МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:537.812

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ С ВЕЩЕСТВЕННОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

Н.А. Денисова, К.А. Маркова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

natasha.denisova@mail.ru

Поступила в редакцию 24.05.2013

Предложен алгоритм восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного слоя конечной толщины по амплитудному коэффициенту отражения. Для случая, когда диэлектрическая проницаемость терпит скачок первого рода на границах слоя, выведено интегральное уравнение, решение которого позволяет определить показатель преломления по коэффициенту отражения.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, показатель преломления, функции Йоста, задача рассеяния, коэффициент отражения.

Одномерная обратная задача электромагнитного отражения от неоднородного слоистого полупространства с показателем преломления $n(z)$ рассматривалась в работах [1–5] методами задачи рассеяния на бесконечном интервале [6]. В данной статье результаты работы [5] обобщены на случай отражения от неоднородного слоя с показателем преломления, имеющим разрывы первого рода на границах слоя.

1. Постановка задачи

Пусть три диэлектрические среды разделены плоскими границами $z=0$ и $z=z_s$. Диэлектрические проницаемости сред, занимающих полупространства $z<0$ и $z>z_s$, принимают значения ε_a и ε_s соответственно. В области $0<z<z_s$ диэлектрическая проницаемость неоднородной среды $\varepsilon(z)=n^2(z)$ зависит только от z. Электромагнитная волна падает на слоистую среду из области $z<0$. При нормальном падении электрическое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2E(z,k)}{dz^2}+k^2\varepsilon(z)E(z,k)=0, \tag{1.1}$$

где $\varepsilon(z)=\overline{n}^2(z), k=\omega/c$ – волновое число,

$$\overline{n}(z)=\begin{cases} n_a,\ z<0,\\ n(z), 0\le z\le z_s,\\ n_s, z>z_s,\end{cases}$$

$\varepsilon_a=n_a^2, \varepsilon_s=n_s^2$. Функция $n(z)\in C^1[0,z_s]$, а $\overline{n}(z)$ в точках $z=0, z=z_s$ может иметь разрывы первого рода. Амплитудный коэффициент отражения от слоя определяется через решение уравнения (1.1) с условиями Коши

$$E(z_s,k)=e^{ikn_sz_s}, E'(z_s,k)=ikn_se^{ikn_sz_s}$$

с помощью формулы

$$r(k)=\frac{ikn_aE(0,k)-E'(0,k)}{ikn_aE(0,k)+E'(0,k)}. \tag{1.2}$$

Введем в уравнении (1.1) новую переменную $x=x(z)$, где функция $x(z)\in C^1(R)$,

$$x(z)=\begin{cases} z,\ z<0,\\ \displaystyle\int_0^z\frac{n(t)}{n(0)}dt,\ 0\le z\le z_s,\\ \displaystyle\frac{n(z_s)}{n(0)}(z-z_s)+\int_0^d\frac{n(t)}{n(0)}dt,\ z>z_s.\end{cases} \tag{1.3}$$

Для функции $\psi(x,k)=E(z(x),k)$ уравнение примет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\tilde{n}^2(x)\psi+Q(x)\frac{d\psi}{dx}=0, \tag{1.4}$$

где

$$\tilde{n}(x)=\begin{cases} n_a,\ x<0,\\ n(0),\ 0<x<d,\\ n_1,\ x>d,\end{cases}$$

$$n_1=\frac{n_s n(0)}{n(z_s)},\ \ d=x(z_s),$$

$$Q(x)=\begin{cases}\dfrac{n(0)}{n^2(z)}\dfrac{dn(z)}{dz}\Big|_{z=z(x)},\ 0<x<d,\\ 0, x<0,\ x>d.\end{cases} \quad (1.5)$$

Т.к. $\psi(0,k)=E(0,k),\psi'(0,k)=E'(0,k)$, то коэффициент отражения для уравнения (1.4) совпадает с (1.2).

Цель работы – получить основные соотношения, позволяющие найти показатель преломления $n(z)$ внутри слоя по коэффициенту отражения (1.2).

2. Функции Йоста

Обозначим через $\psi_{1,2}(x,k)$ и $\varphi_{1,2}(x,k)$ решения уравнения (1.4) (функции Йоста), имеющие заданный вид при $x>d, x<0$:

$$\psi_{1,2}(x,k)=e^{\mp ikn_1x},\ x>d, \qquad \varphi_{1,2}(x,k)=e^{\mp ikn_ax},\ x<0. \quad (2.1)$$

Аналогичные решения усеченного уравнения ($Q(x)\equiv 0$) обозначим $\psi^{(0)}_{1,2}(x,k)$, $\varphi^{(0)}_{1,2}(x,k)$. Для усеченного уравнения функции Йоста находятся в явном виде. В частности, при $x<0$

$$\psi^{(0)}_2(x,k)=a_0(k)e^{ikn_ax}+b_0(k)e^{-ikn_ax}.$$

Здесь

$$a_0(k)=A(1+r_{12}r_{23}e^{2ikn(0)d}),$$

$$b_0(k)=A(r_{12}+r_{23}e^{2ikn(0)d}),$$

$$r_{12}=\frac{n_a-n(0)}{n_a+n(0)},\ r_{23}=\frac{n(0)-n_1}{n(0)+n_1}=\frac{n(z_s)-n_s}{n(z_s)+n_s},$$

$$A=\frac{e^{-ik(n(0)-n_1)d}}{4n_an(0)}(n_a+n(0))(n(0)+n_1).$$

Отношение $r_0(k)=b_0(k)/a_0(k)$ является коэффициентом отражения для усеченного уравнения.

Чтобы исследовать свойства функций Йоста при $0<x<d$ в комплексной плоскости k, перейдем от дифференциального уравнения (1.4) с условиями (2.1) к интегро-дифференциальным уравнениям

$$\psi_{1,2}(x,k)=\psi^{(0)}_{1,2}(x,k)- \quad (2.2)$$

$$-\frac{1}{kn(0)}\int_x^d Q(\xi)\psi'_{1,2}(\xi,k)\sin(kn(0)(\xi-x))d\xi,$$

$$\varphi_{1,2}(x,k)=\varphi^{(0)}_{1,2}(x,k)- \quad (2.3)$$

$$-\frac{1}{kn(0)}\int_0^x Q(\xi)\varphi'_{1,2}(\xi,k)\sin(kn(0)(x-\xi))d\xi.$$

Для функции

$$\phi(x,k)=\frac{2\psi'_2(x,k)e^{-ikn(0)x}e^{ik(n(0)-n_1)d}}{ik(n(0)+n_1)}$$

из интегрального уравнения (2.2) получим

$$\phi(x,k)=1-r_{23}e^{2ikn(0)(d-x)}+ \quad (2.4)$$

$$+\frac{1}{2}\int_x^d Q(\xi)\phi(\xi,k)(1+e^{2ikn(0)(\xi-x)}).$$

Теорема 1. Пусть $Q(x)\in C[0,d]$, тогда для $\forall k\in C$ существует решение уравнения (2.4) $\phi(x,k)\in C^2[0,d]$, для $\forall x\in[0,d]$ решение $\phi(x,k)$ является целой функцией по переменной k. В верхней полуплоскости $\operatorname{Im}k\ge 0$

$$|\phi(x,k)|\le\frac{2\max(n_s,n(z_s))}{n_s+n(z_s)}\eta(x). \quad (2.5)$$

Если $Q(x)\in C^1[0,d]$, в $\operatorname{Im}k\ge 0$ при $|k|\to\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\phi(x,k)=e^{\frac{1}{2}\int_x^d Q(\xi)d\xi}\{1+r_{23}e^{2ikn(0)(d-x)}+ \quad (2.6)$$

$$+\frac{1}{4ikn(0)}\{r_{23}Q(d)-v(x)+(Q(d)-$$

$$-r_{23}v(x))e^{2ikn(0)(d-x)}\}+O(\frac{1}{k^2}).$$

Здесь

$$v(x)=Q(x)+\frac{1}{2}\int_x^d Q^2(\xi)d\xi,$$

$$\eta(x)=\exp\left(\int_x^d|Q(\xi)|d\xi\right).$$

Из интегро-дифференциального уравнения (2.2) и оценки (2.5) следует, что

$$\left|\psi_2(x,k)e^{-ikdn_1}e^{ikn(0)(d-x)}\right|\le\max(1,\frac{n_s}{n(z_s)})\eta(x)$$

при всех $0<x<d$, $\operatorname{Im}k\ge 0$.

Теорема 2. Если $\operatorname{Im}k=0$ и $0<x<d$, решения Йоста $\varphi_{1,2}(x,k)$ представимы в виде

$$\varphi_1(x,k)=\varphi^{(0)}_1(x,k)+ \quad (2.7)$$

$$+\int_{-x}^x B(x,y)\frac{d}{dy}(-b_{12}e^{ikn(0)y}+a_{12}e^{-ikn(0)y})dy,$$

$$a_{12}=\frac{n(0)+n_a}{2n(0)},\ b_{12}=\frac{n_a-n(0)}{2n(0)},$$

$$\varphi_2(x,k)=\varphi^*_1(x,k).$$

Ядро оператора преобразования удовлетворяет уравнению

$$B(x,y)=-1+\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+y}{2}}Q(\xi)d\xi\right)- \quad (2.8)$$

$$-\int_0^{\frac{x-y}{2}}dz\int_0^{\frac{x+y}{2}}Q(\xi+z)B_x(\xi+z,\xi-z)d\xi,\ |y|<x.$$

3. Свойства коэффициентов отражения и пропускания

При вещественных $k\neq 0$ функции Йоста $\varphi_1(x,k)$, $\varphi_2(x,k)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.4), поэтому

$$\psi_2(x,k)=b(k)\varphi_1(x,k)+a(k)\varphi_2(x,k). \quad (3.1)$$

Коэффициенты $a(k),b(k)$ называются коэффициентами перехода. Коэффициенты отражения и пропускания связаны с функциями $a(k),b(k)$ следующим образом:

$$r(k)=\frac{b(k)}{a(k)},\ \ t(k)=\frac{1}{a(k)}.$$

Перечислим сначала свойства коэффициентов перехода.

1. $a(-k)=a^*(k), b(-k)=b^*(k), \operatorname{Im}k=0.$

2. $a(k)=a_0(k)\ +\dfrac{A}{2}\displaystyle\int_0^d Q(\xi)\phi(\xi,k)(1-r_{12}e^{2ikn(0)\xi})d\xi,$

$$b(k)=b_0(k)-\frac{A}{2}\int_0^d Q(\xi)\phi(\xi,k)(e^{2ikn(0)\xi}-r_{12})d\xi.$$

3. Функции $a(k),b(k)$ непрерывны на вещественной оси k и аналитически продолжаются в комплексную плоскость k.

4. Функция $a(k)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}k\geq 0$.

5. $a(0)=\dfrac{n_a-n_s}{2n_a},\ b(0)=\dfrac{n_a+n_s}{2n_a}.$

6. $|a(k)|^2-|b(k)|^2=\dfrac{n_s}{n_a}, \operatorname{Im}k=0.$

7. В верхней полуплоскости $\operatorname{Im}k\geq 0$ при $|k|\to\infty$ для коэффициентов $a(k),b(k)$ справедливы асимптотические формулы

$$a(k)=\sqrt{\frac{n(z_s)}{n(0)}}A(1+r_{12}r_{23}e^{2ikn(0)d}+$$

$$+\frac{\alpha_1+\alpha_2 e^{2ikn(0)d}}{4ikn(0)}+O(\frac{1}{k^2})),$$

$$b(k)=\sqrt{\frac{n(z_s)}{n(0)}}A(r_{12}+r_{23}e^{2ikn(0)d}+$$

$$+\frac{\beta_1+\beta_2 e^{2ikn(0)d}}{4ikn(0)}+O(\frac{1}{k^2})),$$

где

$$\alpha_1=r_{12}Q(0)-\frac{1}{2}\int_0^d Q^2(\xi)d\xi+r_{23}Q(d),$$

$$\alpha_2=-r_{23}Q(0)+\frac{r_{12}r_{23}}{2}\int_0^d Q^2(\xi)d\xi-r_{12}Q(d),$$

$$\beta_1=Q(0)-\frac{r_{12}}{2}\int_0^d Q^2(\xi)d\xi+r_{12}r_{23}Q(d),$$

$$\beta_2=-r_{12}r_{23}Q(0)+\frac{r_{23}}{2}\int_0^d Q^2(\xi)d\xi-Q(d).$$

Из свойств функций $a(k),b(k)$ следуют свойства коэффициентов отражения и пропускания.

1. $r(-k)=r^*(k),\ t(-k)=t^*(k), \operatorname{Im}k=0.$

2. Функции $r(k),t(k)$ являются аналитическими по k в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}k\geq 0.$

3. $r(0)=\dfrac{n_a-n_s}{n_a+n_s},\ t(0)=\dfrac{2n_a}{n_a+n_s}.$

4. $r(k)=r_0(k)+O(\dfrac{1}{k}),\ |k|\to\infty, \operatorname{Im}k\geq 0.$

5. $|r(k)|^2+\dfrac{n_s}{n_a}|t(k)|^2=1, \operatorname{Im}k=0.$

6. $|r(k)|<1, \operatorname{Im}k\geq 0.$

4. Вывод интегрального уравнения для функции $K(x,y)$

Установим связь между ядром оператора преобразования (2.7) и коэффициентом отражения $r(k)$. Для этого разделим обе части равенства (3.1) на $a(k)$, подставим (2.7) и преобразуем к виду

$$t(k)\psi_2(x,k)-t(0)\psi_2^{(0)}(x,k)e^{ikd(n(0)-n_1)}=$$

$$=ikn(0)a_{12}\{\int_{-x}^{x}B(x,y)[(1-r_0(k)r_{12})e^{ikn(0)y}+$$

$$+(r_{12}-r_0(k))e^{-ikn(0)y}]dy-(r(k)- \quad (4.1)$$

$$-r_0(k))\int_{-x}^{x}B(x,y)(r_{12}e^{ikn(0)y}+e^{-ikn(0)y})dy\}\ +f(x,k),$$

где

$$f(x,k)=(r(k)-r(0))\varphi_1^{(0)}(x,k)+$$

$$+r(0)[\varphi_1^{(0)}(x,k)-\psi_2^{(0)}(x,k)e^{ikd(n(0)-n_1)}]+$$

$$+[\varphi_2^{(0)}(x,k)-\psi_2^{(0)}(x,k)e^{ikd(n(0)-n_1)}].$$

Соотношение (4.1) умножим на $n(0)\times$ $\times(\pi ik(n(0)+n_a))^{-1}e^{-ikn(0)z}$ и проинтегрируем по

k в бесконечных пределах. Если $z < x$, интеграл, стоящий в левой части, может быть вычислен с помощью контурного интегрирования. В силу аналитических свойств подынтегральной функции и ее асимптотического поведения в верхней полуплоскости ($\mathrm{Im}k \ge 0,\ |k| \to \infty$) этот интеграл равен нулю. Тогда

$$\frac{n(0)}{2\pi}\{\int_{-\infty}^{+\infty}(1-r_0(k)r_{12})dk\int_{-x}^{x}B(x,y)e^{ikn(0)(y-z)}dy +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}(r_{12}-r_0(k))dk\int_{-x}^{x}B(x,y)e^{-ikn(0)(y+z)}dy - \quad (4.2)$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}(r(k)-r_0(k))dk\int_{-x}^{x}B(x,y)(r_{12}e^{ikn(0)(y-z)} +$$

$$+e^{-ikn(0)(y+z)})dy\} + F(x,z) = 0,\ z < x,\ 0 < x < d.$$

Здесь $F(x,z) = \dfrac{1}{2\pi i a_{12}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{k}f(x,k)e^{-ikn(0)z}$.

Дальнейшие вычисления будем проводить в предположении, что $|z| < x < d$. Выражения, содержащие $r_0(k)$ в первом и втором слагаемых, разложим в ряды

$$1-r_0(k)r_{12} = (1-r_{12}^2)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m r_{12}^m r_{23}^m e^{2ikn(0)dm},$$

$$r_{12}-r_0(k) = r_{23}(r_{12}^2-1)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m r_{12}^m r_{23}^m e^{2ikn(0)d(m+1)}.$$

Подставим ряды в (4.2) и поменяем порядок интегрирования. Учитывая фильтрующее свойство возникающих дельта-функций Дирака, получим, что первый интеграл равен $(1-r_{12}^2)B(x,y)$, а второй – нулю. Введем функцию

$$R(x) = \frac{n(0)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(r(k)-r_0(k))e^{-ikn(0)x}dk. \quad (4.3)$$

Тогда после перестановки интегралов в 3-м слагаемом соотношения (4.2), с учетом (4.3), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}B(x,y)[r_{12}R(z-y)+R(z+y)]dy.$$

Кроме того, можно проверить, что

$$F(x,z) = -\int_{0}^{x+z}R(t)dt,$$

если $|z| < x < d$.

Учитывая все сказанное, получаем интегральное уравнение, связывающее функцию $B(x,y)$ с преобразованием Фурье коэффициента отражения (4.3):

$$(1-r_{12}^2)B(x,z) - \int_{-x}^{x}B(x,y)[R(z+y)+rR(z-y)]dy -$$

$$-\int_{0}^{x+z}R(t)dt = 0,\ |z| < x < d. \quad (4.4)$$

5. Связь ядра оператора преобразования с показателем преломления

Полагая в (2.7) $y = x$, получим

$$\int_{0}^{x}Q(\xi)d\xi = \ln[1+B(x,x)]^{-2}. \quad (5.1)$$

С другой стороны, используя (1.3), (1.5), интеграл в (5.1) можно вычислить:

$$\int_{0}^{x}Q(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{0}^{z(x)}\frac{n(0)}{n^2(z)}\frac{dn(z)}{dz}x'(z)dz = \ln\frac{n(z(x))}{n(0)}. \quad (5.2)$$

Из формул (5.1), (5.2) следует, что

$$n(z) = n(0)[1+B(x(z),x(z))]^{-2}. \quad (5.3)$$

Дифференцируя (1.3) по z и учитывая (5.3), получим дифференциальное уравнение

$$x'(z) = [1+B(x,x)]^{-2},\ x(0) = 0,$$

интегрируя которое, найдем функцию

$$z = z(x) = \int_{0}^{x}[1+B(t,t)]dt. \quad (5.4)$$

Соотношения (5.3), (5.4) можно использовать для параметрического определения функции показателя преломления

$$\begin{cases} n = n(0)[1+B(x,x)]^{-2}, \\ z = \displaystyle\int_{0}^{x}[1+B(t,t)]^2 dt. \end{cases} \quad (5.5)$$

Таким образом, для восстановления функции показателя преломления нужно найти преобразование Фурье (4.3), решить интегральное уравнение (4.4) относительно функции $B(x,y)$ и воспользоваться формулами (5.5).

Список литературы

1. Ware J.A., Aki K. //J. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 45. P. 911.
2. Coen S. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1981. V. 29. P. 726.
3. Хруслов Е.Я. //ЖВМиМФ. 1985. Т. 25. № 4. С. 548.
4. Jaggard D.L., Frangos P.V. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1987. V. 35. P. 934.
5. Денисова Н.А., Степанова С.А. // ЖВМиМФ. 1999. Т. 39. № 7. С. 1180.
6. Фаддеев Л.Д. // Труды мат. ин-та АН СССР. 1964. Т. 73. С. 314.

INVERSE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVE REFLECTION FROM AN INHOMOGENEOUS LAYER WITH REAL DIELECTRIC PERMITTIVITY

N.A. Denisova, K.A. Markova

An algorithm is proposed to restore the dielectric permittivity of an inhomogeneous layer of finite thickness by the amplitude reflection coefficient. In the case of a first-order discontinuity of the permittivity at the layer boundary, an integral equation has been derived whose solution allows the refractive index to be determined by the reflection coefficient.

Keywords: Helmholtz equation, refractive index, Jost functions, scattering problem, reflection coefficient.

References

1. Ware J.A., Aki K. //J. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 45. P. 911.
2. Coen S. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1981. V. 29. P. 726.
3. Hruslov E.Ja. //ZhVMiMF. 1985. T. 25. № 4. S. 548.
4. Jaggard D.L., Frangos P.V. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1987. V. 35. P. 934.
5. Denisova N.A., Stepanova S.A. // ZhVMiMF. 1999. T. 39. № 7. S. 1180.
6. Faddeev L.D. // Trudy mat. in-ta AN SSSR. 1964. T. 73. S. 314.