УДК 517.927.2

# ОБ ОЦЕНКАХ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

© 2014 г. **М.Ю. Тельнова**

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики

mytelnova@ya.ru

*Поступила в редакцию 20.09.2013*

Получены некоторые оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием на потенциал.

*Ключевые слова:* дифференциальные уравнения, краевые задачи, первое собственное значение, интегральное условие, вариационные методы.

## Введение

Рассматривается задача

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где функция $Q$ принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ действительных неотрицательных локально интегрируемых на интервале $(0,1)$ функций, для которых выполняется интегральное условие

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x)\,dx = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in R, \quad \gamma \neq 0. \tag{3}$$

Под *решением* задачи (1), (2) понимается функция $y$, абсолютно непрерывная на $[0,1]$, удовлетворяющая условиям (2), имеющая абсолютно непрерывную производную на любом отрезке, содержащемся в интервале $(0,1)$, и удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду на интервале $(0,1)$.

Функция $y \in H_0^1(0,1)$ называется *слабым решением* задачи (1), (2), если для всех функций $\psi \in C_0^\infty(0,1)$ (бесконечно дифференцируемых на $(0,1)$ функций с компактными носителями) выполняется равенство

$$\int_0^1 \left(y'\psi' + Q(x)y\psi\right)dx = \lambda \int_0^1 y\psi\,dx.$$

Изучается зависимость первого собственного значения $\lambda_1$ задачи (1)–(3) от потенциала $Q$ при различных значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma$ $(\gamma \neq 0)$.

Для произвольной функции $Q$ из $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ обозначим через $H_Q$ замыкание множества $C_0^\infty(0,1)$ по норме

$$\|y\|_{H_Q}^2 = \int_0^1 \left(y'^2 + Q(x)y^2\right)dx.$$

Доказано [1–4], что первое собственное значение $\lambda_1$ задачи (1), (2) может быть найдено как

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_Q \setminus \{0\}} R[Q, y],$$

где

$$R[Q, y] = \frac{\int_0^1 \left(y'^2 + Q(x)y^2\right)dx}{\int_0^1 y^2\,dx}.$$

Целью исследования является приведение некоторых оценок для

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q), \quad M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q).$$

Для оценок $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ введем функционал

$$G[y] = \frac{\int_0^1 y'^2\,dx + \left(\int_0^1 |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\,dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y^2\,dx}.$$

Задачи на собственные значения с интегральным условием на потенциал возникли из задачи, известной как задача Лагранжа о наиболее прочной колонне заданного объема:

$$\left(Q(x)y''\right)'' + \lambda y'' = 0,$$

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0,$$

$$\int_0^1 \sqrt{Q(x)}\,dx = 1.$$

Подобные оценки первого собственного значения $\lambda_1(Q)$ были получены и для других задач. Первая задача такого типа для уравнения второго порядка и нулевых граничных условий

$$y'' + \lambda Q(x) y = 0, \quad x \in (0,1), \tag{4}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{5}$$

была поставлена и изучена Ю.В. Егоровым и В.А. Кондратьевым в работах [5, 6] при условии, что функция $Q$ принадлежит множеству действительных положительных измеримых на интервале $(0,1)$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 Q^{\gamma}(x)\,dx = 1, \quad \gamma \in R, \quad \gamma \neq 0. \tag{6}$$

В работе [7] К.З. Куралбаевой были получены оценки снизу и сверху минимального собственного значения задачи (4), (5), где функция $Q$ принадлежит множеству действительных положительных измеримых на интервале $(0,1)$ функций, удовлетворяющих условию (3) и условию

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)\,dx < \infty .$$

В.А. Винокуровым и В.А. Садовничим [8] рассматривалась задача (1), (2) при условии, что $Q$ – вещественная интегрируемая по Лебегу на $(0,1)$ функция. Исследовался вопрос о том, как сильно можно изменить (увеличить или уменьшить) собственное значение, если $Q$ меняется в пределах некоторого подмножества

$$U_p[t] = \left\{ Q \in L_p(0,1) \,\middle|\, \|Q\|_{L_p(0,1)} \le t \right\}, \text{ где } t \ge 0,$$
$$p \in [1, +\infty].$$

Авторами получены оценки снизу и сверху минимального собственного значения данной задачи при $p \ge 1$, доказана достижимость оценок при $p > 1$. Достижимость оценок при $p = 1$ была доказана С.С. Ежак в работе [9], где были получены соответствующие оценки для задачи

$$y'' + \delta Q(x) y + \lambda y = 0, \quad x \in (0,1),$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

при $\delta = \pm 1$, $Q$ – неотрицательной ограниченной на $[0,1]$ функции, удовлетворяющей условию (6).

В работах [1–4, 10] были доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** Для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеют место следующие оценки:

1) если $\gamma > 0$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$;

2) если $\gamma < 0$, то $\pi^2 \le m_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$, причем если $\gamma < 0$, $\alpha \le 2\gamma - 1$ $(\beta \le 2\gamma - 1)$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} \le R[0, y_1]$, где

$$y_1(x) = \begin{cases} x^{\theta}, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ (1-x)^{\theta}, & \dfrac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

и $\theta$ – некоторое действительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\theta > \frac{\alpha - |\beta| - \gamma - \varepsilon^{\gamma} + 1}{2\gamma} \quad \left( \theta > \frac{\beta - |\alpha| - \gamma - \varepsilon^{\gamma} + 1}{2\gamma} \right),$$
$$0 < \varepsilon < 1.$$

**Теорема 2.** Для $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеют место следующие оценки:

1) если $\gamma < 0$ или $0 < \gamma < 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$;

2) если $\gamma \ge 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$, причем

2а) если $\gamma \ge 1$ и $\alpha, \beta > \gamma$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} = R\left[1/y_1^2, y_1\right]$, где $y_1(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}$;

2б) если $\gamma > 1$ и $\alpha, \beta \le \gamma$ или $\alpha \le \gamma < \beta \le 2\gamma - 1$ или $\beta \le \gamma < \alpha \le 2\gamma - 1$, то существуют такие функции $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $u \in H_{Q_*}$, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = R\left[Q_*, u\right] = m_*$, где $m_* = \inf\limits_{y \in H_{Q_*} \setminus \{0\}} G[y]$;

2в) если $\gamma \ge 1$ и $\alpha > 2\gamma - 1$, $\beta \le \gamma$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \le R\left[1/y_2^2, y_2\right]$, где $y_2(x) = x^{\frac{\alpha}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{1+\varepsilon}{2\gamma}}$, $0 < \varepsilon < 1$;

2г) если $\gamma \ge 1$ и $\beta > 2\gamma - 1$, $\alpha \le \gamma$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \le R\left[1/y_3^2, y_3\right]$, где $y_3(x) = x^{\frac{1+\varepsilon}{2\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{2\gamma}}$, $0 < \varepsilon < 1$;

2д) если $\gamma = 1 \ge \alpha \ge 0 > \beta$ или $\gamma = 1 \ge \beta \ge 0 > \alpha$ или $\gamma > 1$, $\alpha, \beta < 0$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \le 2\pi^2$;

2е) если $\gamma = 1 \ge \alpha, \beta \ge 0$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \le 3\pi^2$; если $\gamma = 1$, $\alpha, \beta < 0$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} \le \dfrac{5}{4}\pi^2$.

**Замечание 1.** В случае 2б) для $m_*$ имеют место следующие неравенства:

Если $\gamma > 1$, $0 \le \alpha, \beta \le 2\gamma - 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} = m_* \le \left( 1 + 2^{\frac{3\gamma-2}{\gamma}} \left( \dfrac{2\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} \right) \pi^2$; если $\gamma > 1$ и $\beta < 0 \le \alpha \le 2\gamma - 1$ или $\alpha < 0 \le \beta \le 2\gamma - 1$, то $M_{\alpha,\beta,\gamma} = m_* \le \left( 1 + \left( \dfrac{2\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}} \right) \pi^2$.

**Замечание 2.** Результаты, полученные в теореме 1 при $\gamma \neq 0$, $\alpha, \beta = 0$ и в теореме 2 при $0 \neq \gamma < 1$ и при $\gamma > 1$, $\alpha = \beta = 0$, совпадают с результатами работы [9] при $\delta = -1$.

## Основные результаты работы

Уточним оценку для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ в случае $\gamma < 0$, $\alpha > 2\gamma - 1$, $\beta > 2\gamma - 1$.

В силу неравенства Гёльдера для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и для данных значений параметров $\alpha, \beta, \gamma$ имеем

$$\int_0^1 |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} dx \le$$

$$\le \left( \int_0^1 Q^{\gamma}(x) x^{\alpha} (1-x)^{\beta} dx \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left( \int_0^1 Q(x) y^2 \, dx \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Обозначим

$$m = \inf_{y \in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} G[y]. \qquad (7)$$

Тогда имеем

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \inf_{y \in H_Q \setminus\{0\}} R[Q, y] \ge$$

$$\ge \inf_{y \in H_Q \setminus\{0\}} G[y] \ge \inf_{y \in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} G[y] = m,$$

то есть $m_{\alpha,\beta,\gamma} \ge m$. Докажем, что $m_{\alpha,\beta,\gamma} = m$.

**Теорема 3.** Пусть $\gamma < 0$, $\alpha > 2\gamma - 1$, $\beta > 2\gamma - 1$; тогда существует такая неотрицательная на интервале $(0,1)$ функция $u \in H_0^1(0,1)$, что $G[u] = m$, причем $u$ является слабым решением уравнения

$$u'' + mu = x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \; x \in (0,1), \qquad (8)$$

и удовлетворяет условиям

$$u(0) = u(1) = 0, \qquad (9)$$

$$\int_0^1 u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} dx = 1. \qquad (10)$$

**Теорема 4.** Пусть $\gamma < 0$, $\alpha > 2\gamma - 1$, $\beta > 2\gamma - 1$ и функция $u$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда существует такая последовательность положительных на интервале $(0,1)$ функций $u_n \in H_0^1(0,1)$, для которой последовательность функций

$$Q_n(x) = x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}} (1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} u_n^{\frac{2}{\gamma-1}}(x) \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$$

такова, что $R[Q_n, u] \to G[u] = m$ при $n \to \infty$ и $m_{\alpha,\beta,\gamma} = m$.

## Доказательство основных результатов работы

**Доказательство теоремы 3.**

**Лемма 1.** Существует такая функция $u \in H_0^1(0,1)$, что $G[u] = m$, где $m$ определяется формулой (7).

**Доказательство.** Обозначим

$$\Gamma_* = \left\{ y \,\middle|\, y \in H_0^1(0,1), \int_0^1 y^2 dx = 1 \right\}.$$

Заметим, что для любой функции $y \in \Gamma_*$ имеем

$$G[y] \ge \int_0^1 y'^2 dx \quad \text{и} \quad \|y\|^2_{H_0^1(0,1)} = \int_0^1 y'^2 \, dx + 1 \le G[y] + 1.$$

Пусть $\{\tilde{y}_k\}$ – минимизирующая последовательность функционала $G[y]$ в $H_0^1(0,1)$. Тогда последовательность $y_k = \tilde{y}_k / C_k^{1/2}$, где $C_k = \int_0^1 \tilde{y}_k^2 \, dx$, – минимизирующая последовательность функционала $G[y]$ в $\Gamma_*$, и для всех достаточно больших значений $k$ имеем $G[y_k] \le m + 1$ и $\|y\|^2_{H_0^1(0,1)} \le G[y_k] + 1 \le m + 2$.

Докажем, что существует такая функция $u_* \in \Gamma_*$, что $G[u_*] = m$.

Так как $\{y_k\}$ – ограниченная последовательность в сепарабельном гильбертовом пространстве $H_0^1(0,1)$, то она содержит подпоследовательность $\{z_k\}$, слабо сходящуюся в $H_0^1(0,1)$ к некоторой функции $u_*$, причем $\|u_*\|^2_{H_0^1(0,1)} \le m + 2$.

Пространство $H_0^1(0,1)$ компактно вкладывается в пространство $C([0,1])$, следовательно, существует подпоследовательность $\{s_k\}$ последовательности $\{z_k\}$, сильно сходящаяся в $C([0,1])$. Поскольку $C([0,1])$ вкладывается в $L_p(0,1)$, где $p \ge 1$, то последовательность $\{s_k\}$ сильно сходится в $L_2(0,1)$ к функции $u_*$. Следовательно, для функционала $G[s_k]$

$$\int_0^1 s_k^2 \, dx \to \int_0^1 u_*^2 \, dx \;\text{ при }\; k \to \infty$$

и

$$\int_0^1 u_*^2 \, dx = 1.$$

Докажем также, что найдется такая подпоследовательность $\{u_k\}$ последовательности $\{s_k\}$, что

$$\int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx \to$$

$$\to \int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx$$

при $k\to\infty$.

Применим теорему Лебега ([11], гл. V, теор. 6). Рассмотрим последовательность

$$\left\{x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|s_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right\},$$

членами которой являются функции, принадлежащие пространству $L_1(0,1)$, поскольку при $\gamma<0$, $\alpha>2\gamma-1$, $\beta>2\gamma-1$ для любого $k$ имеем

$$\int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|s_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx<+\infty.$$

Докажем сначала, что найдется такая подпоследовательность $\{u_k\}$ последовательности $\{s_k\}$, что

$$x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\to x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

при $k\to\infty$ при почти всех $x\in[0,1]$.

Поскольку пространство $C([0,1])$ вкладывается в $L_p(0,1)$, где $p=\dfrac{2\gamma}{\gamma-1}$, то последовательность $\left\{|s_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right\}\in L_1(0,1)$ сходится к $\left\{|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right\}\in L_1(0,1)$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{u_k\}$ последовательности $\{s_k\}$, что $|u_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\to|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$ при почти всех $x\in[0,1]$.

Тогда

$$x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\to x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

при почти всех $x\in[0,1]$.

Докажем далее, что найдется такая функция $\varphi\in L_1(0,1)$, что для любого $k$

$$x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\le\varphi(x)$$

при почти всех $x\in[0,1]$.

Для функции $u_k\in AC[0,1]$, удовлетворяющей условиям $u_k(0)=u_k(1)=0$, имеет место равенство $u_k(x)=\int_0^x u_k'(\xi)d\xi$. В силу неравенства Гёльдера

$$|u_k(x)|\le\int_0^x|u_k'(\xi)|d\xi\le x^{\frac12}\left(\int_0^1 u_k'^2\,dx\right)^{\frac12}=C_k x^{\frac12},$$

где $C_k=\left(\int_0^1 u_k'^2\,dx\right)^{\frac12}$.

Аналогично, $u_k(x)=-\int_x^1 u_k'(\xi)d\xi$ и $|u_k(x)|\le$ $\le C_k(1-x)^{\frac12}$.

Поскольку $\|y_k\|^2_{H_0^1(0,1)}\le m+2$, то

$$C_k=\left(\int_0^1 u_k'^2\,dx\right)^{\frac12}\le\sqrt{m+1}.$$

На $(0,1/2)$ при $\beta<0$ имеем

$$x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_k(x)|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\le(m+1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac12\right)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}x^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-1}},$$

на $[1/2,1)$ при $\alpha<0$ имеем

$$x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_k(x)|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\le$$

$$\le(m+1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac12\right)^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-1}}.$$

Тогда положим

$$\varphi(x)=\begin{cases}C_1\,x^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-1}}, & 0<x<\dfrac12,\\ C_2\,(1-x)^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-1}}, & \dfrac12\le x<1,\end{cases}$$

где

$$C_1=(m+1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac12\right)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}\ \text{при}\ \ \beta<0,$$

$$C_1=(m+1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\ \ \text{при}\ \beta\ge0,$$

$$C_2=(m+1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac12\right)^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}\ \text{при}\ \alpha<0,$$

$$C_2=(m+1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\ \ \text{при}\ \alpha\ge0.$$

При $\gamma<0$, $\alpha>2\gamma-1$, $\beta>2\gamma-1$ функция $\varphi\in L_1(0,1)$. Тогда по теореме Лебега

$$x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\in L_1(0,1)$$

и

$$\int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_k|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx \to$$
$$\to \int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u_*|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx$$

при $k\to\infty$.

Поскольку последовательность $\{u_k\}$ ограничена в $H_0^1(0,1)$, в силу определения нормы $\|u_k\|^2_{H_0^1(0,1)}$ последовательность $\{u_k'\}$ ограничена в $L_2(0,1)$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{w_k\}$ последовательности $\{u_k\}$, что последовательность $\{w_k'\}$ слабо сходится к $u_*'$ в $L_2(0,1)$.

Рассмотрим такую подпоследовательность $\{v_k\}$ последовательности $\{w_k\}$, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 v_k'^2dx=\varliminf_{k\to\infty}\int_0^1 w_k'^2dx.$$

Так как $\{v_k'\}$ слабо сходится к $u_*'$ в $L_2(0,1)$, то

$$\|u_*'\|^2_{L_2(0,1)}\le\varliminf_{k\to\infty}\|v_k'\|^2_{L_2(0,1)}=\lim_{k\to\infty}\|v_k'\|^2_{L_2(0,1)}$$

(см. [12, с. 217]).

Таким образом, функционал $G[y]$ является слабо полунепрерывным снизу (см. [13, с. 73]) функционалом в $H_0^1(0,1)$, и $G[u_*]\le\lim_{k\to\infty}G[v_k]=m$. Поскольку $m=\inf_{y\in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}}G[y]$, получаем $G[u_*]=m$.

Лемма 1 доказана.

Пусть

$$\Gamma=\left\{y\,\middle|\,y\in H_0^1(0,1),\ \int_0^1|y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}dx=1\right\}$$

и функция $u=Cu_*$, где $C$ выбирается так, чтобы $u$ принадлежала $\Gamma$ и была неотрицательной на [0,1].

Тогда $G[u]=G[u_*]=m$.

**Лемма 2.** Пусть $u\in\Gamma$ и $G[u]=m$; тогда неотрицательная на интервале $(0,1)$ функция $u$ является слабым решением уравнения (8) и удовлетворяет условиям (9), (10).

**Доказательство.** Зафиксируем некоторую функцию $z\in H_0^1(0,1)$ и рассмотрим семейство кривых $u+tz$, где $t$ – произвольный параметр. На кривых $u+tz$ функционал $G[y]$ превращается в функцию параметра $t$:

$$g(t)=\left(\int_0^1(u'(x)+tz'(x))^2dx+\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u(x)+tz(x)|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)\times$$
$$\times\left(\int_0^1(u(x)+tz(x))^2dx\right),$$

где $t\in R$. Поскольку функционал $G[y]$ достигает экстремума при $y=u$, то $g'(0)=0$.

Поскольку $u\in\Gamma$ и $G[u]=m$, получаем

$$\int_0^1 u'z'dx+\int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn}u\,z\,dx= =m\int_0^1 uz\,dx. \tag{11}$$

Равенство (11) выполняется для любой функции $z\in H_0^1(0,1)$. Полагая, что $z\in C_0^\infty(0,1)$, получаем, что функция $u'$ имеет обобщенную производную, равную

$$u''=x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}|u|^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{sgn}u-mu=$$
$$=x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}u^{\frac{2}{\gamma-1}}u-mu.$$

Таким образом, функция $u\in H_0^1(0,1)$ является слабым решением уравнения (8).

Так как $G[u]=G[|u|]$, то можно считать, что последовательность $\{u_k\}$ неотрицательна, и $u\ge0$.

Лемма 2 доказана.

С помощью лемм 1 и 2 мы получили, что существует неотрицательная на интервале $(0,1)$ функция $u\in H_0^1(0,1)$, которая является слабым решением уравнения (8) и удовлетворяет условиям (9), (10).

Теорема 3 доказана.

**Доказательство теоремы 4.**

Рассмотрим последовательность функций

$$\tilde{u}_n(x)=\begin{cases}u(x), & u(x)\ge\frac{1}{n},\quad x\in(0,1),\\ x(1-x), & u(x)<\frac{1}{n},\quad x\in\left(0,\frac{1}{n}\right)\cup\left(1-\frac{1}{n},1\right),\\ \frac{1}{n}, & u(x)<\frac{1}{n},\quad x\in\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right),\end{cases}$$

где $n \geq 3$, и последовательность функций $u_n = C_n \widetilde{u}_n$, где константы $C_n$ таковы, что для любого $n \geq 3$ $u_n \in \Gamma$.

Рассмотрим последовательность функций

$$Q_n(x) = x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} u_n^{\frac{2}{\gamma-1}}(x) \in T_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

Тогда для любого $n \geq 3$ функция $u_n$ принадлежит пространству $H_{Q_n}$ с выбранным $Q_n$.

Докажем, что

$$\int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} u_n^{\frac{2}{\gamma-1}} u^2\,dx \to$$

$$\to \int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx$$

при $n \to \infty$.

Применим теорему Лебега ([11], гл. V, теор. 6). Для последовательности

$$\left\{ x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} u_n^{\frac{2}{\gamma-1}} u^2 \right\}$$

имеем:

$$x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} u_n^{\frac{2}{\gamma-1}} u^2 \to x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

при $n \to \infty$ почти всюду на $[0,1]$.

Докажем, что найдется такая константа $A$, что для любого $n \geq 3$

$$x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} u_n^{\frac{2}{\gamma-1}} u^2 \leq A\, x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

Пусть

$$X_n = \left\{ x \,\middle|\, x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right),\ u(x) < \frac{1}{n} \right\},$$

$$Y_n = \left\{ x \,\middle|\, x \in \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right),\ u(x) < \frac{1}{n} \right\},$$

$$Z_n = \left\{ x \,\middle|\, x \in (0,1),\ u(x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Из условий $u_n = C_n \widetilde{u}_n$ и $u_n \in \Gamma$ следует, что

$$C_n = \left( \int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}} \widetilde{u}_n^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} =$$

$$= \left( \int_{X_n} x^{\frac{2\gamma-\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{\frac{2\gamma-\beta}{\gamma-1}}\,dx + \int_{Y_n} n^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}.$$

Поскольку функция $x^{\frac{2\gamma-\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{\frac{2\gamma-\beta}{\gamma-1}}$ суммируема, то по теореме об абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\int_{X_n} x^{\frac{2\gamma-\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{\frac{2\gamma-\beta}{\gamma-1}}\,dx \to 0$$

при $n \to \infty$.

Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность интегралов

$$\int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx.$$

Данная последовательность ограничена, поскольку для любого $n \geq 3$

$$\int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx \leq \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx = 1.$$

Значит, по теореме Вейерштрасса данная последовательность имеет предел. Докажем, что этот предел равен 1.

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для любого множества $e \subset (0,1)$ из того, что $\mu(e) < \delta_\varepsilon$, следует, что выполняется неравенство $\int_e x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx < \varepsilon$.

Заметим, что $(0,1) = \bigcup_n Z_n$ и $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots$. Тогда для любого $\delta > 0$, и в частности для $\delta = \delta_\varepsilon$, найдется такой номер $N$, что для любого $n \geq N$ выполняется неравенство $\mu((0,1) \setminus Z_n) < \delta_\varepsilon$. Следовательно, для любого $n \geq N$ выполняется неравенство

$$\int_{(0,1)\setminus Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx < \varepsilon,$$

то есть

$$\int_{(0,1)} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx - \int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$1 = \int_{(0,1)} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx < \varepsilon +$$

$$+ \int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx \leq \varepsilon + 1$$

и

$$1 - \varepsilon < \int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx \leq 1.$$

Но это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Z_n} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx = 1.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{Y_n} n^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}\,dx = 0$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 1$. Так как для любого $n \geq 3$ имеем

*Таблица 1*

| $\beta$ | $\gamma$ | $\alpha$ | $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ |
|---|---|---|---|
| $\beta<-1$ | $\gamma<(\beta+1)/2$ | $\alpha\le 2\gamma-1$ | $\pi^2\le m_{\alpha,\beta,\gamma}\le R\left[1/y_1^2,\, y_1\right]$ |
| $\beta<-1$ | $\gamma<(\beta+1)/2$ | $2\gamma-1<\alpha$ | $m_{\alpha,\beta,\gamma}=m$ |
| $\beta<-1$ | $(\beta+1)/2\le\gamma<0$ | $-\infty<\alpha<+\infty$ | $\pi^2\le m_{\alpha,\beta,\gamma}\le R\left[1/y_1^2,\, y_1\right]$ |
| $\beta<-1$ | $0<\gamma$ | $-\infty<\alpha<+\infty$ | $m_{\alpha,\beta,\gamma}=\pi^2$ |
| $\beta\ge-1$ | $\gamma<0$ | $\alpha\le 2\gamma-1$ | $\pi^2\le m_{\alpha,\beta,\gamma}\le R\left[1/y_1^2,\, y_1\right]$ |
| $\beta\ge-1$ | $0<\gamma$ | $-\infty<\alpha<+\infty$ | $m_{\alpha,\beta,\gamma}=\pi^2$ |

$C_n>0$, то $b=\inf\limits_{n\in N\setminus\{1,2\}} C_n>0$. Тогда получаем $A=b^{\frac{2}{1-\gamma}}$, так как для любого $n\ge 3$ выполняются соотношения:

$$u_n^{\frac{2}{\gamma-1}}u^2=C_n^{\frac{2}{\gamma-1}}\,\widetilde{u}_n^{\frac{2}{\gamma-1}}u^2\le b^{\frac{2}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

Поскольку

$$x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\in L_1(0,1),$$

то по теореме Лебега

$$\int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}u_n^{\frac{2}{\gamma-1}}u^2\,dx\to$$

$$\to\int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\,dx=1$$

при $n\to\infty$, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}R\left[x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}u_n^{\frac{2}{\gamma-1}},u\right]=G[u].$$

Тогда

$$m_{\alpha,\beta,\gamma}=\inf_{Q\in T_{\alpha,\beta,\gamma}}\inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}}R[Q,y]\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\inf_{y\in H_Q\setminus\{0\}}R\left[x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}u_n^{\frac{2}{\gamma-1}},y\right]\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}R\left[x^{-\frac{\alpha}{\gamma-1}}(1-x)^{-\frac{\beta}{\gamma-1}}u_n^{\frac{2}{\gamma-1}},u\right]=G[u]=m.$$

Таким образом, имеем $m_{\alpha,\beta,\gamma}\le m$, и мы получаем $m_{\alpha,\beta,\gamma}=m=G[u]$.

Теорема 4 доказана.

**Замечание 3.** Отметим, что если $\gamma<0$, $\alpha>2\gamma-1$, $\beta>2\gamma-1$, то показано [1–4], что для указанного значения $m_{\alpha,\beta,\gamma}=m$ имеют место следующие неравенства:

если $\gamma<0$, $\alpha,\beta\ge 0$, то

$$m_{\alpha,\beta,\gamma}\le\min\left\{\pi^2+1,\left(1+4(\alpha-2\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2,\right.$$

$$\left.\left(1+4(\beta-2\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2\right\};$$

если $\gamma<0$, $2\gamma-1<\alpha<0\le\beta$, то

$$m_{\alpha,\beta,\gamma}\le\left(1+4(\alpha-2\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

если $\gamma<0$, $2\gamma-1<\beta<0\le\alpha$, то

$$m_{\alpha,\beta,\gamma}\le\left(1+4(\beta-2\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\pi^2;$$

если $\gamma<0$, $2\gamma-1<\alpha,\beta<0$, то

$$m_{\alpha,\beta,\gamma}\le\left(1+\theta^{\frac{1}{\gamma}}2^{\frac{\theta+4\gamma-2}{\gamma}}\right)\pi^2,$$

где $\theta=\max\{\alpha,\beta\}-2\gamma+1$.

Проиллюстрируем результаты теорем 1, 3, 4 в виде таблицы (см. табл. 1).

Для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеем приведенные в табл. 1 оценки, где функция $y_1$ определяется в теореме 1, $m$ определяется формулой (7).

Проиллюстрируем результаты теорем 1, 3, 4 графически (см. рис. 1).

*Список литературы*


1. Telnova M.Yu. Some estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with a weight integral condition // Mathematica Bohemica. 2012. V. 137. № 2. P. 229–238.
2. Тельнова М.Ю. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 608–647.
3. Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным условием // Тез. докл. межд. миниконф. «Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения» (8–15 июня 2010). М.: МЭСИ, 2011. С. 45–63.
4. Тельнова М.Ю. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием // Тез. докл. межд. миниконф. «Качественная теория

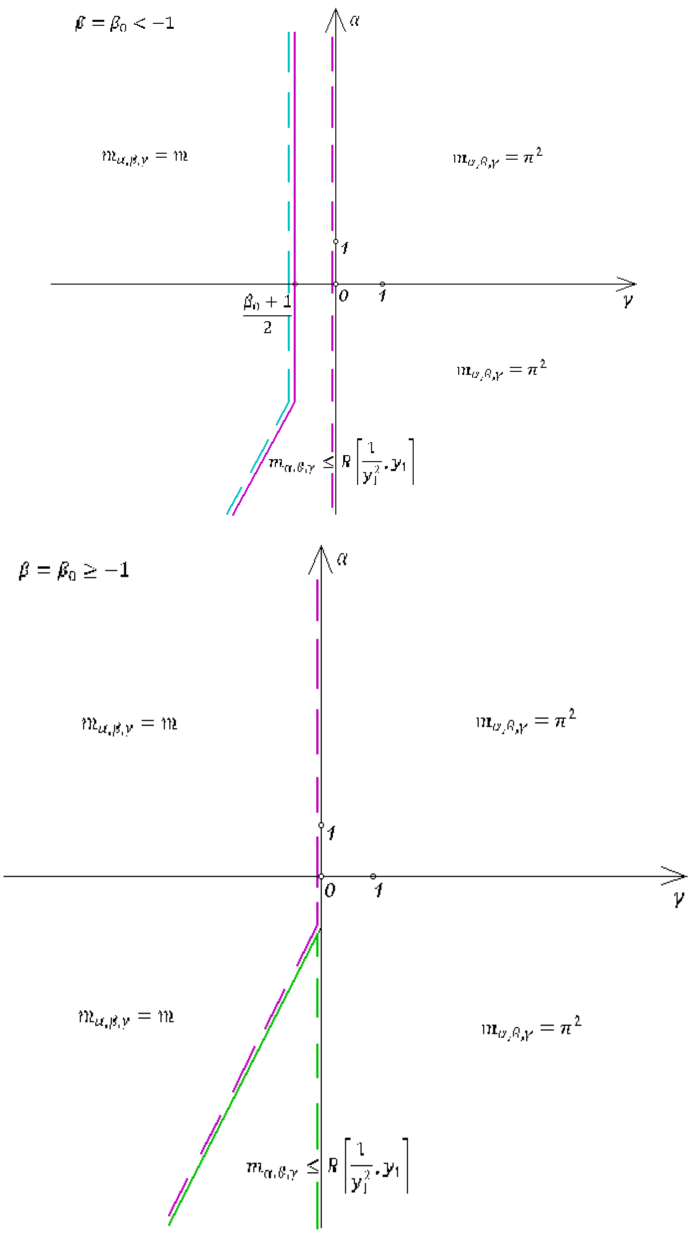


Рис. 1

дифференциальных уравнений и приложения» (16 июня 2012). М.: МЭСИ, 2013. С. 208–266.

5. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // Успехи математических наук. 1996. Т. 51(3). С. 73–144.

6. Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. On Spectral theory of elliptic operators // Operator theory: Advances and Applications. Birkhouser. 1996. V. 89. P. 1–325.

7. Куралбаева К.З. Об оценках первого собственного значения оператора Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32(6). С. 852–853.

8. Винокуров В.А., Садовничий В.А. О границах изменения собственного значения при изменении потенциала // Доклады Академии наук. 2003. Т. 392. № 5. С. 592–597.

9. Ежак С.С. Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с интегральным условием //Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 36. С. 56–69.

10. Тельнова М.Ю. Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с нулевыми граничными условиями и весовым интегральным условием на потенциал // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1570–1571.

11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 572 с.

12. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

13. Осмоловский В.Г. Нелинейная задача Штурма–Лиувилля. Учеб. пособие. СПб: Изд-во С.-Петербургского университета, 2003.

## ON ESTIMATES FOR THE FIRST EIGENVALUE OF A STURM-LIOUVILLE PROBLEM

***M.Yu. Telnova***

Some estimates for the first eigenvalue of a Sturm-Liouville problem with Dirichlet conditions and a weighted integral condition for the potential are obtained.

*Keywords:* differential equations, boundary problems, first eigenvalue, integral condition, variational methods.

*References*

1. Telnova M.Yu. Some estimates for the first eigenvalue of the Sturm–Liouville problem with a weight integral condition // Mathematica Bohemica. 2012. V. 137. № 2. P. 229–238.

2. Tel'nova M.Ju. Ocenki pervogo sobstvennogo znachenija zadachi Shturma–Liuvillja s uslovijami Dirihle i vesovym integral'nym usloviem // V sb.: Kachestvennye svojstva reshenij differencial'nyh uravnenij i smezhnye voprosy spektral'nogo analiza: nauchnoe izdanie pod red. I.V. Astashovoj. M.: JuNITI-DANA, 2012. C. 608–647.

3. Tel'nova M.Ju. Ob ocenkah pervogo sobstvennogo znachenija zadachi Shturma–Liuvillja s vesovym integral'nym usloviem // Tez. dokl. mezhd. minikonf. «Kachestvennaja teorija differencial'nyh uravnenij i prilozhenija» (8–15 ijunja 2010). M.: MJeSI, 2011. S. 45–63.

4. Tel'nova M.Ju. Ob ocenkah pervogo sobstvennogo znachenija zadachi Shturma–Liuvillja s uslovijami Dirihle i vesovym integral'nym usloviem // Tez. dokl. mezhd. minikonf. «Kachestvennaja teorija differencial'nyh uravnenij i prilozhenija» (16 ijunja 2012). M.: MJeSI, 2013. S. 208–266.

5. Egorov Ju.V., Kondrat'ev V.A. Ob ocenkah pervogo sobstvennogo znachenija v nekotoryh zadachah Shturma–Liuvillja // Uspehi matematicheskih nauk. 1996. T. 51(3). S. 73–144.

6. Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. On Spectral theory of elliptic operators // Operator theory: Advances and Applications. Birkhouser. 1996. V. 89. P. 1–325.

7. Kuralbaeva K.Z. Ob ocenkah pervogo sobstvennogo znachenija operatora Shturma–Liuvillja // Differencial'nye uravnenija. 1996. T. 32(6). S. 852–853.

8. Vinokurov V.A., Sadovnichij V.A. O granicah izmenenija sobstvennogo znachenija pri izmenenii potenciala // Doklady Akademii nauk. 2003. T. 392. № 5. S. 592–597.

9. Ezhak S.S. Ob ocenkah minimal'nogo sobstvennogo znachenija zadachi Shturma-Liuvillja s integral'nym usloviem //Sovremennaja matematika i ee prilozhenija. 2005. T. 36. S. 56–69.

10. Tel'nova M.Ju. Ocenki pervogo sobst-vennogo znachenija zadachi Shturma–Liuvillja s nulevymi granichnymi uslovijami i vesovym integral'nym usloviem na potencial // Differencial'nye uravnenija. 2012. T. 48. № 11. C. 1570–1571

11. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. M.: FIZMATLIT, 2009. 572 s.

12. Ljusternik L.A., Sobolev V.I. Jelementy funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1965.

13. Osmolovskij V.G. Nelinejnaja zadacha Shturma–Liuvillja. Ucheb. posobie. SPb: Izd-vo S.-Peterburgskogo universiteta, 2003.