,$$

$$P_1(p) = m_{\text{пр}}p^2 + hp + c,$$

$$\overline{P}_1(p) = P_1(p) - m_{\text{пр}}p^2,$$

$$P_2(p) = (J_{\text{пр}} + m_{\text{пр}}\hat{r}^2)p^2 + h_\varphi p + c_\varphi,$$

$$\overline{P}_2(p) = P_2(p) - m_{\text{пр}}\hat{r}^2p^2.$$

Из экспериментальных исследований известно [2], что при растачивании острозаточенными резцами характеристики резания остают-

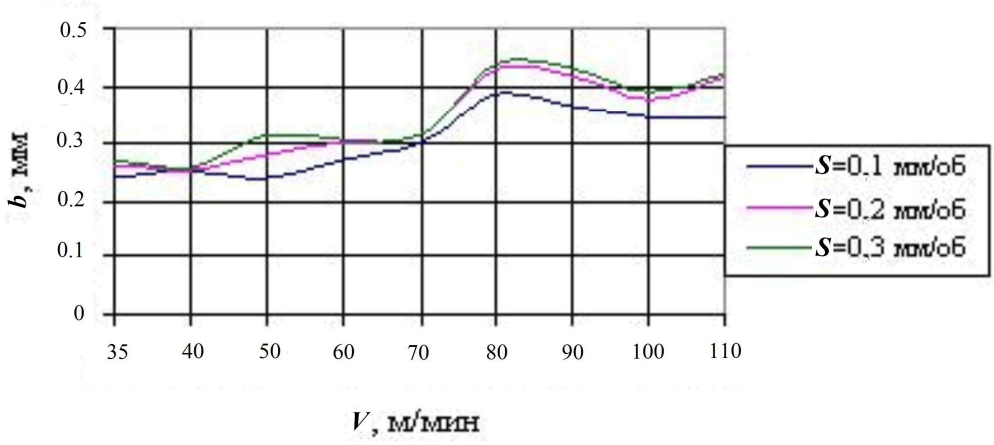

Рис. 5

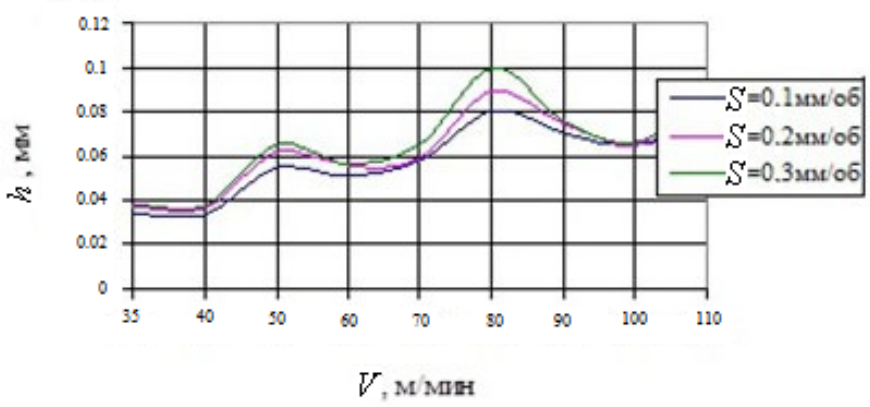

Рис. 6

ся пропорциональными глубине резания b, поэтому их можно записать как $K_{22} = b\hat{K}_{22}$ и $K_{32} = b\hat{K}_{32}$. Тогда в характеристическом уравнении можно выделить параметр $W = -1/b$, и уравнение кривой D-разбиения будет иметь вид:

$$W(p) = \frac{(\overline{P}_2(p)\hat{K}_{22} + \overline{P}_1(p)\hat{K}_{32}r\hat{r})(1-\mu e^{-p\tau})}{P_4(p)}, \quad (4)$$

где $p = i\omega$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$.

Для отыскания предельной глубины резания воспользуемся методом D-разбиения по одному комплексному параметру. Условие грубости при данной структуре характеристического уравнения не нарушается и его можно не проверять, так как множество предельных точек кривой D-разбиения при $\omega \to \infty$ стягивается в точку $W = 0$. Отсюда следует также, что на плоскости W отсутствуют области $D(\infty)$, может быть, за исключением одной точки $W = 0$.

На рис. 3 представлено D-разбиение на плоскости комплексного параметра W для $\omega \in (0, +\infty)$. Вторая часть кривой D-разбиения для $\omega \in (-\infty, 0)$ получается зеркальным отображением построенной кривой относительно реальной оси.

Кривая D-разбиения построена при следующих значениях параметров системы: длина борштанги $l = 3$ м, внешний и внутренний радиусы борштанги $r = 0.04$ м, $r_{\text{внутр}} = 0.035$ м; скорость резания $V = 90$ м/мин; подача $S = 0.1$мм/об.

Учитывая правило штриховки, найдем область устойчивости D(0). Пересечение кривой D-разбиения с отрицательной действительной полуосью определяет предельную глубину резания b^*.

На рис. 4 приведен график зависимости предельной глубины резания от запаздывания τ при подаче $S = 0.1$мм/об, скорости резания $V = 70$ м/мин, длине борштанги $l = 3$ м и радиусах борштанги $r = 0.04$ м, $r_{\text{внутр}} = 0.035$ м. На рис. 5 представлены графики зависимости предельной глубины резания от скорости резания при длине борштанги $l = 3$ м, радиусах борштанги $r = 0.04$ м, $r_{\text{внутр}} = 0.035$ м. На рис. 6 изображены графики зависимости предельной глубины резания от скорости резания при длине борштанги $l = 3.5$ м и радиусах борштанги $r = 0.035$ м, $r_{\text{внутр}} = 0.03$ м.

Анализ результатов исследований показывает, что

• с ростом глубины резания система становится неустойчивой;

• с увеличением длины борштанги её жесткость уменьшается, что уменьшает область устойчивости;

• с увеличением длины борштанги и запаздывания предельная глубина резания уменьшается.

Результаты численных исследований хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований, приведенными в работе [1] и полученными в лаборатории динамики систем НИИ ПМК ННГУ [2] .

Список литературы

1. Уткин Н.Ф. Обработка глубоких отверстий. Л.: Машиностроение, 1988. 265 с.

2. Городецкий Ю.И. Создание математических моделей сложных автоколебательных систем в станкостроении // В сб.: «Автоматизация проектирования» / Под ред. акад. В.А. Трапезникова. М.: Машиностроение, 1986. Вып. 1. С. 203–221.

3. Грезина А.В. Об устойчивости борштанги при растачивании глубоких отверстий // Тез. докл. XII Междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, ИПУ. 2012. С. 112–113.

4. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.

ON STABILITY OF ONE DISTRIBUTED SYSTEM

A.V. Grezina

A mathematical model describing self-excitation of boring bar torsional and transverse vibrations is presented. The model is predominantly focused on the cutting process dynamics. The stability of the system equilibrium state is studied using the D-partition technique. Stability domains and maximum depths of cut for specific values of the boring bar geometric parameters and various cutting modes are obtained.

Keywords: mathematical model, stability, D-partition, self-excitation of vibrations, boring bar.