УДК 512.542

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ИНЪЕКТОРОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.И. Гойко

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

stage@tut.by

Поступила в редакцию 20.11.2012

П. Германн построил специальный класс групп $\mathcal{N}(p, q)$ (класс конечных групп без минимальных не **p**-нильпотентных подгрупп порядка $p^m q^n$ (p, q – простые, $p \neq q$; m, n – любые натуральные числа) и доказал, что этот класс групп является ненасыщенной формацией Фиттинга. В. Гойко доказал существование $\mathcal{N}(p, q)$-инъекторов в произвольных конечных группах. В данной работе устанавливаются свойства $\mathcal{N}(p, q)$-инъекторов в конечных группах.

Ключевые слова: формация Фиттинга, конечная группа, инъектор, силовская подгруппа.

Хорошо известно [1], что для произвольного класса Фиттинга F конечных групп в произвольной конечной группе F-инъектор не существует. Однако в частично разрешимых конечных группах известны обобщения (см. работы [2] и [3]). Кроме того, если в качестве F рассматривать некоторые специальные классы групп, то в произвольной конечной группе F-инъекторы могут существовать (см. работы [4–9]). В [10] Ито изучил $(p, q)-$*группы* (минимальные не p-нильпотентные группы порядка $p^m q^n$, p, q – простые, $p \neq q$; m, n – любые натуральные числа). П. Германн [11] построил класс $\mathcal{N}(p, q)$ – класс конечных групп без $(p, q)-$*подгрупп*. Там же [11] доказано, что класс $\mathcal{N}(p, q)$ есть ненасыщенная формация Фиттинга, замкнутая относительно подгрупп. В работе [12] доказано существование $\mathcal{N}(p, q)$-инъекторов в произвольной конечной группе.

Приведём некоторые определения и обозначения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Класс Фиттинга F – это такой непустой класс конечных групп, для которого выполняются условия: a) если $G \in$ F и N – нормальная в G подгруппа, то $N \in$ F ; b) если M и N – нормальные подгруппы в группе G и $M \in$ F, $N \in$ F, то $MN \in$ F.

Подгруппа H разрешимой группы G называется F-*инъектором*, если для любой субнормальной подгруппы V группы G пересечение $H \cap V \in$ F и является F-максимальной подгруппой в V (первыми ввели этот объект Фишер, Гашюц, Хартли). Подгруппа M группы G называется F-*максимальной подгруппой* в группе G, если $M \in$ F и из условий $M \subseteq L \subseteq G$, $L \in$ F всегда следует, что $M = L$. *Формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Класс конечных групп, который одновременно является формацией и классом Фиттинга, называется *формацией Фиттинга*.

Символом p всегда обозначаем простое число. N – класс всех конечных нильпотентных групп, S – класс всех конечных разрешимых групп, S_p – класс всех конечных p-групп, E – класс всех конечных групп, G_p – силовская p-подгруппа группы G. Через $\langle A, B, ..., C\rangle$ обозначаем подгруппу, порожденную множествами $A, B, ..., C$.

Подгруппа H конечной группы G называется $\mathcal{N}(p,q)$-*инъектором* [12], если для любой неединичной субнормальной подгруппы V группы G пересечение $H \cap V \in \mathcal{N}(p,q)$ и является $\mathcal{N}(p,q)$-максимальной подгруппой в группе V. Если наибольшая субнормальная подгруппа V группы G равна 1, то $\mathcal{N}(p,q)$-*инъектором* группы G называется $\mathcal{N}(p,q)$-максимальная подгруппа группы G. Класс F называется *Q-замкнутым*, если для любой группы $H \in$ F гомоморфный образ группы H также принадлежит F. Класс F называется *S-замкнутым* (S_n *-замкнутым*), если для любой группы $H \in$ F любая ее подгруппа (любая нормальная подгруппа) также принадлежит F. Символом *B-pne-S* обозначается тот факт, что подгруппа B группы S является p-нормально погружённой в группе S.

Остальные необходимые определения и обозначения см. в [1]. Все рассматриваемые в данной работе группы и классы групп берутся из класса E (класс всех конечных групп).

Говорят [1], что класс групп X *сильно вложен* в класс Y (обозначается: $X << Y$), если для любой конечной группы её Y-инъектор содержит X-инъектор.

В дальнейшем для простоты будем пользоваться обозначением X = $\mathfrak{N}(p, q)$, то есть символом X на протяжении данной работы обозначаем класс $\mathfrak{N}(p,q)$

Определение. Построим класс групп $L_p(\mathrm{X})$ следующим образом:

$$L_p(\mathrm{X}) = \{G : \mathrm{X}\text{-}\textit{инъектор } G \textit{ содержит } G_p,\ p \in \pi(G)\}.$$

Теорема 1. Справедливы утверждения:

1) $L_p(\mathrm{X})$ – формация Фиттинга, замкнутая относительно подгрупп;

2) $\mathrm{X} \cup \mathrm{S}_q \subseteq \mathrm{XS}_q \subseteq L_p(\mathrm{X}) = L_p(\mathrm{X})\mathrm{S}_q$, $q \neq p$;

3) $L_p(L_p(\mathrm{X})) = L_p(\mathrm{X})$;

4) следующие утверждения эквивалентны:

a) $\mathrm{X} = L_p(\mathrm{X})$,

b) $\mathrm{X} = \mathrm{X}G_q$, $q \neq p$,

c) в любой конечной группе индекс ее X-инъектора имеет степень p-числа (p – простое),

d) $L_q(\mathrm{X}) = \mathrm{E}$, $q \neq p$.

Доказательство (см. доказательство теоремы 1 в работе [13]).

Теорема 2. Пусть G – конечная группа, $\pi(G) = \{p, q, \dots, r\}$, $p, q, \dots, r$ – различные простые числа, F – X-инъектор группы G, $A = \langle G_q, \dots, G_r \rangle$, $W = \langle F, A \rangle$. Тогда справедливо утверждение: W есть $L_p(\mathrm{X})$-инъектор группы G тогда и только тогда, когда $FA = AF$.

Доказательство. Пусть W – $L_p(\mathrm{X})$-инъектор группы G. По теореме 1 (пункт 3): $L_p(\mathrm{X}) = L_p(L_p(\mathrm{X}))$. По теореме 1 (пункт 4) получим, что $L_p(\mathrm{X})$-инъектор группы G имеет индексом степень числа p. Отсюда следует, что $W \supseteq A$. Далее, так как $F \subseteq W$, то F является X-инъектором группы W (по теореме 3 из [12]). Следовательно, так как $W \in L_p(\mathrm{X})$, то F содержит W_p – p-силовскую из W. Теперь видно, что $|F| \cdot |A| \geq |W|$. Поскольку обратное неравенство очевидно, то $W = FA$. Значит, $FA = AF$.

Обратно, пусть $FA = AF$. Отсюда получаем равенство: $W = FA = AF$. Допустим, что W не является $L_p(\mathrm{X})$-инъектором группы G. Выберем группу G наименьшего порядка с таким свойством. (Если $G = 1$, то утверждение теоремы выполняется очевидным образом. Поэтому полагаем, что $G \neq 1$.) Возьмем произвольную собственную максимальную нормальную подгруппу M в G и силовскую p-подгруппу F_p из F. По лемме 11.6 из [14] получим равенства: $W_p = (FA)_p = F_p A_p = F_p$ (здесь использовали очевидное равенство: $A_p = \langle 1 \rangle$). Далее, рассмотрим следующие равенства:

$$F_p \cap M = W_p \cap M =$$
$$= (W \cap M) \cap W_p = (W \cap M)_p. \qquad (1)$$

Введем обозначение: $\overline{A} = \langle M_q, \dots, M_s \rangle$, где $M_q, \dots, M_s$ – силовские подгруппы из M для всех $q \in \pi(M), q \neq p$. Ясно, что $W \cap M \supseteq \overline{A}$. Кроме того, индекс A в W есть степень числа p и $W \cap M = \langle (W \cap M)_p, \overline{A} \rangle$. Применяя (1), получим:

$$\langle F \cap M, \overline{A} \rangle \supseteq \langle F_p \cap M, \overline{A} \rangle =$$
$$= \langle (W \cap M)_p, \overline{A} \rangle = W \cap M.$$

С другой стороны, очевидно, что $\langle F \cap M, \overline{A} \rangle \subseteq W \cap M$. Отсюда следует равенство $\langle F \cap M, \overline{A} \rangle = W \cap M$. Значит, $F \cap M$ перестановочна с $\overline{A}$. Кроме того, $F \cap M$ – X-инъектор в подгруппе M, $M \subset G$. В силу индуктивных рассуждений получим, что $\langle F \cap M, \overline{A} \rangle = W \cap M$ является $L_p(\mathrm{X})$-инъектором группы M. Покажем теперь, что W является $L_p(\mathrm{X})$ максимальной подгруппой в группе G. Допустим противное, т.е. $W \subset U \subset G$, где U – $L_p(\mathrm{X})$ – максимальная подгруппа в G. По теореме 3 из [12] F – X-инъектор в подгруппе $U \in L_p(\mathrm{X})$. По определению класса X получим: $F \supseteq U_p$ (U_p – p-силовская из U). Так как $F \subseteq W$, то $U_p \subseteq W$. Далее используем включение: $\langle U_q, \dots, U_t \rangle \subseteq A \subseteq W$, где $U_q, \dots, U_t$ – все силовские подгруппы из U кроме U_p. Отсюда следует, что $U \subseteq W$. Полученное противоречие доказывает, что W – $L_p(\mathrm{X})$ – максимальная подгруппа в G. Так как выше показали, что $W \cap M$ является $L_p(\mathrm{X})$-инъектором в собственной максимальной нормальной подгруппе M группы G, то W – $L_p(\mathrm{X})$-инъектор в G. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\pi(G)=\{p, q, \dots, r\}$, где $p, q, \dots, r$ – различные простые числа. Справедливо утверждение:

$X << L_p(X)$ тогда и только тогда, когда X-инъектор X группы G перестановочен с подгруппой $A=\langle G_q, \dots, G_r\rangle$.

Доказательство. Возьмём $L_p(X)$-инъектор V в группе G. Пусть X перестановочен с подгруппой A. Введём обозначение: $W=\langle X, A\rangle$. В силу теоремы 2 подгруппа W есть $L_p(X)$-инъектор группы G. Ясно, что X входит в W, т.е. X-инъектор группы G входит в $L_p(X)$-инъектор группы G. Следовательно, $X << L_p(X)$. Обратно, пусть $X << L_p(X)$. Последнее означает, что $X \subseteq V$. В силу теоремы 3 из [12] подгруппа X является X-инъектором группы V. Далее, т.к. $V \in L_p(X)$, то в силу определения класса $L_p(X)$ получаем, что $V_p \subseteq X$. Теперь с учётом включения $X \subseteq V$ получаем следующее включение: $X_p \subseteq V_p^v$, $v \in V$. Легко видеть, что $V_p = X_p$. Далее, получим следующие соотношения:

$$V=\langle V_p, \langle V_q, \dots, V_r\rangle\rangle =$$
$$=\langle X_p, \langle V_q, \dots, V_r\rangle\rangle \subseteq \langle X, A\rangle = W,$$

где $V_q, \dots, V_r$ – все силовские подгруппы группы V кроме V_p. Теперь очевидно, что

$$V \subseteq W. \tag{2}$$

Поскольку $L_p(X)=L_p(L_p(X))$ (по теореме 1), то V имеет индексом степень простого p (по той же теореме 1). Значит, $A \subseteq V$. Так как, кроме того, $X \subseteq V$, то $W=\langle X, A\rangle \subseteq V$. Теперь с учётом (2) получаем, что $W = V$. Значит, W есть $L_p(X)$-инъектор в группе G. Применяя теорему 2, получаем: $XA = AX$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть X = $\mathscr{N}(p,q)$, V – X-инъектор в G, V-*pne*-G, V_p – p-силовская подгруппа в группе V, $K=\{V_p^G\}$ – нормальное замыкание подгруппы V_p в группе G, $T/K=O_{p'}(G/K)$ – наибольшая нормальная p' – подгруппа в G/K, $A=\langle G_q, \dots, G_r\rangle$.

Справедливы утверждения:

(a) подгруппа T есть $L_p(X)$-радикал группы G;

(b) подгруппа TA есть $L_p(X)$-инъектор группы G;

(c) $X \ll L_p(X)$;

(d) $L_p(X)$-инъектор группы G есть p-нормально погружённая подгруппа в группе G.

Доказательство. (a) Допустим, что G – простая группа. Тогда либо $K = 1$, либо $K = G$. Если $K = 1$, то $V_p = 1$. Последнее равенство противоречит условию теоремы. Пусть $K = G$. Отсюда следует, что $T = G$. Теперь из равенства $K = G$ и условия теоремы (V-*pne*-G) следует, что $V_p = G_p$. Значит, $G_p \subseteq V$. Следовательно, $G \in L_p(X)$. Поскольку $T = G$, то T – $L_p(X)$-радикал группы G.

Пусть теперь G – не простая группа. Из условия V-*pne*-G получаем, что подгруппа V_p является p-силовской подгруппой в группе K. В силу равенства $T/K=O_{p'}(G/K)$ получаем $K \supseteq T_p$. Отсюда следует включение $T_p \subseteq V_p$.

Т.к. $V_p \subseteq T$, то $V_p \subseteq T_p^t, t \in T$. Теперь из включения $T_p \subseteq V_p$ следует неравенство $|T_p| \le |V_p|$, а из включения $V_p \subseteq T_p^t$ следуют соотношения $|V_p| \le |T_p^t| = |T_p|$. Следовательно,

$$V_p = T_p. \tag{3}$$

Далее, т.к. $T \cap V$ есть X-инъектор группы T, то с учётом (1) получаем: $T \in L_p(X)$. Отсюда следует включение

$$T \subseteq R \tag{4}$$

(здесь через R обозначили $L_p(X)$-радикал группы G).

С другой стороны, $V \cap R$ есть X-инъектор группы R, $R \in L_p(X)$. С учётом (3) получаем следующие соотношения: $V \cap R \supseteq R_p \supseteq$ $\supseteq T_p = V_p$. Отсюда следует включение

$$R_p \supseteq V_p. \tag{5}$$

Далее, т.к. $V \cap R \triangleleft V$, $V_p \cap V \cap R = (V \cap R)_p$, то V_p есть p-силовская в группе $V \cap R$. Следовательно, R_p есть p-силовская в группе $V \cap R$ и $V_p = R_p^x, x \in V \cap R$. Так как с использованием (5) имеем следующие соотношения $|V_p| \le |R_p| =$ $=|R_p^x| = |V_p|$, то получим равенство

$$V_p = R_p. \tag{6}$$

Теперь из (6) и (4) следует, что $|R:K|$ есть p'-число. Значит, фактор-группа R/K есть нормальная p'-подгруппа в фактор-группе G/K. Отсюда следует, что

$$R \subseteq T. \tag{7}$$

Теперь из (4) и (7) следует, что $R=T$, т.е. подгруппа T есть $L_p(\mathrm{X})$-радикал в группе G.

(b) При $G=1$ утверждение выполняется очевидно. Пусть $G\neq 1$. Если G – простая группа, то нормальное замыкание K подгруппы V_p в группе G либо равно 1, либо $K=G$. Допустим $K=1$. Отсюда следует, что $V_p=1$, $T/1\cong T=1$. Значит, $O_{p'}(G/1)\cong O_{p'}(G)=1$. В силу равенства $V_p=1$ получаем включение: $V\subseteq A^g, g\in G$. Без ограничения общности считаем, что $V\subseteq A$. Далее, т.к. V является Х-инъектором группы A, то следующие равенства выполняются очевидно: $VA=AV=A$. Теперь в силу теоремы 1 получаем, что A является $L_p(\mathrm{X})$-инъектором группы G. Поскольку $T=1$, то $A=TA$ – $L_p(\mathrm{X})$-инъектор группы G. Пусть теперь $K=G$. Тогда с учётом условия $(V\text{-}pne\text{-}G)$ получим: $V_p=G_p$. Значит, $G_p\subseteq V$. В силу определения класса $L_p(\mathrm{X})$ получим, что $G\in L_p(\mathrm{X})$. Поскольку при этом $A\subseteq T=G$, то очевидно, что $TA-L_p(\mathrm{X})$-инъектор группы G.

Пусть теперь G – не простая группа. Возьмём произвольную (собственную) максимальную нормальную подгруппу M в группе G. Тогда $V\cap M$ – Х-инъектор группы M. Поскольку $V\cap M\lhd V$ и V_p – p-силовская в группе V, то в силу равенства $V\cap M\cap V_p=(V\cap M)_p$ получим $V_p\cap M=(V\cap M)_p$. Т.к. $V_p\cap M\subseteq K\cap M\lhd G$, то получим, что $V_p\cap M$– p-силовская в Х-инъекторе $V\cap M$ группы M и $V_p\cap M$– p-силовская в группе $K\cap M\lhd M$. Возьмём S – наименьшую нормальную подгруппу в M, такую, что $V_p\cap M\subseteq S$ и $S\subseteq K\cap M$. Ясно, что $S=\{V_p^M\}$ – нормальное замыкание подгруппы V_p в группе M. Далее, $\{(V_p\cap M)^M\}$ – нормальное замыкание подгруппы $(V\cap M)_p$ в группе M. Обозначим $\{(V_p\cap M)^M\}=D$. Рассмотрим фактор-группу $H/D=O_{p'}(M/D)$. По индукции имеем следующие два утверждения: $b1$) H является $L_p(\mathrm{X})$-радикалом в группе M; $b2$) $H\overline{A}$ является $L_p(\mathrm{X})$-инъектором в M, где $\overline{A}=\{M_q,\dots,M_r\}$. Так как $H\ char\ M, M\lhd G$, то $H\lhd G$ и, кроме того, $H\in L_p(\mathrm{X})$. Поскольку, кроме того, в силу пункта (а) подгруппа T есть $L_p(\mathrm{X})$-радикал в группе G, то получим включение

$$H\subseteq T. \qquad (8)$$

Из (8) следует включение $H\overline{A}\subseteq T\overline{A}$. Поскольку, кроме того,

$$H\overline{A}\subseteq T\overline{A}\cap M=\overline{A}(T\cap M), \qquad (9)$$

то $H\overline{A}$ – $L_p(\mathrm{X})$-инъектор в группе $\overline{A}(T\cap M)$. Далее, так как $H\subseteq T\cap M\lhd M$, $T\cap M\in L_p(\mathrm{X})$ и H есть $L_p(\mathrm{X})$-радикал в группе M, то получим равенство: $H=T\cap M$. Теперь в силу (9) получим равенство $H\overline{A}=\overline{A}(T\cap M)$. Поскольку $H\overline{A}$ – $L_p(\mathrm{X})$-инъектор в группе M, то $T\overline{A}\cap M$– $L_p(\mathrm{X})$-инъектор в группе M. Возьмём теперь в группе G произвольную субнормальную подгруппу N. Без ограничения общности можно считать, что $N\subseteq M$. Так как N– субнормальная подгруппа в M, то $N\cap T\overline{A}$ – $L_p(\mathrm{X})$-максимальная подгруппа в N (в силу определения инъектора). Значит, $T\overline{A}$ – $L_p(\mathrm{X})$-инъектор в группе G. Далее используем очевидное включение

$$T\overline{A}\subseteq TA. \qquad (10)$$

Покажем теперь, что $TA\in L_p(\mathrm{X})$. В самом деле, возьмём Х-инъектор D в группе TA. Тогда в силу того, что $T\lhd M$, получим: $D\cap T$ – Х-инъектор в группе $T\in L_p(\mathrm{X})$. Теперь в силу определения класса $L_p(\mathrm{X})$ имеем следующие соотношения: $T_p\subseteq D\cap T\subseteq D$. Используя лемму 11.6 из [14], получим равенства $(TA)_p=T_pA_p$, а учитывая тот факт, что $A_p=1$, получим равенство $(TA)_p=T_p$. Значит, $(TA)_p\subseteq D$. Опять, используя определения класса $L_p(\mathrm{X})$, получим, что $TA\in L_p(\mathrm{X})$. Теперь с учётом (10) получим равенство: $TA=T\overline{A}$, т.е. $TA-L_p(\mathrm{X})$-инъектор в группе G.

(с) Предположим, что условие $\mathrm{X}<<L_p(\mathrm{X})$ не выполняется. Пусть G – группа минимального порядка, для которой это условие не выполняется. В силу пункта (а) подгруппа TA является F-инъектором в группе G. Так как $V\cap T$ – Х-инъектор в группе $T\in L_p(\mathrm{X})$, то в силу определения класса $L_p(\mathrm{X})$ получим: $T_p\subseteq V\cap T$. Отсюда следует, что $T_p\subseteq V_p$. Теперь ясно, что $T\subseteq\langle V,A\rangle$ и $TA\subseteq\langle V,A\rangle$. Значит, TA есть $L_p(\mathrm{X})$-инъектор в группе $\langle V,A\rangle$

(в силу теоремы 3 из [12]). Допустим, что $\langle V, A\rangle \subset G$. В силу индуктивных рассуждений получим включение: $V \subseteq TA$ (с применением того, что V – Х-инъектор в группе $\langle V, A\rangle$ и TA – $L_p(\mathrm{X})$-инъектор в группе $\langle V, A\rangle$). Последнее включение приводит к доказываемому условию. Пусть теперь $\langle V, A\rangle = G$. По лемме 11.6 из [14] получим равенства: $G_p = (VA)_p = V_p A_p = V_p$ (напомним, что в этом случае $A_p = 1$). Из последнего равенства следует, что p-силовская подгруппа группы G входит в Х-инъектор группы G. Значит, $G \in L_p(\mathrm{X})$. Следовательно, группа G является Х-инъектором группы G. Последнее означает, что Х-инъектор V группы G входит в $L_p(\mathrm{X})$-инъектор группы G. Полученное противоречие завершает доказательство пункта (c).

(d) Докажем, что $L_p(\mathrm{X})$-инъектор группы G есть p-нормально погружённая подгруппа в G. Рассмотрим равенства:

$$\frac{|TA|}{\left|\left\{V_p^G\right\}\right|} = \frac{|T|\cdot|A|}{|T\cap A|\cdot\left|\left\{V_p^G\right\}\right|} = \frac{|A|}{|T\cap A|}\cdot\frac{|T|}{\left|\left\{V_p^G\right\}\right|}.$$

Так как $|A|/|T\cap A|$ является p'-числом и $|T|/\left|\left\{V_p^G\right\}\right|$ – тоже p'-число (по условию), то $\left|TA:\left\{V_p^G\right\}\right|$ есть p'-число. Отсюда получаем включение $\left\{V_p^G\right\} \supseteq (TA)_p = T_p A_p = T_p$. Теперь из включения $T_p \subseteq \left\{V_p^G\right\}$ следует включение $T_p \subseteq \left\{V_p^G\right\}_p$. Далее, так как $\left\{V_p^G\right\}_p = V_p$, то получим включение

$$T_p \subseteq V_p. \tag{11}$$

Следовательно, т.к. $V_p \subseteq \left\{V_p^G\right\} \subseteq T$, то $V_p \subseteq T_p^t$, $t \in T$. Отсюда следуют соотношения: $|V_p| \le$ $\le |T_p^t| = |T_p|$, т.е.

$$|V_p| \le |T_p|. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что $T_p = V_p$. Поскольку $T_p = (TA)_p$, то $V_p = (TA)_p$. Но V_p – p-силовская в группе $\left\{V_p^G\right\}$. Значит, $(TA)_p$ – p-силовская в группе $\left\{V_p^G\right\} = \left\{(TA)_p^G\right\}$. Поскольку $\left\{(TA)_p^G\right\}$ – нормальное замыкание для $(TA)_p$ в группе G, то TA – p-нормально погружённая в G. Пункт (d) доказан. Теорема 4 доказана.

Список литературы

1. Doerk K., Hawkes T.O. Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
2. Шеметков Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп // В сб.: Конечные группы. Мн.: Наука и техника. 1975. С. 207–212.
3. Сементовский В.Г. Инъекторы конечных групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1984. С. 166–170.
4. Шеметков Л.А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 1999. № 1(15). С. 5–13.
5. Shemetkov L.A. Injectors in finite groups // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 2000. № 3(16). С. 186–187.
6. Vorobiev N.T. Gaschütz's local method in the theory of Fitting classes of finite soluble groups // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 2000. № 3(16). С. 155–66.
7. Залесская Е.Н. О новых классах сопряженных инъекторов конечных групп // Дискретная математика. 2004. Т. 16. Вып. № 1. С. 105–113.
8. Blessenohl D, Laue H. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind // J. Algebra. 1979. Vol. 56. P. 516–532.
9. Iranso M. J., Pérez-Monasor F. Fitting classes F such that all finite groups have F-injectors // Israel J. Math. 1986. Vol. 56. P. 97–101.
10. Ito N. Note on (L, M)-groups of finite order // Kodai Math. Seminar Report. 1951. P. 1–6.
11. Hermann P. Groups without certain subgroups form a Fitting class // Ann. Univ. sci. Budapest. Sec. math. 1983. Vol. 26. P. 183–186.
12. Гойко В.И. О существовании сопряженного класса инъекторов в конечных группах // Доклады НАН Беларуси. 2008. Т. 52. № 6. С. 17–22.
13. Гойко В.И. Инъекторы конечных групп // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2012. №1(67). С. 5–11.
14. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.

INVESTIGATION OF PROPERTIES OF INJECTORS IN FINITE GROUPS

V.I. Goiko

P. Hermann constructed a special class of groups N(p, q) (the class of finite groups without minimal non-p-nilpotent subgroups of order $p^m q^n$, p, q – prime, $p \ne q$; m, n – any natural numbers) and proved that this class of groups was an unsaturated Fitting formation. V. Goiko proved the existence of N(p, q)-injectors in arbitrary finite groups. In the present paper, the properties of N(p, q)-injectors in finite groups are established.

Keywords: Fitting formation, finite group, injector, Sylow subgroup.

References

1. Doerk K., Hawkes T.O. Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

2. Shemetkov L.A. O podgruppah p-razreshimyh grupp // V sb.: Konechnye gruppy. Mn.: Nauka i tehnika. 1975. S. 207–212.

3. Sementovskij V.G. In#ektory konechnyh grupp // Issledovanie normal'nogo i podgruppovogo stroenija konechnyh grupp. Mn.: Nauka i tehnika, 1984. S. 166–170.

4. Shemetkov L.A. Nekotorye svojstva in#ektorov v konechnyh gruppah // Izvestija Gomel'skogo gos. un-ta im. F. Skoriny. Voprosy algebry. 1999. № 1(15). S. 5–13.

5. Shemetkov L.A. Injectors in finite groups // Izvestija Gomel'skogo gos. un-ta im. F. Skoriny. Voprosy algebry. 2000. № 3(16). S. 186–187.

6. Vorobiev N.T. Gaschütz's local method in the theory of Fitting classes of finite soluble groups // Izvestija Gomel'skogo gos. un-ta im. F. Skoriny. Voprosy algebry. 2000. № 3(16). S. 155–66.

7. Zalesskaja E.N. O novyh klassah soprjazhen-nyh in#ektorov konechnyh grupp // Diskretnaja matematika. 2004. T. 16. Vyp. № 1. C. 105–113.

8. Blessenohl D, Laue H. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind // J. Algebra. 1979. Vol. 56. P. 516–532.

9. Iranso M. J., Pérez-Monasor F. Fitting classes F such that all finite groups have F-injectors // Israel J. Math. 1986. Vol. 56. P. 97–101.

10. Ito N. Note on (L, M) -groups of finite order // Kodai Math. Seminar Report. 1951. P. 1–6.

11. Hermann P. Groups without certain subgroups form a Fitting class // Ann. Univ. sci. Budapest. Sec. math. 1983. Vol. 26. P. 183–186.

12. Gojko V.I. O sushhestvovanii soprjazhennogo klassa in#ektorov v konechnyh gruppah // Doklady NAN Belarusi. 2008. T. 52. № 6. S. 17–22.

13. Gojko V.I. In#ektory konechnyh grupp // Vesnik Vicebskaga dzjarzhaўnaga ўniversitjeta. 2012. № 1(67). S. 5–11.

14. Shemetkov L.A. Formacii konechnyh grupp. M.: Nauka, 1978. 272 s.