РАДИОФИЗИКА

УДК 621.391.019.4

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА В ЗАДАЧАХ БИНАРНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ

М.В. Литвин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

mlit.post@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.04.2013

Исследована возможность модификации критерия качества при бинарном обнаружении сигналов. Вместо средней вероятности ошибки обнаружения использована среднеквадратичная величина ее, содержащая как среднюю вероятность, так и ее дисперсию. Поэтому минимизация среднеквадратичной вероятности позволяет ограничить еще и рассеяние вероятности ошибки около ее средней величины. В результате область, в которой расположены вероятности ошибки, располагается ближе к нулю, что указывает на улучшение качества обнаружения. Определено уравнение оптимального «порога» для алгоритма обнаружения. Рассмотрены примеры с модифицированной оценкой качества, и проведено сравнение ее с известной оценкой.

Ключевые слова: вероятность ошибки, вероятность правильного обнаружения, вероятность ложной тревоги, случайный параметр сигнала, алгоритм обнаружения, оптимальная пороговая величина, отношение правдоподобия, оптимальный фильтр.

Введение

Теория статистических решений определяет основные методы решения практически всех задач теории связи [1–5]. При этом строгое решение задач оптимального приема сигналов невозможно, если качество приема не определено конкретными понятиями. В теории связи для этих целей применяют различные критерии качества. Среди известных следует отметить критерии Неймана–Пирсона, «идеального наблюдателя» Зигерта, минимакса, информационный критерий Шеннона, критерии среднего и байесова рисков [1, 4, 5]. В случае критерия Зигерта минимизируется средняя вероятность ошибочных решений, при критерии среднего риска – усредненный риск (потери), а при информационном критерии Шеннона максимизируется информация на выходе канала связи. Несмотря на такое обилие критериев качества, в [5, с. 787] замечено, что создание новых критериев является вечной задачей. Это, видимо, связано как с непрерывным совершенствованием систем связи, так и с расширением областей применения их.

Сравнительно простым критерием можно считать давно известный критерий Зигерта [1, с. 223–224], в котором качество обнаружения определяется всего одним параметром – средней вероятностью ошибочных решений. Очевидный недостаток такой оценки связан с тем, что она не учитывает рассеяние ошибочных решений около их среднего значения. Поэтому разные устройства обнаружения, обеспечивающие одинаковую среднюю вероятность ошибочных решений, считаются одинаковыми по качеству, хотя области рассеяния этих решений могут существенно отличаться. Видимо, простотой этого критерия можно объяснить его долголетие [2, с. 217– 220; 3, с. 149].

Этого недостатка можно избежать, если для оценки качества обнаружения использовать не среднюю вероятность ошибочных решений, как в случае критерия Зигерта, а средний квадрат вероятности ошибочных решений. Тогда качество обнаружения будет определяться не только средней вероятностью, но и ее дисперсией. Поэтому минимизация среднего квадрата позволит уменьшить обе составляющие вероятности ошибочных решений. Далее рассматриваются свойства такого критерия качества для задач бинарного обнаружения.

Обнаружение сигналов

Возможность модификации критерия качества обнаружения целесообразно исследовать для наиболее общего и сложного случая, когда обнаруживаемые сигналы образуют множество со случайными параметрами. В связи с этим такое обнаружение определено в [4, с. 173] как сложное, в отличие от простого обнаружения, когда обнаруживается единственный сигнал. Обнаружение сигналов связано с проверкой гипотез существования сигнала на приемном конце канала связи [5, с. 367–369].

В случае бинарного обнаружения таких гипотез две: H_0 – принимается шум и H_1 – принимается сигнал и шум. Эти гипотезы определяют два события на входе канала связи: $\bar{S}$ – сигнала нет и S – имеется некоторый сигнал $s_{\vec{\alpha}}$ из множества обнаруживаемых сигналов со случайными параметрами, в качестве которых рассматриваются непрерывные величины, обозначенные далее вектором $\vec{\alpha}$. Кроме этого, известна априорная вероятность существования $P(S)$ и отсутствия $P(\bar{S})=1-P(S)$ сигнала и условная плотность вероятности его параметров $p(\vec{\alpha}|S)$.

Гипотезы H_0 и H_1 принимаются в условиях действия сигнала с помехой и одной помехи. Условные вероятности ошибочных решений при принятии этих гипотез определяются следующими выражениями

$$P(H_0|s_{\vec{\alpha}})=\int\limits_{\Delta X_1} p(x|s_{\vec{\alpha}})dx=1-P(H_1|s_{\vec{\alpha}})=1-D_{\vec{\alpha}}\,, \quad (1)$$

$$P(H_1|\bar{S})=\int\limits_{\Delta X_2} p(x|\bar{S})dx=1-P(H_0|\bar{S})=F\,. \quad (2)$$

Здесь $p(x|\bar{S})$ и $p(x|s_{\vec{\alpha}})$ – соответственно, условные плотности вероятности напряжения x на входе приемника при действии шума или смеси его с сигналом $s_{\vec{\alpha}}$; ΔX_1, ΔX_2 – области принятия гипотез H_0 и H_1.

Критерий идеального наблюдателя

В соответствии с этим критерием [1, с. 223–224] минимизируется среднее значение вероятности ошибочных решений p_f. Если учесть вероятности (1), (2), то эта величина равна

$$\langle p_f \rangle_{\vec{\alpha}} = P(\bar{S},H_1)+\langle P(s_{\vec{\alpha}},H_0)\rangle_{\vec{\alpha}} = \\ = P(\bar{S})F+P(S)\langle 1-D_{\vec{\alpha}}\rangle_{\vec{\alpha}}\,. \quad (3)$$

Минимизация среднего значения (3) производится за счет выбора оптимальной пороговой величины $X_* = X_{*1}$, разделяющей области ΔX_1 и ΔX_2 (1), (2). Для определения ее получается известное уравнение [5, с. 407, 415]

$$\lambda_g(X_*)=\int \lambda_{\vec{\alpha}}(X_*)p(\vec{\alpha}|S)d\vec{\alpha}\Big|_{X_*=X_{*1}} = A_0\,. \quad (4)$$

Здесь $\lambda_{\vec{\alpha}}(x)=p(x|s_{\vec{\alpha}})/p(x|\bar{S})$ – отношение правдоподобия для сигнала $s_{\vec{\alpha}}$; $\lambda_g(x)$ – обобщенное отношение правдоподобия; $A_0=P(\bar{S})/P(S)$ – отношение априорных вероятностей.

Модифицированная оценка качества

Для улучшения качества обнаружения следует уменьшать вероятность ошибочных решений p_f, так как при этом увеличивается корреляция между событиями на входе и выходе канала связи (3). Можно утверждать, что качество обнаружения определяется мерой близости между значениями p_f и нулевыми значениями этой вероятности, соответствующими каналу связи без искажений. В случае критерия Зигерта мера близости определяется лишь средним значением вероятности ошибки (3). Действительно, минимизация приближает это среднее к нулю, никоим образом не влияя на рассеяние случайной p_f около ее среднего уровня.

Следует заметить, что определение вероятности как предела числа испытаний с положительным исходом к полному числу испытаний или соответствующего математического ожидания приводит при неограниченном росте числа испытаний к неслучайной величине [6, с. 10–11]. Однако в рассматриваемом случае мы имеем дело со сложными случайными событиями, связанными с действием одного шума или смесью его с сигналом. Поэтому условные вероятности определены на подмножестве событий и, действительно, являются неслучайными величинами. Если иметь в виду все множество событий, содержащее подмножества его и образующее полную группу, то здесь условные вероятности являются случайными величинами, поскольку процесс посылки сигнала в канале связи случаен [6, с. 101–106]. В рассматриваемом случае это вероятности (1), (2), которые являются условными для частных событий (S, s_α) и $\bar{S}$ с соответствующими априорными вероятностями $P(S)p(\vec{\alpha}|S)d\vec{\alpha}$ и $P(\bar{S})$. Именно это свойство условных вероятностей приводит к оценке качества обнаружения величиной (3), являющейся средним значением случайной p_f. Минимум этой величины определяет степень близости ее к нулевому уровню, а следовательно, и качество обнаружения в критерии Зигерта.

Однако более полное определение близости случайной p_f к нулю в рассматриваемой задаче дает средний квадрат ее, который определяется как средним значением вероятности, так и дисперсией ее, определяющей рассеяние около среднего. Ясно, что минимизация среднего квадрата позволяет включить в оценку близости к нулю не только среднее случайной p_f, но и рассеяние ее, и тем самым улучшить качество обнаружения. Следует отметить, что такая оценка давно и с успехом используется, например, в теории спектрального анализа при разложении функций по системам ортогональных функций [7, с. 406–415], в задачах оптимальной фильтрации [4, с. 14–24], интерполяции и экстраполяции сигналов [8, с. 173–190].

Покажем, что такую меру близости можно использовать для оценки качества и в задаче бинарного обнаружения сигналов. Используя δ-функцию, можно представить плотность вероятности ошибочных решений (1), (2) следующим образом

$$\begin{aligned} w(p_f) = P(\bar{S})\delta(p_f - F) + \\ + P(S)\int p(\vec{\alpha}|S)\delta(p_f - 1 + D_{\vec{\alpha}})d\vec{\alpha} \end{aligned}. \tag{5}$$

Здесь учтено, что обнаруживается сигнал со случайным параметром $\vec{\alpha}$, который в задаче обнаружения не является информативным. Среднее значение вероятности ошибки $\int p_f w(p_f)dp_f$, определенное с использованием (5), приводит к среднему (3), которое минимизируется в случае критерия Зигерта. Средний квадрат вероятности ошибочных решений (ложные гипотезы) определяется аналогично

$$\begin{aligned} \langle p_f^2 \rangle_{\vec{\alpha}} = \int p_f^2 w(p_f)dp_f = \\ = P(\bar{S})F^2 + P(S)\langle (1 - D_{\vec{\alpha}})^2 \rangle_{\vec{\alpha}} = \\ = \langle p_f \rangle_{\vec{\alpha}}^2 + D(p_f). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $D(p_f)$ – дисперсия случайной p_f. Для оценки качества обнаружения целесообразно вместо (6) использовать среднеквадратичную величину

$$p_{f1} = \sqrt{\langle p_f^2 \rangle}, \tag{7}$$

поскольку в этом случае просто сопоставить качество обнаружения исследуемого и известных критериев. Для минимизации (6), (7), как и в случае критерия Зигерта, необходимо выбрать оптимальную пороговую величину $X_* = X_{*2}$, разделяющую области принятия гипотез H_0 и H_1. Учитывая вероятности (1), (2) и оценку (7), просто получить следующее уравнение оптимальной пороговой величины

$$\int \lambda_{\vec{\alpha}}(X_*)(1 - D_{\vec{\alpha}})p(\vec{\alpha}|S)d\vec{\alpha}\Big|_{X_* = X_{*2}} = A_0 F\Big|_{X_{*2}}, \tag{8}$$

в котором $\lambda_{\vec{\alpha}}(X_*)$ – отношение правдоподобия и параметр A_0 определены в (4). В уравнении (8) производится более сложное, чем в (4), усреднение отношения правдоподобия, при котором учитывается не только априорная вероятность параметра сигнала, но и условная вероятность ошибки (1). Следует заметить, что к подобному усреднению приводит решение задачи о максимизации информации при обнаружении [5, с. 714], в которой, как и в (7), используется более сложная (нелинейная), чем в критерии Зигерта, оценка качества.

Алгоритм обнаружения, при котором реализуется минимум среднеквадратичной вероятности ошибочных решений, как и в случае критерия Зигерта, является критерием отношения правдоподобия, что следует из уравнения (8). Поэтому оценка качества (6), (7), отличаясь по существу от таковой для критерия Зигерта (3), содержит те же вероятности. Таким образом, оптимальная пороговая величина X_{*2} лишь иным способом (8), (4) делит область существования случайной x на области принятия гипотез H_0 и H_1, а алгоритм обнаружения аналогичен известному [4, с. 185]:

$$\begin{aligned} &\text{если } \lambda_g(x) \geq \lambda_g(X_{*2}), \text{ принимается} \\ &\text{гипотеза } H_1; \\ &\text{в противном случае принимается} \\ &\text{гипотеза } H_0. \end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что при выборе X_{*2} следует иметь в виду еще и необходимое условие существования минимума (7), определенное неравенством

$$d^2\langle p_f^2 \rangle \Big/ dX_*^2 \Big|_{X_* = X_{*2}} > 0.$$

Свойства модифицированной оценки

Рассмотрим подробнее свойства такой оценки. Наряду с вероятностью ошибки p_f используется и вероятность правильного обнаружения p_{tr}. В случае критерия Зигерта средние значения этих вероятностей связаны линейной зависимостью

$$\begin{aligned} \langle p_{tr} \rangle_{\vec{\alpha}} = P(\bar{S})(1 - F) + \\ + P(S)\langle 1 - D_{\vec{\alpha}} \rangle_{\vec{\alpha}} = 1 - \langle p_f \rangle_{\vec{\alpha}} \end{aligned}. \tag{10}$$

Поэтому минимум $\langle p_f \rangle$ и максимум $\langle p_{tr} \rangle$ наступают одновременно, и для определения их значений следует использовать оптимальную пороговую величину X_{*1} из (4).

В случае модифицированного критерия средний квадрат вероятности правильных решений определяется аналогично (6) и равен

$$\left\langle p_{tr}^2 \right\rangle_{\vec{\alpha}} = P(\bar{S})(1-F)^2 + P(S)\left\langle D_{\vec{\alpha}}^2 \right\rangle_{\vec{\alpha}} = = \left\langle p_{tr} \right\rangle_{\vec{\alpha}}^2 + D(p_{tr}). \quad (11)$$

Просто показать, что (6) и (11) связаны более сложным соотношением, чем средние вероятности (10)

$$\left\langle p_f^2 \right\rangle_{\vec{\alpha}} - \left\langle p_f \right\rangle_{\vec{\alpha}}^2 = \left\langle p_{tr}^2 \right\rangle_{\vec{\alpha}} - \left\langle p_{tr} \right\rangle_{\vec{\alpha}}^2 = = D(p_f) = D(p_{tr}), \quad (12)$$

где дисперсия

$$D(p_f) = P(\bar{S})P(S)\left\langle (1 - D_{\vec{\alpha}} - F)^2 \right\rangle_{\vec{\alpha}} + + P(S)\left(\left\langle D_{\vec{\alpha}}^2 \right\rangle_{\vec{\alpha}} - \left\langle D_{\vec{\alpha}} \right\rangle_{\vec{\alpha}}^2\right).$$

Из равенств (6), (11) следует, что их экстремумы наступают при разных значениях пороговой величины. Поэтому если в конкретной задаче необходимо максимизировать среднеквадратичную вероятность правильных решений, то вместо (8) следует использовать иное уравнение, определяющее оптимальную пороговую величину

$$\int \lambda_{\vec{\alpha}}(X_*) D_{\vec{\alpha}}\, p(\vec{\alpha}|S)\, d\vec{\alpha} \Big|_{X_* = X_{*2}} = = A_0(1-F)\Big|_{X_* = X_{*2}}. \quad (13)$$

Уравнения (8), (13) сложнее аналогичного уравнения (4) для критерия Зигерта. Однако методы и современная техника приближенных вычислений не оставляют проблем при их решении. Более интересная и важная особенность этих уравнений связана с условиями существования их решений. Уравнение (4) имеет решение, если выполняется очевидное неравенство

$$\lambda_{g\min} < A_0. \quad (14)$$

Например, для сигнала со случайной фазой [4, с. 206] минимум обобщенного отношения правдоподобия равен $\exp(-a^2\rho_s/2)$. Поэтому из неравенства (14) следует, что при заданном отношении сигнал/шум ($a^2\rho_s$) априорная вероятность ограничена условием $P(S) < < [1+\exp(-a^2\rho_s/2)]^{-1}$, и, обратно, если задана вероятность $P(S)$, то необходимо $a^2\rho_s > > \ln(P(S)/P(\bar{S}))$. Для полностью известного сигнала $\lambda_{\min} = 0$ [4, с. 192] и решение уравнения (4) существует при любых значениях вероятности $P(S)$ и отношения сигнал/шум.

Уравнение (8) имеет решение при любых параметрах сигнала. Это следует из того, что минимум левой части уравнения всегда равен нулю, так как при минимальном X_* подынтегральное выражение обращается в нуль, поскольку нулевой становится область ΔX_1 из (1). Правая часть этого уравнения при минимальном X_* отлична от нуля из-за условной вероятности (2). Предполагается, что параметр $A_0 \neq 0$, так как в противном случае $P(S) = 1$ (4) и обнаружение сигналов не имеет смысла. Если учесть, что левая и правая части уравнения (8) являются, соответственно, увеличивающейся и уменьшающейся функциями X_*, то ясно, что его решение существует. Аналогичное утверждение справедливо и для уравнения (13).

Итак, для оценки качества обнаружения можно использовать среднеквадратичную вероятность ошибочных решений (7). При этом существуют уравнения (8), (13), определяющие оптимальную пороговую величину, а алгоритм обнаружения (9) корректируется только из-за изменения пороговой величины. Общие соотношения для рассматриваемых критериев (3), (6), (7) не позволяют получить результаты, необходимые для сравнения качества. Поэтому полезно в качестве примеров рассмотреть некоторые классические задачи обнаружения.

Примеры

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала известной формы и сигнала со случайной начальной фазой [4, с. 186–214]. Такие сигналы определяются следующими выражениями

$$\alpha_1 s(t),\ \alpha_1 \exp(i\varphi) s(t) \text{ при } t \in [0, T_s] \text{ и 0 при иных } t. \quad (15)$$

Здесь α_1 – амплитуда сигнала, определяемого функцией $s(t)$, а φ – равновероятная случайная начальная фаза с априорной плотностью вероятности

$$p(\varphi|S) = \frac{1}{2\pi}. \quad (16)$$

Сигналы принимаются в аддитивной смеси с «белым» гауссовым шумом со спектральной плотностью мощности g_0. В оптимальном обнаружителе обработка сигнала производится оптимальным фильтром, согласованным с сигналом $s(t)$ из (15). Для принятия гипотез (9) и оценки качества обнаружения используется напряжение на выходе согласованного фильтра и амплитуда его в случае сигнала со случайной фазой [4, с. 190–193, 204–207]. Нормированные на величину $g_0\sqrt{\rho_s}$ эти напряжения обозначены далее ξ. Распределения случайной ξ для сигналов (15), (16) являются, как известно, гауссовым и обобщенным релеевским для сигналов со случайной начальной фазой [4, с. 192, 205].

Отношение сигнал/шум в них определяется для сигнальной функции из (15), т.е.

$$\rho_s = \frac{1}{g_0}\int_0^{T_s} s^2(t)dt.$$

В случае критерия Зигерта в соответствии с (4) имеем следующие уравнения [4, с. 427] для оптимальной пороговой величины ξ_{*1}

$$\lambda_g(\xi_{*1}) = A_0. \qquad (17)$$

Здесь $\lambda_g(\xi_{*1})$ – отношения правдоподобия (4) для сигналов (15), равные соответственно

$$\exp\left(-\frac{\alpha_1^2\rho_s}{2} + \xi_{*1}\alpha_1\sqrt{\rho_s}\right)$$

и

$$\exp\left(-\frac{\alpha_1^2\rho_s}{2}\right)I_0\left(\xi_{*1}\alpha_1\sqrt{\rho_s}\right), \qquad (18)$$

где $I_0(*)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Выше упоминалось, что уравнения оптимальной пороговой величины имеют решение при выполнении условия (14). Очевидно, что в случае известного сигнала отношение правдоподобия является монотонно увеличивающейся функцией ξ_{*1} с нулевым минимальным значением (18). Поэтому решение уравнения (17) существует при любых параметрах сигнала, и минимизация средней вероятности ошибки реальна. Для сигнала со случайной начальной фазой (15) минимальное значение отношения правдоподобия положительно (18). При этом минимум его убывает с увеличением отношения сигнал/шум. Поэтому оптимальные пороговые величины ξ_{*1} существуют при определенных параметрах сигналов.

Для критерия минимума среднеквадратичной вероятности ошибочных решений оптимальная пороговая величина ξ_{*2} определяется уравнением (8). Несложно показать, что для известного сигнала (15) получается следующее уравнение для ξ_{*2}

$$\begin{aligned}&\left[1+\Phi\left(\xi_{*2}-\alpha_1\sqrt{\rho_s}\right)\right]\exp\left(\xi_{*2}\alpha_1\sqrt{\rho_s}\right)=\\&= A_0\left[1-\Phi(\xi_{*2})\right]\exp\left(\alpha_1^2\rho_s/2\right),\end{aligned} \qquad (19)$$

а для сигнала со случайной начальной фазой (15), (16)

$$\begin{aligned}&\exp(-\alpha_1^2\rho_s)\int_0^{\xi_{*2}}\xi\exp(-\xi^2/2)\times\\&\times I_0\left[(\xi+\xi_{*2})\alpha_1\sqrt{\rho_s}\right]d\xi = A_0\exp(-\xi_{*2}^2/2).\end{aligned} \qquad (20)$$

В этих уравнениях A_0 – константа из (4), $\Phi(*)$ – интеграл вероятности. Очевидно, что левые части уравнений (19), (20) являются монотонно увеличивающимися функциями ξ_{*2} с нулевыми минимальными значениями, а правые части – монотонно убывающими до нуля функциями этой переменной. Следовательно, условие (14) выполняется, и эти уравнения имеют решения в случае сигналов с любыми параметрами.

В соответствии с уравнениями (17), (19), (20) для определенных отношений сигнал/шум и A_0 определялись оптимальные пороговые величины ξ_{*1} и ξ_{*2}, а затем, для критериев Зигерта и минимума среднеквадратичной вероятности ошибки, – минимальные значения вероятностей (3), (7). Результаты расчетов представлены на рис. 1 – 4 как функции априорной вероятности $P(S)$ для отношений сигнал/шум 3 и 13 дБ. Зависимости приведены для известного сигнала (рис. 1, 2) и сигнала с равновероятной начальной фазой (рис. 3, 4). На рисунках цифрой 1 обозначены зависимости минимума средней вероятности ошибки P_{11} из (3) для ξ_{*1} из уравнений (17), (18), а цифрой 3 – для минимума среднеквадратичной вероятности P_{22} из (7) для ξ_{*2} из уравнений (19), (20). Кроме этого, определялись средние вероятности ошибки (3) для пороговой величины ξ_{*2} – зависимости P_{12} (обозначены цифрой 4) и среднеквадратичные вероятности ошибки (7) для пороговой величины ξ_{*1} – зависимости P_{21} (обозначены цифрой 2).

Видим, что при отношении сигнал/шум 3дБ минимизация средней вероятности ошибки возможна при ограничениях априорной вероятности посылки сигнала. Априорная вероятность ограничена $P(S) < 0.7$ (рис. 2). Необходимо отметить, что из приведенных зависимостей следует необходимое соотношение вероятностей, при котором средняя вероятность ошибки P_{11} минимальна именно при ξ_{*1} (зависимости 1, 4), а среднеквадратичная вероятность ошибки P_{22} – при ξ_{*2} (зависимости 3, 2). Однако при минимизации средней вероятности ошибки P_{11} (критерий Зигерта) не контролируется рассеяние ошибок около их средней величины. Поэтому среднеквадратичная вероятность P_{21} при

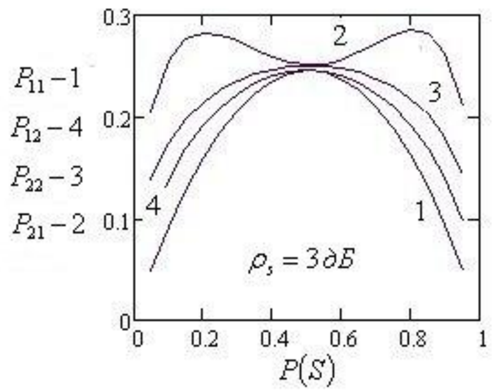

Рис. 1

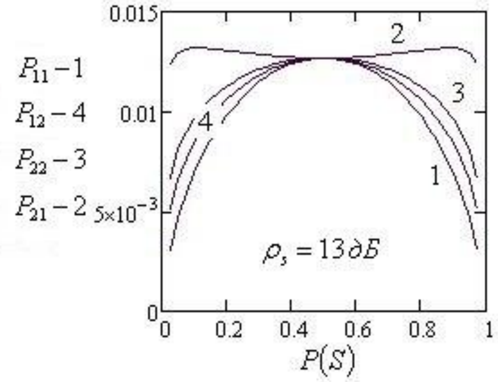

Рис. 2

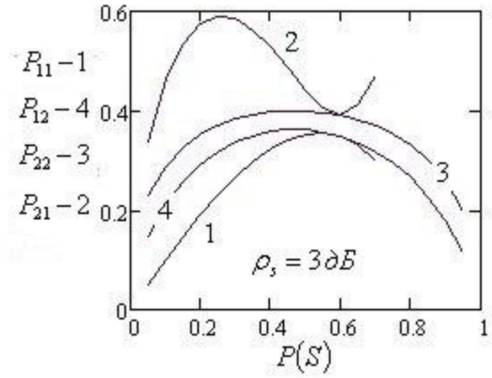

Рис. 3

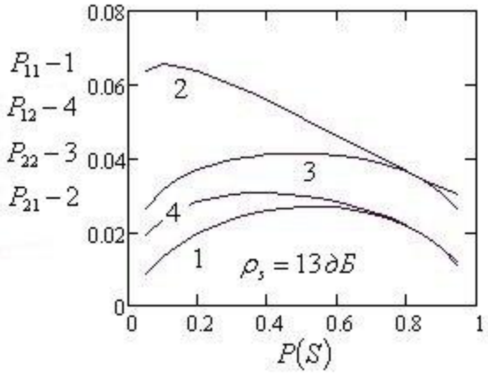

Рис. 4

оптимальной для средней вероятности P_{11} пороговой величине ξ_{*1} (зависимости 2) больше средних вероятностей при той же ξ_{*1} (зависимости 1). В случае модифицированного критерия ограничивается как средняя вероятность, так и дисперсия. Поэтому среднеквадратичная вероятность ошибки P_{22} при ξ_{*2} (зависимость 3) незначительно больше средней вероятности P_{11} при ξ_{*1} (зависимость 1) и существенно меньше среднеквадратичной вероятности P_{21} при ξ_{*1} (зависимость 2).

Таким образом, применение среднеквадратичной вероятности ошибки для оценки качества позволяет уменьшить область, в которой расположены реальные (условные) вероятности ошибок. Оценки показывают, что для рассматриваемых сигналов соотношение вероятностей P_{21}/P_{11} (зависимости 1, 2) равно в среднем 3 дБ, а при модифицированной оценке P_{22}/P_{12} уменьшается до 0.7 дБ (зависимости 3 и 4) на рис. 1, 2. С увеличением отношения сигнал/шум до 13 дБ эти отношения увеличиваются соответственно до 4 дБ и 1.7 дБ при существенно меньших вероятностях ошибок (рис. 3, 4), но таком же различии между ними.

Заключение

Из проведенного выше анализа следует, что более точной оценкой качества приема в задачах бинарного обнаружения сигналов является не средняя вероятность ошибки (3), а ее среднеквадратичная величина (7). При этом в отличие от минимизации средней вероятности ошибки минимизация среднеквадратичной вероятности ошибки позволяет ограничивать не только среднее значение вероятности ошибки, но и рассеяние ее около среднего. Поэтому, несмотря на некоторое увеличение средней вероятности ошибки (3) при неоптимальной для нее пороговой величине ξ_{*2} из уравнений (18), (19), существенно уменьшается среднеквадратичная вероятность ошибки (7) при оптимальной для нее пороговой величине ξ_{*2}. Таким образом, появляется возможность ограничения неконтролируемого в известных критериях параметра качества – случайного рассеяния вероятности около ее среднего значения. Эта особенность является существенной для модифицированного критерия. Она особенно наглядна в случае критерия Зигерта, когда минимизируется только среднее значение вероятности ошибочных решений. В этом случае разность между ней и среднеквадратичной вероятностью не рассматривается при минимизации и является произвольной величиной (зависимости 1, 2 на рис.1–4).

В случае модифицированного критерия рассеяние вероятности ошибки ограничивается и вероятность ошибочных решений уменьшается (зависимости 3, 4 на тех же рисунках). Таким образом, происходит смещение к единице области условных ошибок $\left(F, \langle 1-D \rangle_{\vec{\alpha}}\right)$ с одновременным уменьшением разности между ними. За счет смещения увеличивается среднее значение вероятности ошибок, а уменьшение разности приводит к снижению их рассеяния (рис.1 – 4).

Выполненные исследования показали, что, используя достаточно простые идеи и средства, можно с большей точностью определить качество бинарного обнаружения сигналов. При этом важно, что улучшение качества приема реализуется только за счет иной пороговой величины (8), (13), определяемой измененным критерием отношения правдоподобия. Структура оптимального обнаружителя и правило принятия решений при этом не изменяются, а уравнение пороговой величины имеет решение при любых значениях сигнальных параметров.

Выражаю благодарность профессору кафедры радиотехники ННГУ им. Н.И. Лобачевского, д.т.н. И.Я. Орлову за обсуждение работы и полезные советы.

Список литературы

1. Питерсон В.В., Бердсал Т.Дж., Фокс В.К. Теория обнаружения сигналов // Сб. переводов «Теория информации и ее приложения» / Пер. с англ. Б.И. Кувшинова. Под ред. А.А. Харкевича. М.: Изд-во физико-математической литературы, 1959.

2. Прокис Дж. Цифровая связь / Под ред. Д.Д. Кловского. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.

3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Пер. с англ. под ред. А.В. Назаренко. Изд. 2-е, испр. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. 1107 с.

4. Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Советское радио, 1960.

5. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи / Под ред. Б.Р. Левина. Т. 2. М.: Советское радио, 1962.

6. Уиттл П. Вероятность / Под ред. В.В. Сазонова. М.: Наука, 1982.

7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

8. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983.

ON A QUALITY CRITERION IN BINARY DETECTION PROBLEMS

M.V. Litvin

A possibility to modify the quality criterion in binary signal detection is studied. Instead of the detection error average probability, we used its root-mean-square (RMS) one containing both the error average probability and its variance. In this way the minimization of the RMS error probability makes it also possible to restrict the error probability dispersion near its mean value. As a result, the area of error probabilities is closer to zero, which indicates an improved quality of the detection. The equation of the optimal threshold value for the detection algorithm is determined. Examples with the modified quality criterion are considered and they are compared with the known quality criterion.

Keywords: error probability, probability of correct detection, false alarm probability, signal random parameter, detection algorithm, optimal threshold value, likelihood ratio, optimal filter.