

УДК 37.01

АКТУАЛИЗАЦИЯ ЭСТЕТИЧЕСКИХ МОТИВОВ УЧЕБНО-ПОИСКОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

© 2013 г.

М.А. Родионов

Пензенский госуниверситет

do7tor@rambler.ru

Поступила в редакцию 12.06.2013

Раскрываются возможности актуализации эстетической мотивации учебно-поисковой деятельности школьников. В основу выделения таких возможностей положена типология эстетически значимых математических конструкций. Их целенаправленное осознание школьниками осуществляется путем подключения эстетического критериального аппарата к механизму выбора направления поисковой работы, рассмотрения элементов школьного математического содержания, отличающихся особой наглядностью, «осязаемостью» и выразительностью, а также создания необычных ситуаций применения известных методов и их комбинаций при решении математических задач, выделения системы отношений, открывающей возможность реализации «неожиданных» аналогий и обобщений.

Ключевые слова: эстетическая мотивация, учебно-поисковая деятельность школьников, эстетические критерии выбора направления поискового процесса, эстетически значимая задачная ситуация, красота математических конструкций.

Введение

Целесообразность проведения самостоятельных исследований по проблеме реализации эстетической направленности учебно-поисковой деятельности школьников в процессе обучения математике обусловлена следующими обстоятельствами.

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего (полного) общего образования [1], одним из значимых личностных результатов освоения основной образовательной программы в любой предметной области должно стать эстетическое отношение к миру, выражающееся, в частности, в эстетике научного и технического творчества.

Актуализация эстетического компонента предметной деятельности придает процессу овладения этой деятельностью мотивационную обусловленность и насыщенную эмоциональную окраску, обеспечивая, таким образом, осознание личностной ценности приобретаемых знаний и приемов деятельности, их глубоко «человеческого», гуманистического характера. При этом одновременно происходит формирование эстетической критериальной основы, поддерживающей и обогащающей механизм выбора направления поисковой деятельности ([2; 3; 4] и др.).

В математике в силу ее абстрактности эстетический потенциал заложен гораздо «глубже», чем в других дисциплинах; и, чтобы актуализировать его, «вывести на поверхность», необходимо обладать хорошо развитым «чувством ма-

тематической красоты, гармонии чисел и форм, геометрической выразительности» [2, с. 143].

Из сказанного, в частности, вытекает необходимость специального рассмотрения возможностей актуализации эстетического потенциала школьного математического образования, играющего ведущую роль в функционировании мотивационной составляющей учебной математической деятельности.

Оценка реального состояния проблемы

В настоящее время сложилось несколько тенденций в реализации эстетической направленности школьных математических курсов.

В соответствии с первой точкой зрения, актуализация эстетического потенциала математики связывается в основном со знакомством учащихся с некоторыми математическими разделами, обладающими, по общепринятому мнению, наиболее ярко выраженной визуальной привлекательностью (симметрия, правильные многогранники, «золотое сечение», фракталы, магические квадраты, проекции, узоры, орнаменты и т.д.) ([5; 6; 7] и др.). В существующей практике обучения математике полноценная реализация данного подхода встречает существенные трудности, связанные в первую очередь с отрывом указанного содержания от основных дидактических ориентиров, прежде всего – характера подготовки к итоговой аттестации на том или ином этапе математического образования.

Другая позиция предполагает подспудное постижение красоты математических построе-

ний через такие особенности математики, как логическая стройность устанавливаемых закономерностей, четкость доказательств, определенность математического языка, универсальность и общность получаемых результатов ([4; 8; 9] и др.). При этом сам вопрос об эстетическом воспитании на уроках математики не нуждается в данном случае в специальном анализе, поскольку в описанной трактовке он полностью «растворяется» в других (традиционных) методических проблемах.

Третья точка зрения выражается в попытках связать внешним образом отдельные компоненты математической деятельности с эстетикой словесного или изобразительного творчества, восходящих еще к традициям восточной математики (сочинение стихов математического содержания, составление задач по материалу прочитанных книг, разгадка кроссвордов, демонстрация нереальных, невозможных геометрических конструкций и т.д.). Данный подход может играть мотивационную роль в ситуативном плане, сам по себе не обеспечивая длительного, устойчивого интереса к предмету.

Некоторыми методистами и учителями осуществлялись также попытки явного выделения для школьников существенных характеристик понятия красивой задачи и красивого решения ([10; 11; 12] и др.). Такая работа может осуществляться, например, в форме урока-диспута, на котором школьники в сотрудничестве с учителем, опираясь на привлекательные, с их точки зрения, задачные ситуации, конструируют соответствующую «формулу математической красоты». Описанный подход, очевидно, может быть реализован лишь для достаточно подготовленных учеников как итог длительной предваряющей работы в классе.

Несмотря на наличие довольно большого количества методических решений ([4; 5; 6; 8; 11; 13; 14] и др.), в известной нам методической литературе не представлено целостного подхода, позволяющего с системных позиций раскрыть роль эстетических мотивов в реализации учебно-поисковой деятельности на различных этапах и уровнях математического образования. Как следствие, в массовой школе направленность на актуализацию эстетического потенциала математического образования остается пока за пределами известных педагогических инноваций. У большинства учащихся практически не сформирован эстетический механизм выбора направления поисковой деятельности, они с большим трудом переключаются на новые, более эффективные способы действий, а сама математика до сих пор воспринимается многими

школьниками как сухая, «черствая», жестко регламентированная наука, являющаяся своеобразным антиподом художественного творчества. Об этом свидетельствуют литературные данные, беседы с учителями, результаты письменных работ и устных опросов, проведенных нами в ходе констатирующего эксперимента, а также личные наблюдения за ходом преподавания в ряде образовательных учреждений.

Основная часть

При рассмотрении данной проблемы возникает ряд вопросов, решение которых должно способствовать определению стратегии обучения школьников эстетике поисковой работы.

Первый вопрос касается того, что в математике можно считать красивым, какой математический объект обладает эстетической привлекательностью, а какой, наоборот, подспудно вызывает негативное отношение.

Изучение работ по методологии математического творчества многих выдающихся ученых (Ж. Адамар, Г. Биркгоф, Г. Вейль, К.Ф. Гаусс, Д. Гильберт, Ф. Клейн, Р. Курант, Дж. Литлвуд, Д. Пойа, А. Пуанкаре, Г.Х. Харди и др.) ([2; 10; 15; 16; 17; 18; 19] и др.) показывает, что эстетически привлекательный объект для математического исследования (понятие, факт, теорема, задача, способ рассуждения) должен обладать следующими характеристиками:

- контраст между внешней простотой и внутренней глубиной содержания;
- порядок, гармония, симметрия;
- неожиданность представления.

Указанные параметры позволяют достаточно четко определить место той или иной математической конструкции в общей иерархии с точки зрения ее эстетической значимости, которая определяется наличием у нее одного или нескольких выделенных нами качеств. Визуально данная иерархия может быть представлена в виде следующей диаграммы (рис. 1).

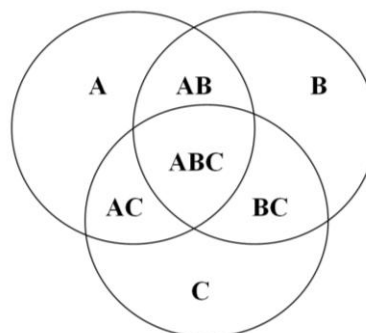


Рис. 1. Уровни эстетичности математических конструкций

Эстетически ценные математические конструкции первого уровня (эстетика фона) обладают одним из выделенных трех параметров (контрастность, симметрия, неожиданность). Например, зачастую та или иная задача из-за кажущейся громоздкости условия сначала отпугивает учеников, но если ее решение, напротив, наглядно и просто, то в результате они изменяют свое отношение к ней, отражая в своем сознании конечную эмоционально привлекательную сторону процесса решения. Подобные эстетические чувства вызывают также задачи, в результате решения которых получен ответ, в корне отличный от ожидаемого.

Второму уровню (эстетика процесса) соответствуют конструкции, обладающие двумя из выделенных нами параметров. Его, очевидно, занимают объекты трех типов. В практику учебно-познавательной деятельности объекты данного уровня начинают включаться в основном в виде заданий на повышение эстетичности математических конструкций путем использования различных эвристических приемов, доступных школьникам на соответствующем этапе их подготовки.

Наиболее эстетически совершенной с математической точки зрения конструкцией, принадлежащей высокому уровню эстетичности, является та, которая обладает всеми тремя качествами (критериальная эстетика).

Выделенные виды эстетичности в их соотношении с характером математической деятельности, доступной для реализации детям соответствующего возраста и предметной подготовки, могут быть положены в основу определения содержания работы по их приобщению к эстетике математического творчества.

Вторым вопросом, связанным с обеспечением эстетической направленности математической деятельности, является вопрос о том, как, в каком качестве и начиная с какого этапа подготовки математическую эстетику целесообразно доводить до школьников.

В рассматриваемом контексте представляется целесообразным выделить внешнюю (или чувственную) эстетику, которую некоторые авторы подразделяют на эстетику геометрических форм и эстетику аналитической записи; процессуальную эстетику, олицетворяющую «поэзию творческого преодоления интеллектуальных затруднений», и, наконец, внутреннюю эстетику математической деятельности, являющуюся выражением синтеза двух предыдущих феноменов. Все указанные эстетические факторы не существуют в изолированном виде, они постоянно взаимодействуют и взаимообогащают друг

друга. При этом на различных уровнях математической подготовки ведущее место занимают разные сочетания этих факторов.

Так, на начальном уровне работы с детьми основной задачей учителя в рассматриваемом ключе является представление математического материала в зримой, осязаемой форме, с тем чтобы вызвать у школьников чувственные, яркие переживания, затрагивающие сферу как сознательного, так и бессознательного. Основными средствами такого представления являются яркие, выразительные картинки; четкие лаконичные формулировки математических законов; красиво сделанные модели и рисунки геометрических фигур; компактные и вместе с тем емкие схемы и таблицы, отражающие существенные взаимосвязи между компонентами рассматриваемых задачных ситуаций. Большую роль в формировании позитивного отношения к предмету здесь играют задачи, содержащие элементы занимательности (либо в форме подачи материала, либо в сюжете).

Использование всех указанных средств создает своеобразный эстетически привлекательный фон по отношению к основной линии изложения, ситуативно поддерживающий в учениках «тягу» к открытию для себя новых фактов и закономерностей.

На следующем уровне внешняя эстетическая направленность процесса обучения математике выражается в выделении в математическом содержании элементов, отличающихся своей выразительностью, красотой, симметричностью и одновременно богатством проявлений в живой и неживой природе, искусстве. К таким элементам относят вопросы о золотой спирали и золотой пропорции, фракталах, построении орнаментов, «музыке логарифмов» и некоторые другие (как правило, не входящие непосредственно в основное содержание базовых и углубленных математических курсов).

Наряду с «эстетикой формы», на рассматриваемом этапе немаловажную роль начинает играть «процессуальная эстетика» ([4; 9; 11] и др.). Последняя выражается в красоте и эстетичности самого поиска решения, неожиданности применяемых методов, в опоре не на стереотипные приемы, а на достаточно простые и вместе с тем значительно ускоряющие ход решения идеи и эвристические процедуры.

При этом на рассматриваемом этапе эстетика процесса и эстетика формы присутствуют в ходе учения еще изолированно друг от друга. Соответственно, преподавателю в каждом случае целесообразно в той или иной форме обращать внимание детей на изящество и красоту

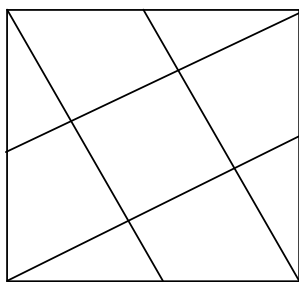


Рис. 2

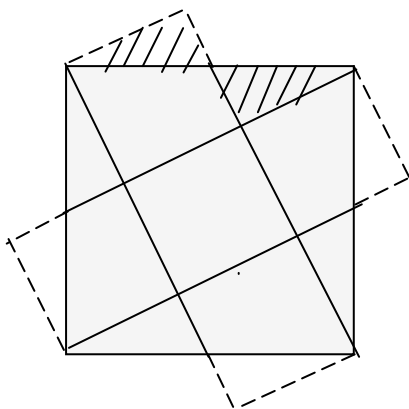


Рис. 3

того вопроса, который в данный момент рассматривается, заставлять его понять, что он не пожалеет, затратив усилия на предлагаемую задачу.

К одной из таких форм относится неожиданность результата анализа геометрических, алгебраических и числовых конструкций. Однако для того, чтобы тот или иной факт предстал перед учеником во всей своей «неожиданной простоте», необходима специальная организация его самостоятельной деятельности по обобщению эмпирически полученных результатов измерений, построений и вычислений. Преподавателю здесь важно эмоционально оттенить для учащихся сам момент «рождения» плодотворной гипотезы, с тем чтобы подкрепить возникающее у них предчувствие открытия.

Расстановка соответствующих акцентов в процессе математической подготовки школьников способствует усилению роли эстетических соображений в поисковой работе, где они постепенно приобретают функцию специальных эвристических процедур.

Рассмотрим простой пример [20].

Пример 1. В квадрате приведены отрезки, соединяющие его вершины с серединами сторон, как показано на Рисунке 2. Какую часть составляет площадь меньшего квадрата от площади исходного квадрата?

Основная идея решения этой не совсем тривиальной задачи может состоять в достраивании геометрической конструкции, заключенной во внешнем квадрате до фигуры, обладающей большим «количеством симметрий», чем исходная.

Такой фигурой, в частности, является «крест», изображенный на Рисунке 3. В этом «кресте» пять равных квадратов, общая площадь которых равна площади исходного внешнего квадрата (это вытекает из равенства соответствующих пар прямоугольных треугольников). Таким образом, получаем, что площадь меньшего квадрата будет составлять $\frac{1}{5}$ площади «креста» и соответственно $\frac{1}{5}$ площади внешнего квадрата (аналогичные соображения могут быть реализованы и для ромба).

Эстетическое значение данной задачи проистекает из двух моментов. Во-первых, при ее исследовании именно стремление к «гармонии целого и частей» подсказывает ученику эффективный путь решения. Во-вторых, важной особенностью задачи является неожиданность получения конкретного числового результата, казалось бы, никак не вытекающего из условия, поскольку оно не содержит в явном виде никаких числовых данных. Указанные условия обеспечивают эстетическую привлекательность для школьников рассматриваемого материала, внося тем самым определенный вклад в их эстетическое воспитание.

В качестве более продвинутого примера создания «ситуации неожиданности» рассмотрим довольно известную «задачу о неутомимом червяке», в которой в духе парадоксов Зенона, рассматривается процесс равномерного растягивания жгута по мере движения вдоль него «червяка» (автор задачи – Д. Уилкин (Новая Каледония) [21]). Решение данной задачи может быть предложено старшеклассникам либо в виде индивидуального исследовательского проекта, либо как предмет совместного исследовательского поиска на уроке.

Пример 2. Червяк находится на одном конце резинового жгута, который может неограниченно растягиваться. Первоначально жгут имеет длину ровно 1 км. Червяк ползет к другому концу жгута с постоянной скоростью 1 см/с. В конце каждой секунды жгут скачком удлиняется на 1 км. Доберется ли червяк когда-нибудь до другого конца резинового жгута? Если да, то через какой промежуток времени и какой длины будет жгут к тому моменту, когда червяк финиширует? (рис. 4).



Рис. 4

Решение.

Продвижение червяка в долях полной длины жгута равно $\frac{1}{100000}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$. Как только сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ станет больше 100000, приведенное выражение превысит единицу, а это означает, что червяк доползает до конца жгута.

Число n равно числу секунд, истекших после отправления червяка в путь, оно равно также длине жгута (к концу n -ой секунды) в километрах.

Время, которое понадобится червяку, чтобы доползти до конца жгута, можно найти из неравенства: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) \geq 100000$, откуда имеем: $C + \ln n \approx 100000$, где C – постоянная Эйлера. C точно до одной секунды.

$n = e^{100000-C} \pm 1$, $\ln n = (10^5 - C) \lg e$, где $\lg e = M = 0.4642944$ (модуль перехода).

Тогда $\ln n = 43425,15$. $n = 10^{43429}$.

Ответ: червяк доползет до другого конца резинового жгута.

Каких же размеров достигнет длина резинового жгута? Если бы жгут в начальном состоянии имел поперечное сечение в 1 км^2 , то в конце он представлял бы собой «пунктир» из отдельных атомов, выстроенных вдоль прямой, причем расстояния между соседними атомами во много раз превосходили бы размеры известной ныне Вселенной. Время же пути, преодоленного червяком, существенно превысило бы ее возраст, по современным научным оценкам.

Решение этой задачи поражает воображение «неожиданной простотой», которая выражается как в самом результате (червяк достигнет конца жгута), так и в связанных с ним огромных количественных характеристиках (итоговая длина жгута и время движения червяка), совершенно не согласующихся с привычной системой житейских представлений.

На высшем из выделяемых уровней широкое использование исследовательского метода в корне изменяет восприятие учениками эстетических качеств математической науки. В частности, они здесь получают возможность убедиться в том, что решение любой хорошо поставленной «естественной» задачи обычно оканчивается красивым ([2; 10; 22] и др.). Таким образом, процесс учения на рассматриваемом уровне характеризуется синтезом внешней и

процессуальной эстетики. Результатом такого синтеза являются попытки использования эстетических критериев даже при решении задач, внешне не выделяющихся особой выразительностью. На данном этапе четко проявляется направленность школьников на поиск новых, более логически совершенных способов доказательства теорем и решения задач, на представление результатов решения в наиболее общем и экономичном виде, включающем в себя все многообразие возможных частных случаев.

При этом само понимание математической красоты начинает связываться с такими характеристиками решения, как «экономность», «оптимальность», «рациональность». Эти характеристики могут быть актуализированы через сам характер подачи материала, в котором должна быть заложена возможность альтернативного рассмотрения той или иной проблемной ситуации и применения при этом различных способов ее разрешения, сопровождаемых выбором наиболее «красивого» в данной конкретной ситуации подхода.

Наиболее эффективно реализуется данный подход в том случае, когда школьники сами конструируют задачи, в том или ином смысле родственные некоторой исходной. Основными ориентирами для выбора направления такого конструирования служат возможности обобщения или перестройки исходной задачной ситуации и получения на этой основе новых эстетически привлекательных задачных ситуаций. Особенности реализации такой работы описаны нами в ряде учебных пособий и статей ([9; 23; 24] и др.).

Заключение

Таким образом, эстетическая мотивация учебно-поисковой математической деятельности характеризуется наличием осознанного, внутренне обусловленного стремления школьника к максимально простым, упорядоченным, естественным, выразительным и одновременно неожиданным, с точки зрения устоявшейся системы предметных понятий и образов, формам представления материала и связанным с ними способам математической деятельности. Такое стремление выражается, в частности, в направленности на поиск новых, более совершенных и логически безупречных способов доказательства теорем и решения задач, на представление результатов решения в наиболее общем и универсальном виде, включающем все многообразие возможных частных случаев.

Указанные характеристики могут актуализироваться в учебной деятельности школьников по овладению ими изучаемым математическим содержанием при соблюдении ряда условий:

1) направленность учебного процесса на целенаправленное подключение эстетического критериального аппарата к механизму выбора направления поисковой работы;

2) актуализация элементов школьного математического содержания, отличающихся особой наглядностью, «освязаемостью» и выразительностью;

3) создание необычных ситуаций применения известных методов и их комбинаций; выделение системы отношений, открывающей возможность реализации «неожиданных» аналогий и обобщений.

Реализация выделенных условий может быть произведена в процессе решения специальным образом подобранных математических задач. Однако для того чтобы та или иная задача предстала перед школьником во всей своей «неожиданной простоте», необходима целенаправленная работа по распознаванию эстетически значимых ситуаций, исследование которых способствует осознанию эстетики математического творчества как своеобразного катализатора реализуемого поискового процесса.

Список литературы

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. – URL: минобрнауки.рф/документы/2365 (дата обращения 15.04.2013).
2. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1990. 736 с.
3. Родионов М.А. Мотивационная составляющая математического образования и особенности ее формирования // Успехи современного естествознания. 2003. № 11. С. 130.
4. Саранцев Г.И. Эстетическая мотивация в обучении математике. Саранск: ПО РАО, Мордов. пед. ин-т, 2003. 136 с.
5. Азевич А.И. Двадцать уроков гармонии: Гуманитарно-математический курс. М.: Школа-Пресс, 1998. 160 с.
6. Гусева Н.В. К вопросу о модели эстетического потенциала школьного курса математики // Гуманизация и гуманитаризация математического образования в школе и вузе: Материалы Всерос. конф. Саранск: Морд. гос. пед. ин-т, 1998. С. 55–57.
7. Гончаров И.Ф. Школьникам о красоте математики // Математика в школе. 1970. № 6. С. 41–43.
8. Зенкевич И.Г. Эстетика урока математики: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1981. 79 с.
9. Родионов М.А., Ликсина Е.В. Эстетическая направленность обучения математике. Пенза: ПГПУ, 2002. 175 с.
10. Болтянский В.Г. Математическая культура и эстетика // Математика в школе. 1982. № 2. С. 40–43.
11. Рощина Н.Л. О воспитании эстетического вкуса учащихся при решении планиметрических задач // Математика в школе. 1997. № 2. С. 4–7.
12. Якир М.С. Что же такое красивая задача? // Математика в школе. 1989. № 6. С. 41–46.
13. Смирнова Е.С., Леонидова Н.А. Математическое путешествие в мир гармонии // Математика в школе. 1993. № 3. С. 60–63.
14. Тарасов Л. Этот удивительно симметричный мир. М.: Просвещение, 1982. 176 с.
15. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Сов. радио, 1970. 152 с.
16. Александров П.С. Теория размерности и смежные вопросы: статьи общего характера. М.: Наука, 1978. 432 с.
17. Белл Э.Т. Творцы математики: предшественники современной математики: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1979. 256 с.
18. Биркгоф Г. Математика и психология. М.: Сов. радио, 1977. 96 с.
19. Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989. 400 с.
20. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М.: Наука, 1981. 160 с.
21. Родионов М.А., Пендюрин А.И. Логарифмы: Учебно-методическое пособие. Пенза: Поволжск. отд. РАО – ПГПУ, 2001. 90 с.
22. Родионов М.А. Мотивация учения математике. От теоретического осмысления к практической реализации: Монография. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2012. 252 p.
23. Родионов М.А., Марина Е.В. Формирование вариативного мышления при решении задач на построение. Пенза: ПГПУ, 2006. 95 с.
24. Rodionov M., Velmisova S. Development of the theme in the process of geometrical problems solution // Romai Educational Journal. 2009. Vol. 4. P. 13–18.

ACTUALIZATION OF AESTHETIC MOTIVES OF PUPILS' SEARCH AND LEARNING ACTIVITY IN THE TEACHING OF MATHEMATICS

M.A. Rodionov

We consider some possibilities for actualization of aesthetic motivation of pupils' search and learning activity. A model of aesthetically significant mathematical constructs provides the basis for realizing such possibilities. To achieve the pupils' understanding of such constructs, a set of aesthetic criteria is included in the mechanism for selecting the direction of search; some particularly expressive and "tangible" elements of school mathematics content are considered; unusual situations are created where the known techniques and their combinations are used to solve mathematical problems and to identify a system of relations that reveals the possibility of implementing "unexpected" analogies and generalizations.

Keywords: aesthetic motivation, pupils' search and learning activity, aesthetic criteria for the choice of search process direction, aesthetically significant problem situation, beauty of mathematical constructs.