

УДК 534.2

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТАТИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПО РАЗМЕРАМ НА СРЕДНЮЮ ИНТЕНСИВНОСТЬ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

© 2014 г.

*И.Ю. Грязнова, Е.Н. Иващенко*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

[gryaznova@rf.unn.ru](mailto:gryaznova@rf.unn.ru)

Поступила в редакцию 28.10.2013

Исследуется зависимость средней интенсивности обратного рассеяния акустических волн от среднего размера дискретных рассеивателей и дисперсии их распределения по размерам. Рассматривается влияние статистики распределения неоднородностей по размерам на интерференционную составляющую средней интенсивности обратного рассеяния, возникающую при учете отражения от поверхности дна, на которой располагаются рассеиватели.

*Ключевые слова:* обратное рассеяние акустических волн, дискретные неоднородности, статистическое распределение рассеивателей по размерам.

Необходимость исследования эффектов обратного рассеяния на дискретных неоднородностях вызвана широким спектром задач в различных областях физики. К ним относятся рассеяние акустических сигналов на газовых пузырьках и дискретных донных неоднородностях океана, таких как железомарганцевые конкреции, рассеяние радиоволн на атмосферных осадках, рассеяние электромагнитных волн на электронах в плазме, рассеяние нейтронов на полидисперсных системах рассеивателей [1–3].

Рассмотрим задачу дистанционного акустического зондирования дискретных неоднородностей, расположенных случайным образом на слабо отражающем плоском дне. Поместим преобразователь, работающий в качестве излучателя и приёмника, в точку на высоте  $h$  над поверхностью дна, на которой хаотическим образом расположены дискретные неоднородности (рис. 1).

Сначала рассмотрим случай звукопрозрачного дна. Обозначим коэффициент обратного рассеяния акустической волны на уединённой частице  $\alpha(ka)$ , где  $a$  – ее характерный размер,  $k$  – волновое число. Тогда акустическое поле, рассеянное  $i$ -й неоднородностью, будет иметь следующий вид:

$$p_i = \frac{|\alpha(ka)|A_0}{R_i^2} D^2(\theta) e^{2ikR_i}, \quad (1)$$

где  $A_0$  – амплитуда излучаемой волны,  $R_i = \sqrt{h^2 + r_i^2}$  – расстояние от  $i$ -го рассеивателя до преобразователя.

Диаграмму направленности преобразователя в зоне Фраунгофера будем аппроксимировать гауссовой кривой:

$$D(\theta) = \exp(-\theta^2 / \theta_0^2), \quad (2)$$

где  $\theta_0$  – ширина основного лепестка диаграммы направленности, по порядку величины равная отношению длины волны  $\lambda$  к апертуре преобразователя  $d$ .

Суммарное поле, рассеянное в обратном направлении  $N$  одинаковыми неоднородностями, будет выглядеть следующим образом:

$$p = |\alpha(ka)|A_0 \sum_{i=1}^N \frac{1}{h^2 + r_i^2} \times \exp\left\{-2\left(\frac{r_i d}{h\lambda}\right)^2 + 2ik\sqrt{h^2 + r_i^2}\right\}, \quad (3)$$

где  $N$  – число неоднородностей,  $r_i$  – проекция вектора  $R_i$  на плоскость дна.

При условии  $h^2 \gg r_i^2$  можно не учитывать в знаменателе формулы (3) вклад  $r_i^2$ , а в фазе можем воспользоваться разложением  $R_i$  в ряд Тейлора. В результате выражение (3) будет иметь вид:

$$p = \frac{|\alpha(ka)|A_0}{h^2} \times \sum_{i=1}^N \exp\left\{-2\left(\frac{r_i d}{h\lambda}\right)^2 + 2ikh\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_i}{h}\right)^2\right)\right\}. \quad (4)$$

Выражение для среднего поля, рассеянного совокупностью неоднородностей, можно вычислить следующим образом:

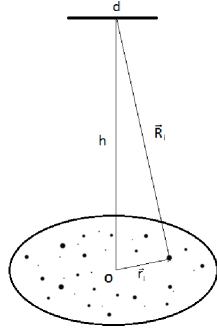


Рис. 1. Геометрия задачи:  $d$  – апертура антенны;  $h$  – глубина,  $R_i$  – расстояние от преобразователя до  $i$ -й неоднородности

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= |\alpha(ka)| A_0 N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ikR}}{R^2} e^{-2\left(\frac{rd}{h\lambda}\right)^2} W(r) dr \approx \\ &\approx \frac{iA_0 \alpha(ka) n \lambda}{2h} e^{2ikh} = \frac{iA_0 \alpha(ka) n \pi}{hk} e^{2ikh}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $R = \sqrt{h^2 + r^2}$ ,  $n$  – поверхностная концентрация дискретных неоднородностей.

Здесь усреднение ведется по одноточечной функции распределения  $W(r)$ , которую при хаотическом, но в среднем равномерном расположении неоднородностей по плоскости дна можно считать постоянной. Таким образом, среднее поле акустической волны, рассеянной на совокупности хаотически расположенных по плоскости дна рассеивателей, определяется параметрами падающей волны, концентрацией неоднородностей и глубиной их залегания, а также коэффициентом рассеяния на отдельной частице.

Для нахождения средней интенсивности обратно рассеянного поля в приближении однократного рассеяния воспользуемся соотношением (4) для полей, рассеянных  $i$ -й и  $j$ -й частицами [4]:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \langle p_i p_j^* \rangle = \left( \frac{|\alpha(ka)| A_0}{h^2} \right)^2 \times \\ &\times \sum_{i=1, j=1}^N \exp \left\{ - \left( \frac{r_i}{h} \right)^2 \left( 2 \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 - ikh \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{r_j}{h} \right)^2 \left( 2 \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 + ikh \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Представим выражение (6) в виде суммы двух слагаемых (при  $i=j$  и  $i \neq j$ ) и, полагая число слагаемых бесконечно большим, перейдем от суммирования к интегрированию:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \left( \frac{|\alpha(ka)| A_0}{h^2} \right)^2 \left( N \int_{-\infty}^{+\infty} W(\vec{r}_i) e^{-4\left(\frac{r_i d}{h\lambda}\right)^2} d\vec{r}_i + \right. \\ &\quad \left. + (N^2 - N) \int_{-\infty}^{+\infty} W(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \exp \left\{ - \left( \frac{r_i}{h} \right)^2 \left( 2 \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 - ikh \right) - \right. \right. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\left. - \left( \frac{r_j}{h} \right)^2 \left( 2 \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 + ikh \right) \right\} d\vec{r}_i d\vec{r}_j \right).$$

Положения отдельных рассеивателей будем считать независимыми, что позволит представить бинарную функцию распределения как произведение одноточечных функций распределения:

$$W(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = W(\vec{r}_i) W(\vec{r}_j). \quad (8)$$

Тогда выражение для средней интенсивности рассеянного на совокупности дискретных неоднородностей сигнала примет вид:

$$\langle I \rangle = \left( \frac{|\alpha(ka)| \lambda A_0}{2h} \right)^2 \left( \frac{\pi n}{d^2} + n^2 \right), \quad (9)$$

где  $n$  – средняя поверхностная концентрация неоднородностей [5]. Из выражения (9) следует, что средняя интенсивность является суммой когерентной и некогерентной компонент. Некогерентная составляющая представляет из себя сумму интенсивностей сигналов, приходящих от отдельных рассеивателей, вклад ее пропорционален числу рассеивателей. Когерентная же компонента суммирует поля с учетом их фаз, она будет доминировать при больших концентрациях рассеивателей.

Однако результаты физического моделирования не подтвердили монотонный рост средней интенсивности рассеянного сигнала с увеличением средней концентрации имитаторов неоднородностей [5, 6], что свидетельствовало о том, что при описании реальных экспериментов необходимо рассчитывать среднюю интенсивность обратного рассеяния с учетом сигнала, отраженного от подстилающего рассеивателя дна. В этом случае исследуемый сигнал является суммой отраженного дном  $p_o$  и рассеянного неоднородностями  $p_n$  полей:  $p = p_o + p_n$ .

Запишем коэффициент отражения от плоскости дна  $V = V_0 \exp(i\varphi_v)$ , его модуль и фаза будут определяться плотностью, скоростью звука и коэффициентом его затухания в подложке. Коэффициент обратного рассеяния на отдельной частице представим аналогичным образом  $\alpha(ka) = \alpha_0(ka) \exp(i\varphi_\alpha(ka))$ . Учтем также, что эффективный центр рассеяния находится в центре неоднородности, т.е. на расстоянии  $a$  от плоскости дна. Тогда кроме суммы интенсивностей сигналов, отраженного от «чистого» дна и рассеянного неоднородностями, в выражении для средней интенсивности обратного рассеяния возникает слагаемое  $I_{um}$  [5], описывающее интерференцию их когерентных компонент:

$$\langle I \rangle = \left( \frac{A_0}{2h} \right)^2 \left\{ (\alpha_0 \lambda)^2 \left( \frac{\pi n}{d^2} + n^2 \right) + V_0^2 + \right.$$

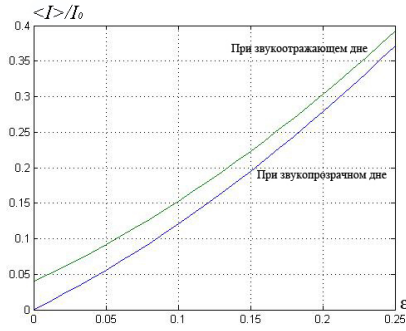


Рис. 2. Зависимость средней интенсивности обратного рассеяния от коэффициента упаковки неоднородностей при звукопрозрачном и звукоотражающем дне, где  $I_0 = (A_0\lambda/2h)^2$

$$+ 2V_0\alpha_0(ka)\lambda n \sin(2ka + \varphi_v - \varphi_\alpha) \Big\}, \quad (10)$$

$$I_{инт} = 2\left(\frac{A_0}{2h}\right)^2 V_0\alpha_0(ka)\lambda n \sin(2ka + \varphi_v - \varphi_\alpha).$$

Рассеяние от многих тел, имеющих сложную форму, можно описать, используя результаты рассеяния для сфер [8], поэтому будем аппроксимировать каждую рассеивающую частицу абсолютно жесткой сферой радиуса  $a$ . В работе [5] было предложено использовать для коэффициента обратного рассеяния на уединенной абсолютно жесткой сфере  $\alpha(ka)$  следующие функции:

$$\alpha(ka) = \frac{a}{2} \exp(-i(2ka + \varphi_0)) \quad \text{при } ka \gg 1; \quad (11)$$

$$\alpha(ka) = -i\frac{a}{2}(ka)^2 \quad \text{при } ka < 1.$$

Если волновой размер неоднородностей  $ka \approx 1$ , модуль коэффициента обратного рассеяния на уединенной сфере можно считать равным

$$|\alpha(ka)| = \frac{a}{2}. \quad (12)$$

Заметим, что коэффициент обратного рассеяния на уединенной сфере  $\alpha(ka)$  оказался размерным вследствие того, что коэффициент геометрической расходимости волны  $1/R$  был заранее учтен в формуле (1). Так что безразмерный коэффициент рассеяния на сфере можно приблизительно считать равным  $\alpha(ka)/h$ .

На рис. 2 представлено сравнение зависимостей средней интенсивности обратного рассеяния от коэффициента упаковки одинаковых абсолютно жестких сфер ( $ka \approx 1$ ) при учете отражения от подложки и при звукопрозрачном дне. Видно, что при малых концентрациях рассеивателей наличие сигнала, отраженного от дна, приводит к значительному увеличению средней интенсивности обратного рассеяния по сравнению с интенсивностью сигнала, отраженного только от неоднородностей (9).

Заметим, что все приведенные выше рассуждения относились к рассеянию на неоднородностях одинакового размера.

В качестве моделей распределения неоднородностей по размерам будем использовать распределение Гаусса

$$W(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(a-a_0)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (13)$$

где  $a_0$  – среднее значение,  $\sigma^2$  – дисперсия, и распределение Рэля

$$W(a) = \frac{a}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (14)$$

где  $\sigma$  – параметр, связанный с средним значением следующим образом:

$$a_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma. \quad (15)$$

Именно рэлеевское распределение рассеивателей по размерам наблюдается в задаче обнаружения железомарганцевых конкреций [1].

Для оценки изменений, к которым приводит наличие рассеивателей разных размеров, сначала предположим, что подстилающее неоднородности дно звукопрозрачно, а среднее число рассеивающих сфер на единичной площадке неизменно. Тогда для распределения (14) средняя интенсивность обратного рассеяния при  $ka > 1$  равна

$$\langle I_{Рэл} \rangle = \left(\frac{A_0\lambda}{4h}\right)^2 \left\{ \frac{\pi n}{d^2} + n^2 \right\} \int_0^\infty \frac{a^3}{2\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} da =$$

$$= \left(\frac{A_0\lambda}{4h}\right)^2 \left\{ \frac{\pi n}{d^2} + n^2 \right\} 2\sigma^2. \quad (16)$$

Учтем соотношение (15), тогда выражение (16) примет вид

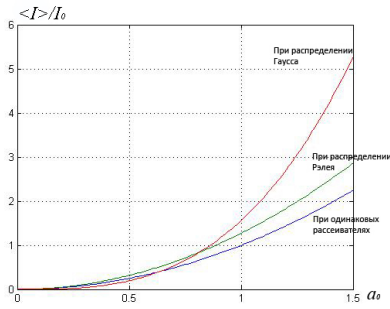
$$\langle I_{Рэл} \rangle = \left(\frac{A_0\lambda}{4h}\right)^2 \left\{ \frac{\pi n}{d^2} + n^2 \right\} \frac{4a_0^2}{\pi}, \quad (17)$$

где  $a_0$  – средний радиус рассеивателей.

Для случая нормального распределения рассеивателей по размерам (13) выражение для средней интенсивности будет выглядеть следующим образом:

$$\langle I_{Гаусс} \rangle = \left(\frac{A_0\lambda}{4h}\right)^2 \left\{ \frac{\pi n}{d^2} + n^2 \right\} \int_0^\infty \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(a-a_0)^2}{2\sigma^2}} da. \quad (18)$$

На рис. 3 представлена зависимость средней интенсивности поля обратного рассеяния от среднего размера рассеивателей. Показано, что наличие рассеивателей разных размеров приводит к увеличению средней интенсивности поля, отраженного от дискретных неоднородностей. Анализ выражения (18) позволяет также говорить о росте средней интенсивности при увеличении среднеквадратичного отклонения (рис. 4).



С

Рис. 3. Зависимость средней интенсивности поля обратного рассеяния от среднего размера рассеивателей

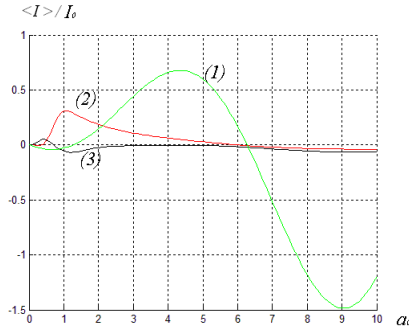


Рис. 5. Зависимость интерференционного слагаемого средней интенсивности поля обратного рассеяния от среднего размера рассеивателей: (1) – при одинаковых размерах (амплитуда уменьшена в 6 раз), (2) – при распределении Рэлея ( $\sigma = a_0$ ), (3) – при распределении Гаусса ( $\sigma = a_0$ ), где  $I_{\text{инт}0} = (A_0/2h)^2 \lambda n V_0$

Для вычисления средней интенсивности обратного рассеяния с учётом влияния сигнала, отраженного дном, запишем выражения лишь для интерференционного члена средней интенсивности (10). При распределениях неоднородностей по размерам, заданных выражениями (14) и (13) соответственно, он будет иметь следующий вид

$$I_{\text{инт}}^{Pэл} = \left(\frac{A_0}{2h}\right)^2 \lambda n V_0 \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{a^2}{2\sigma^2} (ka)^2 \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right\} \times \\ \times \sin(2ka + \varphi_0) da, \\ \text{при } ka < 1; \\ \int_0^{\infty} \frac{a^2}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right\} \times \\ \times \sin(2ka + \varphi_0) da, \\ \text{при } ka \geq 1; \end{cases} \quad (19)$$

$$I_{\text{инт}}^{Гauss} = \left(\frac{A_0}{2h}\right)^2 \lambda n V_0 \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi\sigma}} (ka)^2 \exp\{-(a-a_0)^2\} \times \\ \times (2\sigma^2)^{-1} \sin(2ka + \varphi_0), \\ \text{при } ka < 1; \\ \int_0^{\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\{-(a-a_0)^2\} \times \\ \times (2\sigma^2)^{-1} \sin(2ka + \varphi_0), \\ \text{при } ka \geq 1. \end{cases} \quad (20)$$

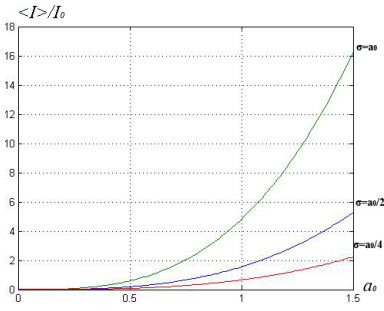


Рис. 4. Зависимость средней интенсивности поля обратного рассеяния при гауссовом распределении неоднородностей по размерам

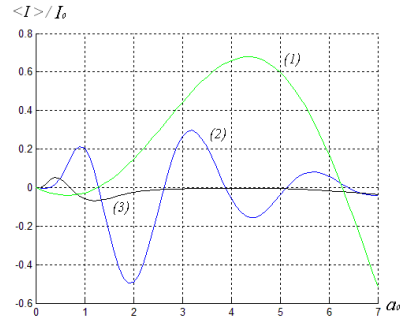


Рис. 6. Зависимость интерференционного слагаемого средней интенсивности поля обратного рассеяния от среднего размера рассеивателей: (1) – при одинаковых размерах (амплитуда уменьшена в 6 раз), (2) – при распределении Гаусса ( $\sigma = 0.5a_0$ ), (3) – при распределении Гаусса ( $\sigma = a_0$ )

На рис. 5, 6 представлена зависимость интерференционного слагаемого от среднего радиуса рассеивателей при двух вариантах распределений неоднородностей по размерам, а также для сравнения – при одинаковых размерах неоднородностей. Результаты численного моделирования показывают уменьшение интерференционных слагаемых в случае разных размеров рассеивателей при увеличении их среднего размера. Качественно этот эффект может быть объяснен тем, что наличие неоднородностей разных размеров, располагающихся на одной плоскости, приводит к «размыванию» фазовых соотношений рассеянных сигналов, в результате не происходит эффективного сложения с отраженным от подложки сигналом. Таким образом, при существовании некоторого распределения по размерам рассеивающих дискретных донных неоднородностей влиянием интерференционных эффектов можно пренебречь, что существенно упрощает решение обратной задачи.

*Работа выполнена при поддержке гранта государственной поддержки ведущих научных школ НШ-333.2012.2.*

#### Список литературы

1. Бунчук А.В., Ивакин А.Н. Энергетические характеристики эхосигнала от дискретных рассеивателей дна океана // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 1. С. 8–18.

2. Алексеев В.Н., Рыбак С.А. Влияние распределения пузырьков по размерам на распространение звука в средах с резонансной дисперсией // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 6. С. 730–736.

3. Дзепаров Ф.С., Львов Д.В., Забелин К.С. Моделирование многократного малоуглового рассеяния нейтронов на полидисперсных системах рассеивателей // Труды научной сессии МИФИ. 2008. Т. 3. С. 183–184.

4. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. М.: Наука, 1978. 463 с.

5. Горская Н.В., Грязнова И.Ю., Гурбатов С.Н., Николаев Г.Н. Физическое моделирование процессов обратного рассеяния акустических сигналов на дис-

кретных неоднородностях // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 3. С. 410–415.

6. Горская Н.В., Грязнова И.Ю., Гурбатов С.Н., Николаев Г.Н. Исследование коллективных эффектов рассеяния акустических сигналов на дискретных неоднородностях // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 4.

7. Грязнова И.Ю., Гурбатов С.Н. Экспериментальное исследование корреляционных и частотных характеристик обратного рассеяния на дискретных неоднородностях // Акуст. журн. 1995. Т. 41. Вып. 1. С. 83–89.

8. Аббасов И.Б. Рассеяние нелинейно-взаимодействующих акустических волн: сфера, цилиндр, сфероид. М.: Физматлит, 2007. 160 с.

## THE STUDY OF INFLUENCE OF THE INHOMOGENEITY SIZE DISTRIBUTION ON THE AVERAGE ACOUSTIC BACKSCATTER INTENSITY

*I.Yu. Gryaznova, E.N. Ivashchenko*

The article studies the dependence of the average backscatter acoustic intensity on the discrete scatterer average size and the variance of the scatterer size distribution. We also consider the influence of the inhomogeneity size distribution on the interference component of the average backscatter intensity which arises when taking into account the reflection from the bottom surface where the scatterers are located.

*Keywords:* acoustic wave backscattering, discrete inhomogeneities, scatterer size statistical distribution.

### References

1. Bunchuk A.V., Ivakin A.N. Jenergeticheskie harakteristiki jehosignala ot diskretnyh rasseivatelej dna okeana // Akust. zhurn. 1989. Т. 35. № 1. С. 8–18.

2. Alekseev V.N., Rybak S.A. Vlijanie raspredelenija puzыр'kov po razmeram na rasprostranenie zvuka v sredah s rezonansnoj dispersiej // Akust. zhurn. 1997. Т. 43. № 6. С. 730–736.

3. Dzheparov F.S., L'vov D.V., Zabelin K.S. Modelirovanie mnogokratnogo malouglovogo rassejanija nejtronov na polidispersnyh sistemah rasseivatelej // Trudy nauchnoj sessii MIFI. 2008. Т. 3. С. 183–184.

4. Rytov S.M., Kravcov Ju.A., Tatarskij V.I. Vvedenie v statisticheskuju radiofiziku. Chast' II. М.: Nauka, 1978. 463 с.

5. Gorskaja N.V., Grjaznova I.Ju., Gurbatov S.N., Nikolaev G.N. Fizicheskoe modelirovanie processov obratnogo rassejanija akusticheskikh signalov na diskretnyh neodnorodnostjah // Akust. zhurn. 1990. Т. 36. Vyp. 3. С. 410–415.

6. Gorskaja N.V., Grjaznova I.Ju., Gurbatov S.N., Nikolaev G.N. Issledovanie kolektivnyh jeffektov rassejanija akusticheskikh signalov na diskretnyh neodnorodnostjah // Akust. zhurn. 1990. Т. 36. Vyp. 4.

7. Grjaznova I.Ju., Gurbatov S.N. Jeksperimental'noe issledovanie korreljacionnyh i chastotnyh harakteristik obratnogo rassejanija na diskretnyh neodnorodnostjah // Akust. zhurn. 1995. Т. 41. Vyp. 1. С. 83–89.

8. Abbasov I.B. Rassejanie nelinejno-vzaimodejstvujushhikh akusticheskikh voln: sfera, cilindr, sferoid. М.: Fizmatlit, 2007. 160 с.