МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 51-72

МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВАКУУМА

© 2014 г.
Г.Ф. Ефремов, В.В. Шарков, Д.А. Петров

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

efremov@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 08.11.2013

Предложен статистический подход в квантовой электродинамике, не содержащий расходимостей и не требующий обращения к процедуре перенормировок, в основу которого положен эффект квантовой нелокальности, явно учитывающий запаздывание взаимодействия между источником поля – электроном и полем излучения. Сопоставление предлагаемого метода с известными методами квантовой электродинамики проведено на примере вычисления смещения Лэмба в атоме водорода.

Ключевые слова: стохастические уравнения, квантовая нелокальность, лэмбовский сдвиг.

Введение

В статистической электродинамике имеются две тесно взаимосвязанные между собой проблемы. Одна из них связана с устранением парадоксов, присущих классической теории радиационного трения [1–17]. Вторая проблема касается возможности выхода за рамки асимптотических методов теории возмущений с присущими ей расходимостями [18, 19] и построения теории радиационных эффектов без использования процедуры перенормировок [20].

Существующие в квантовой теории поля асимптотические методы теории возмущений не позволяют решить указанные выше проблемы.

Квантовая теория радиационного трения, свободная от парадоксов классической теории, предложена в работах [10, 21, 22] на основе методов флуктуационно-диссипационной теории нелинейных открытых квантовых систем [23, 24]. Эта теория, представляющая собой принципиальное обобщение линейной теории броуновского движения квантовых систем [25, 26], не опирается на предположения марковости и малости константы взаимодействия, а потому позволяет учитывать процессы запаздывания взаимодействия, происходящие на малых расстояниях за очень короткие промежутки времени.

Методы флуктуационно-диссипационной теории броуновского движения могут эффективно использоваться в различных задачах физики конденсированных сред [27], полупроводниковой наноэлектронике и спинтронике [28]. Применительно к электродинамике постановка задачи и исходные стохастические уравнения сформулированы в ряде работ как для полевой теории [29], так и для одночастичной модели статистической квантовой электродинамики [10, 21, 22].

В настоящей работе на основе уравнений Гейзенберга для динамических переменных релятивистского электрона Дирака, находящегося в заданных сторонних внешних полях, таких как кулоновское поле ядра, получено стохастическое уравнение, описывающее броуновское движение электрона при взаимодействии с электромагнитным вакуумом. Полученная в работе радиационная сила трения благодаря учету осцилляций Шредингера не содержит парадоксов, присущих классической теории, и свободна от расходимостей, характерных для асимптотических методов теории возмущений.

Для демонстрации важнейшей особенности статистической теории, не имеющей расходимости, выбран хорошо известный эффект смещения Лэмба при воздействии на связанный электрон флуктуаций электромагнитного вакуума.

Лэмбовское смещение уровней, установленное экспериментально [30], впервые было рассчитано Бете [31] на основе предложенной им процедуры перенормировок. Элементарная статистическая теория лэмбовского сдвига, предложенная Вельтоном [32], также содержала расходимости. Все последующие более точные расчеты лэмбовского сдвига на основе методов квантовой теории поля также использовали процедуру перенормировок для устранения расходимостей. Поэтому возможность иного подхода в квантовой электродинамике, не имеющего расходимостей, и его демонстрация на хорошо известном примере лэмбовского сдвига уровней имеет принципиальное значение для физической теории.

Стохастическое уравнение для релятивистского электрона в атоме водорода

Остановимся на особенностях вывода стохастического уравнения для релятивистского электрона в атоме водорода. Пусть в бесконечно удаленный момент времени имеются всего одна Ферми-частица – релятивистский электрон в состоянии $\psi \in \Gamma$ и поле излучения в основном состоянии (все числа фотонов равны нулю).

В соответствии с основным динамическим принципом [18] адиабатически медленное включение взаимодействия электрона с кулоновским полем ядра и квантованным полем излучения не нарушает стабильности вакуума, т.е. не приводит к рождению электрон-позитронных пар. В этом случае число Ферми-частиц сохраняется, и, следовательно, гамильтониан, определяющий эволюцию системы во времени, может быть записан согласно релятивистской квантовой механике.

В релятивистской квантовой механике, как правило, используется шредингеровская картина движения [33, 34]. В то же время с точки зрения квантовой статистической физики при выводе стохастических уравнений эволюцию системы во времени следует рассматривать на основе уравнений Гейзенберга. Прежде всего, гейзенберговские уравнения движения для динамических переменных электрона в свободном пространстве допускают точное решение [10], впервые полученное в 1930 году Э. Шредингером [35, 36]. Кроме этого, в силу гауссовой статистики невозмущенных вакуумных переменных поля излучения имеют место точные стохастические уравнения для динамических переменных электрона [10].

Гамильтониан релятивистского атома водорода, взаимодействующего с квантованным полем излучения, имеет вид

$$H = c\boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right) + \beta mc^2 + V(r) + F^0. \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}$ и β – матрицы Дирака, $\mathbf{p}$ – канонический импульс электрона, $V(r)$ – сферически-симметричный потенциал поля ядра, $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ и F^0 – векторный потенциал и гамильтониан квантованного поля излучения.

Распорядимся калибровочной симметрией, выбирая поперечную калибровку для потенциалов поля

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0. \quad (2)$$

Запишем уравнения Гейзенберга для рассматриваемой системы. Из гамильтониана системы (1) следует, в частности, хорошо известный квантовый аналог уравнения Лоренца

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\pi_j(t) + \nabla_j(t)V(\mathbf{r}(t)) = \\ = -\frac{e}{c}\frac{d}{dt}A_j(\mathbf{r}(t),t) + \frac{e}{c}\nabla_j(t)\left(\dot{r}_\alpha(t)A_\alpha(\mathbf{r}(t),t)\right),\end{gathered} \quad (3)$$

где

$$\pi_j(t) = p_j(t) - \frac{e}{c}A_j(\mathbf{r}(t),t) \quad (4)$$

есть кинетический импульс электрона.

Особенность силы Лоренца, действующей на электрон со стороны поля излучения в правой части (3), состоит в том, что она определяется полной производной от векторного потенциала и содержит более простое слагаемое, зависящее от оператора скорости $\dot{r}_\alpha(t)$.

В гейзенберговском представлении потенциалы поля в (3) являются функциями координаты электрона $\mathbf{r}(t)$, поэтому их удобно представить в виде разложения Фурье:

$$A_j(\mathbf{r}(t),t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{kr}(t)} A_j(\mathbf{k},t), \quad (5)$$

где компоненты Фурье $A_j(\mathbf{k},t)$ явно не содержат переменных электрона. Канонически сопряженные с $A_j(\mathbf{k},t)$ компоненты плотности тока находим из гамильтониана (2) согласно

$$-\frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta A_j(\mathbf{k},t)} = \frac{e}{c}\dot{r}_j(t)e^{i\mathbf{kr}(t)}.$$

С учетом разложения Фурье (5) уравнение Лоренца (3) запишется в виде

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\pi_j(t) + \nabla_j V(\mathbf{r}(t)) = -\frac{d}{dt}\frac{e}{c}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{kr}(t)} A_j(\mathbf{k},t) + \\ + \nabla_j(t)\left(\frac{e}{c}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} A_\alpha(\mathbf{k},t)e^{i\mathbf{kr}(t)}\dot{r}_\alpha(t)\right),\end{gathered} \quad (6)$$

где потенциалы поля $A_j(\mathbf{k},t)$ коммутируют с соответствующими динамическими переменными электрона в тот же момент времени $\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t),\ldots$.

Из гамильтониана (1) следуют также уравнения для Фурье-компонент $A_j(\mathbf{k},t)$ потенциалов поля

$$\left[k^2 + \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\right]A_j(\mathbf{k},t) = \frac{4\pi}{c}e\dot{r}_j(t)e^{i\mathbf{kr}(t)}, \quad (7)$$

представляющие собой уравнения Максвелла для поля излучения при взаимодействии с электроном.

Из (7) с учетом калибровки (2) и гауссовой статистики вакуумных флуктуаций электромагнитного поля находим его точное решение

$$A_j(\mathbf{k},t)=A_j^{\,0}(\mathbf{k},t)+\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\,D_{jl}(\mathbf{k},t-t_1)\,e^{-i\mathbf{kr}(t)}\,\dot r_l(t_1). \quad (8)$$

Здесь $A_j^{\,0}(\mathbf{k},t)$ есть невозмущенное поле электромагнитного вакуума, временная функция корреляции которого в принятой кулоновской калибровке есть

$$\begin{aligned}M_{\alpha\beta}(\mathbf{k},t-t_1)&=\left\langle\frac{1}{2}\left[A_\alpha^{\,0}(\mathbf{k},t),A_\beta^{\,0}(-\mathbf{k},t_1)\right]_+\right\rangle_0=\\&=\frac{\hbar}{2}\,\frac{4\pi c}{k}\,\cos ck(t-t_1)\left(\delta_{j\nu}-\frac{k_\nu k_j}{k^2}\right).\end{aligned}\quad (9)$$

Так как взаимодействие электрона с полем электромагнитного вакуума включается адиабатически в момент $t=-\infty$, то потенциалы $A_j^{\,0}(\mathbf{k},t)$ в (8) описывают свободное вакуумное поле и потому подчиняются гауссовой статистике. Второе слагаемое, определяемое функцией Грина $D_{jl}(\mathbf{k},t-t_1)$ фотона, есть собственное поле излучения электрона. В принятой калибровке (2) функция Грина имеет вид [37]

$$D_{j\nu}(\mathbf{k},\tau)=\frac{4\pi c}{k}\sin(ck\tau)\left(\delta_{j\nu}-\frac{k_\nu k_j}{k^2}\right)\eta(\tau). \quad (10)$$

Заметим, что в классической электродинамике отсутствует понятие электромагнитного вакуума, а следовательно, при нулевой температуре в классической теории в (8) присутствует только вынужденное решение. Следовательно, в классическом пределе после подстановки в (6) вынужденного решения (8) и соответствующих преобразований имеем классическую релятивистскую формулу радиационной силы трения [11].

В квантовой теории радиационных эффектов наряду с реакцией собственного поля излучения необходимо учесть вклад вакуумных флуктуаций электромагнитного поля.

Подставим точное решение (8) в правую часть уравнения (6), определяющую квантовую силу Лоренца в уравнении (3). После симметризации произведения коммутирующих между собой операторов $A_j(\mathbf{k},t)$ и $\exp(i\mathbf{kr}(t))$ для правой части (3) получим

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\pi_j(t)+\nabla_j(t)V(\mathbf{r}(t))=\\&=-\frac{e}{c}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left[A_j^0(\mathbf{k},t),\,e^{i\mathbf{kr}(t)}\right]_++\right.\\&\left.+\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\,D_{jl}(\mathbf{k},t-t_1)\,\frac{1}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)},\dot r_l(t_1)e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right]_+\right\}+\\&+\frac{e}{c}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\nabla_j(t)\left\{\frac{1}{2}\left[A_\alpha^0(\mathbf{k},t),\,\dot r_\alpha(t)e^{i\mathbf{kr}(t)}\right]_++\right.\\&\left.+\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\,D_{\alpha l}(\mathbf{k},t-t_1)\,\frac{1}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)}\dot r_\alpha(t),e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\dot r_l(t_1)\right]_+\right\}.\end{aligned}\quad (11)$$

Подстановка точного решения (8) в квантовую силу Лоренца приводит к возникновению слагаемых, содержащих невозмущенные потенциалы $A_j^0(\mathbf{k},t)$.

Для определения вклада флуктуаций вакуумного поля в радиационную силу трения необходимо согласно установленным в [24] правилам провести процедуру спаривания $A_j^0(\mathbf{k},t)$ с динамическими переменными электрона и, соответственно, определить флуктуационный источник. В соответствии с приведенной в Приложении 1 процедурой спаривания $A_j^0(\mathbf{k},t)$ с оператором $\nabla_j(t)$, а также учитывая полученный в [22] вклад в радиационное трение первого слагаемого силы Лоренца (12), получим следующее стохастическое уравнение для релятивистского электрона Дирака в поле электромагнитного вакуума в атоме водорода:

$$\frac{d}{dt}\pi_j(t)+\nabla_j V(\mathbf{r}(t))=F_j(t)+\xi_j(t), \quad (12)$$

где $\xi_j(t)$ есть строго определенный флуктуационный источник с равным нулю средним значением по вакуумному состоянию поля. Обобщенная радиационная сила трения $F_j(t)$ учитывает как реакцию собственного поля излучения на электрон, так и воздействие флуктуаций вакуумного поля. Строгое выражение радиационной силы $F_j(t)$ в (12) имеет вид

$$\begin{aligned}&F_j(t)=F_j^{(1)}(t)+F_j^{(2)}(t)=\\&=-\frac{e^2}{c^2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big\{D_{jl}(\mathbf{k},t-t_1)\times\\&\times\frac{1}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)},e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\dot r_l(t_1)\right]_++\\&+M_{jl}(\mathbf{k},t-t_1)\frac{i}{\hbar}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)},e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\dot r_l(t_1)\right]_-\times\\&\times\eta(t-t_1)\Big\}+\frac{e^2}{2c^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\nabla_j(t)\times\\&\times\Big\{D_{\alpha l}(\mathbf{k},t-t_1)\frac{1}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)}\dot r_\alpha(t),e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\dot r_l(t_1)\right]_++\\&+M_{\alpha l}(\mathbf{k},t-t_1)\frac{i}{\hbar}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)}\dot r_\alpha(t),e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\dot r_l(t_1)\right]_-\eta(t-t_1)\Big\}.\end{aligned}\quad (13)$$

Появление принципиально важного множителя ½ во втором слагаемом в (13) есть следствие вклада спаривания невозмущенных потенциалов поля $A_j^0(\mathbf{k},t)$ с оператором $\nabla_j(t)$. Следует отметить, что в одной из предыдущих наших работ [10] это спаривание не было учтено.

В отличие от стохастического уравнения в форме (16) из работы [21] мы сохраняем оператор $\nabla_j(t)$ в правой части уравнения (12). Это позволит определить эффективное изменение кулоновского потенциала при воздействии на электрон флуктуационного поля излучения и вычислить на основе этого смещение Лэмба.

Эффективный кулоновский потенциал в случайном поле электромагнитного вакуума

С точки зрения статистической теории смещение Лэмба имеет ясный физический смысл. Именно, действие флуктуаций электромагнитного поля излучения на связанный электрон в атоме приводит к эффективному изменению кулоновского потенциала.

В данной работе найдено эффективное кулоновское взаимодействие для связанного электрона в поле электромагнитного вакуума. Смещение Лэмба вычисляется после этого как среднее значение эффективной добавки кулоновского взаимодействия.

Как известно [21], основной вклад в эффект радиационного трения дает первое слагаемое в (13). За эффект смещения Лэмба оказывается ответственной часть радиационной силы (13), содержащая оператор градиента $\nabla_j(t)$. Чтобы убедиться в этом, приведем очевидные преобразования второго слагаемого в (13).

Так же, как и при введении коэффициента радиационного трения [21], воспользуемся соотношениями между функциями Грина фотона и запаздывающей функции корреляции при нулевой температуре:

$$M_{j\nu}(\mathbf{k},\tau)\eta(\tau) = -\frac{\hbar}{2}\frac{1}{ck}\frac{d}{dt_1}D_{j\nu}(\mathbf{k},\tau) = \\ = -\frac{\hbar}{2}\frac{4\pi}{k^2}\frac{d}{dt_1}\left(\sin ck\tau\,\eta(\tau)\right)\left(\delta_{j\nu} - \frac{k_\nu k_j}{k^2}\right),\ \tau = t - t_1, \tag{14}$$

а также очевидным для функции Грина соотношением

$$D_{j\nu}(\mathbf{k},\tau) = \frac{4\pi}{k^2}\frac{d}{dt_1}\left(\cos(ck\tau)\eta(\tau)\right)\times \\ \times\left(\delta_{j\nu} - \frac{k_\nu k_j}{k^2}\right) + \frac{4\pi}{k^2}\delta(\tau)\left(\delta_{j\nu} - \frac{k_\nu k_j}{k^2}\right). \tag{15}$$

Подставляя эти выражения во второе слагаемое в (13) и интегрируя по частям по t_1, с учетом поперечной калибровки получим:

$$F_j^{(2)}(t) = \frac{e^2}{2c^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{k^2}\nabla_j(t)\times \\ \times\left\{-\cos(ck\tau)\frac{1}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)}\dot r_\alpha(t), e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\ddot r_\nu(t_1)\right]_+ + \right. \\ \left. + \sin(ck\tau)\frac{i}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)}\dot r_\alpha(t), e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\ddot r_\nu(t_1)\right]_-\right\}\times \\ \times\eta(\tau)\left(\delta_{\alpha\nu} - \frac{k_\alpha k_j}{k^2}\right). \tag{16}$$

В задаче о смещении Лэмба имеются как медленные движения с характерными частотами переходов в атоме водорода, так и быстрые релятивистские осцилляции, определяемые произведениями электронных плотностей

$$e^{i\mathbf{kr}(t)}\, e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}, \tag{17}$$

целесообразно поэтому считать в формуле (16) произведения (17) коммутирующими с операторами $\left[\dot r_\alpha(t), \ddot r_\nu(t_1)\right]$ и $\left[\dot r_\alpha(t), \ddot r_\nu(t_1)\right]_+$. Можно показать, что в силу симметрии при обращении во времени в стационарном состоянии слагаемые, содержащие антикоммутатор, исчезнут, и смещение Лэмба будет определяться лишь коммутатором $\left[\dot r_\alpha(t), \ddot r_\alpha(t_1)\right]$. С учетом вышесказанного получим:

$$F_j^{(2)}(t) = \frac{e^2}{2c^2}\frac{\hbar}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_0^{\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{k^2}\times \\ \times\left\{\sin(ck\tau)\frac{1}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)}, e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right]_+ + \right. \\ \left. + \cos(ck\tau)\frac{i}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)}, e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right]_-\right\}\times \\ \times\eta(\tau)\left(\delta_{\alpha\nu} - \frac{k_\alpha k_\nu}{k^2}\right)\nabla_j(t)\left(\frac{i}{\hbar}\left[\dot r_\alpha(t), \ddot r_\nu(t_1)\right]\right). \tag{18}$$

В характерной для связанных состояний в атоме водорода области малых частот определим оператор Лиувилля эволюции во времени квантовой скобки Пуассона согласно

$$\frac{i}{\hbar}\left[\dot r_\nu(t), \ddot r_\nu(t_1)\right] = \frac{i}{\hbar}\left[\dot r_\nu(t), \ddot r_\nu(t)\hat S(t,t_1)\right], \tag{19}$$

или

$$\frac{i}{\hbar}\left[\dot r_\nu(t), \ddot r_\nu(t_1)\right] = \frac{i}{\hbar}\left[\dot r_\nu(t), \ddot r_\nu(t)\right]\times \\ \times\hat S(t,t_1) + \ddot r_\nu(t)\frac{i}{\hbar}\left[\dot r_\nu(t), \hat S(t,t_1)\right].$$

Введем среднее значение оператора Лиувилля по стационарному состоянию в атоме водорода

$$\left\langle n,l\right|\hat S(t,t_1)\left|n,l\right\rangle = S_{n,l}(t,t_1) \tag{20}$$

и представим $\hat S(t,t_1)$ в виде

$$\hat S(t,t_1) = S_{n,l}(t,t_1) + \delta\hat S(t,t_1). \tag{21}$$

Воспользуемся общепринятым простейшим приближением, когда флуктуационной добавкой $\delta\hat S_{nl}(t-t_1)$ можно пренебречь (см., например, [19]). Тогда вместо (19) имеем

$$\frac{i}{\hbar}\left[\dot r_\alpha(t), \ddot r_\nu(t_1)\right]_- = S_{nl}(t-t_1)\frac{i}{\hbar}\left[\dot r_\alpha(t), \ddot r_\alpha(t)\right]_-, \tag{22}$$

и функция Лиувилля (20) согласно принятому выше приближению имеет вид

$$S_{nl}(t-t_1)=\frac{\sum_\alpha\left\langle n,l\left|\frac{i}{2}\left[\dot r_\alpha(t),\ddot r_\alpha(t_1)\right]\right|n,l\right\rangle}{\sum_\alpha\left\langle n,l\left|\frac{i}{2}\left[\dot r_\alpha(t),\ddot r_\alpha(t)\right]\right|n,l\right\rangle}. \quad (23)$$

Функция Лиувилля (23) является четной функцией времени и удовлетворяет очевидному свойству $S_{nl}(0)=1$. Спектральная функция Лиувилля $S_{nl}(\omega)$, определяемая частотами переходов в атоме

$$S_{nl}(\tau)=\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega\tau}S_{nl}(\omega), \quad (24)$$

является четной функцией частоты и удовлетворяет правилу сумм:

$$\int\frac{d\omega}{2\pi}S_{nl}(\omega)=1.$$

Ниже будет показано также, что (22) и (23) согласуются с формулой (123.17) из [19].

После подстановки (22) в (18) и несложных преобразований получим:

$$\begin{gathered}F_j^{(2)}(t)=\frac{\alpha}{3\pi}\lambda_c^2\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int dx\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega\tau}\times\\ \times S_{nl}(\omega)\,\omega_0\left\{\sin(x\omega_0\tau)\left\langle\frac{1}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)},e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right]_+\right\rangle_0+\right.\\ \left.+\cos(x\omega_0\tau)\left\langle\frac{i}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)},e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right]_-\right\rangle_0\eta(\tau)\right\}\times\\ \times\nabla_j\left(\frac{i}{\hbar}\left[m\dot r_\nu(t),m\ddot r_\nu(t)\right]\right),\end{gathered} \quad (25)$$

где $x=\hbar k/mc$, $\alpha=e^2/\hbar c$, $\lambda_c=\hbar/mc$, $\omega_0=mc^2/\hbar$. Скобки $\langle\ \rangle_0$ означают усреднение по основному состоянию свободного электрона Дирака. Усредненные значения в (25), обладающие сферической симметрией, приводятся в Приложении.

Воспользуемся далее нерелятивистским приближением, полагая

$$m\dot r_\nu(t)=-i\hbar\nabla_\nu(t)\ \text{и}\ \frac{d}{dt}\pi_j(t)=m\ddot r_j(t).$$

Тогда (25) запишется в виде

$$F_j^{(2)}(t)=\Lambda_{nl}^2\nabla_j(t)\nabla_\nu(t)m\ddot r_\nu(t),$$

а стохастическое уравнение (12) примет вид

$$\begin{gathered}\left(\delta_{j\nu}-\Lambda_{nl}^2\nabla_j(t)\nabla_\nu(t)\right)m\ddot r_\nu(t)+\\ +\nabla_jV(r(t))=\widetilde F_j(t)+\widetilde\xi_j(t),\end{gathered} \quad (26)$$

где введенная фундаментальная длина Λ_{nl} определяется согласно равенству

$$\begin{gathered}\Lambda_{nl}^2=\frac{\alpha}{3\pi}\lambda_c^2\int\frac{d\omega}{2\pi}S_{nl}(\omega)\int_0^\infty dx\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\times\\ \times e^{-i\omega\tau}\omega_0\left\{\sin(x\omega_0\tau)\left\langle\frac{1}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)},e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right]_+\right\rangle+\right.\\ \left.+\cos(x\omega_0\tau)\left\langle\frac{i}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)},e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right]_-\right\rangle\eta(\tau)\right\}.\end{gathered} \quad (27)$$

Достоинство полученного в данной работе уравнения (26) в том, что его решение может быть получено точно, без приближения малости Λ_{nl}^2.

С помощью преобразования Фурье

$$V(r)=\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{kr}}V(k)$$

получим точное решение (26)

$$m\ddot r_j(t)+\nabla_jV^{eff}(r)=\widetilde F_j(t)+\xi_j(t), \quad (28)$$

где

$$V^{eff}(r)=\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{kr}}\left(1-\frac{k^2}{k^2+\kappa_{nl}^2}\right)V(k), \quad (29)$$

$\kappa_{nl}^2=\Lambda_{nl}^{-2}$ и $V(k)$ определяются формфактором ядра. В частности, для точечного ядра имеем чистый кулоновский потенциал, для которого

$$V(k)=-Ze^2\frac{4\pi}{k^2}.$$

В этом случае из (29) имеем

$$\begin{gathered}V^{eff}(r)=-\frac{Ze^2}{r}\left(1-e^{-\kappa_{nl}r}\right)=\\ =V(r)+\delta V^{eff}(r).\end{gathered} \quad (30)$$

Физический смысл эффективного кулоновского потенциала (30) очень прост. На малых расстояниях $r\ll\Lambda_{nl}$ имеет место насыщение кулоновского взаимодействия

$$V^{eff}(r)=-\frac{Ze^2}{\Lambda_{nl}}.$$

Соответственно, на расстояниях $r\gg\Lambda_{nl}$ (30) переходит в чистый кулоновский потенциал.

Вычисление смещения Лэмба при учете квантовой нелокальности

Принципиальная особенность полученного выражения (26) заключается в том, что Λ_{nl}^2 не содержит бесконечностей при интегрировании по всей области передаваемых импульсов фотонов ($0<x<\infty$). Отсутствие ультрафиолетовой расходимости в Λ_{nl}^2 и, следовательно, в смещении Лэмба обусловлено наличием осцилляций Шредингера в произведении электронных плотностей (17), которые можно представить в виде

$$e^{i\mathbf{kr}(t)}e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}=e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}e^{-i\hat B\omega_0\tau}. \quad (31)$$

Здесь первый множитель $e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}$ строго вычисляется на основе решения в [21], впервые полученного Э. Шредингером в 1930 г. [35, 36]. Для фазового множителя $e^{-i\hat{B}\omega_0\tau}$ установлено асимптотически точное решение [21] в области как больших, так и малых передаваемых импульсов фотонов.

При вычислении фундаментальной длины Λ_{nl}, определяющей согласно (28) смещение Лэмба, примем во внимание тот факт, что электронные плотности осциллируют с частотой $\sim\omega_0$, существенно превышающей характерные частоты движения электрона в атоме водорода. Целесообразно поэтому представить интегрирование по t_1 независимым по «медленному» времени τ и по «быстрому» времени $\theta=\omega_0\tau$, полагая:

$$\int dt_1 \to \int d\tau\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta.$$

Поэтому перепишем (27) в виде

$$\Lambda_{nl}^2=\frac{\alpha}{3\pi}\lambda\!\!\!^{-}{}_c^2\int\frac{d\omega}{2\pi}S_{nl}(\omega)\int_0^{\infty}dx\frac{1}{\pi}\times$$
$$\times\int_0^{\pi}d\theta\int_{-\infty}^{\infty}d\tau e^{i\omega\tau}J(x,\theta,\tau)\,\eta(\tau), \tag{32}$$

где функция $J(x,\theta,\tau)$ согласно (27) задается выражением

$$J(x,\theta,\tau)=\Big\{\omega_0\sin(x\omega_0\tau)\Big\langle\frac{1}{2}\big[e^{i\mathbf{kr}(t)},e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\big]_+\Big\rangle_0+$$
$$+\cos(x\omega_0\tau)\Big\langle\frac{i}{2}\big[e^{i\mathbf{kr}(t)},e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\big]_-\Big\rangle_0\Big\}. \tag{33}$$

Полное выражение для функции (32) приведено в Приложении (формула (П.15)). Перепишем (33) в виде

$$J(x,\theta,\tau)=\omega_0\cos\big(x\sin\theta\big)\times$$
$$\times\Big\{\sin\big(x(1+\kappa)\omega_0\tau\big)+\frac{1}{2}\big(1-B_3\big)\times$$
$$\times\big(\sin\big(x(1-\kappa)\omega_0\tau\big)-\sin\big(x(1+\kappa)\omega_0\tau\big)\big)\Big\}+$$
$$+\omega_0\sin\big(x|\sin\theta|\big)B_1\times \tag{34}$$
$$\times\Big\{\frac{1}{2}\big(\sin(x(1-\kappa)\omega_0\tau)-\sin(x(1+\kappa)\omega_0\tau)\big)\times$$
$$\times Q(\theta)+\sin(x\omega_0\tau)\sin(x\kappa\omega_0\tau)\zeta(\theta)\Big\},$$

$$\kappa=\frac{1}{2}\sqrt{U^2+\left(1-\frac{U}{x}\right)^2},\quad U=\arctan(x).$$

Следовательно, $\kappa(x)$ – ограниченная плавная функция во всей области импульсов ($0\le x\le\infty$), не имеющая особенностей при $x\to 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\kappa(x)\sim x\to 0$; $\zeta(\theta)$, определяемая (П.7), – быстроосциллирующая периодическая функция с равным нулю средним по периоду значением:

$$\langle\zeta(\theta)\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\zeta(\theta)=0.$$

Чтобы продемонстрировать в наиболее простой и ясной форме отсутствие ультрафиолетовой расходимости в (32) за счет имеющихся в произведении электронных плотностей (31) быстрых осцилляций (дрожаний Шредингера), воспользуемся при вычислении Λ_{nl}^2 методом последовательных приближений.

В качестве первого шага определим вклад в Λ_{nl}^2 основного множителя $e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}$, формально полагая равным единице фазовый множитель $e^{-iB\omega_0\tau}$, что соответствует $\kappa\to 0$. На следующем этапе учитывается вклад фазового множителя как аддитивной добавки к уже полученному решению.

Таким образом, полагая в (34) $\kappa=0$, получим

$$J^0(x,\theta,\tau)=\lim_{\kappa\to 0}J(x,\theta,\tau)=$$
$$=\big\langle e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}\big\rangle_0\sin(x\omega_0\tau)= \tag{35}$$
$$=\cos(x|\sin(\theta)|)\sin(x\omega_0\tau)$$

и после подстановки (35) в (32) и интегрирования по τ с учетом четности $S_n(\omega)=S_n(-\omega)$ придем к выражению

$$\Lambda_{nl}^2=\frac{\alpha}{3\pi}\lambda\!\!\!^{-}{}_c^2\int\frac{d\omega}{2\pi}S_n(\omega)\frac{1}{\pi}\times$$
$$\times\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}dx\frac{x\cos(x|\sin\theta|)}{x^2-(\omega/\omega_0)^2}. \tag{36}$$

Здесь функция Лиувилля $S_n(\omega)$, определяемая (23), зависит от характерных частот атомных уровней. Поэтому целесообразно ввести безразмерную частоту согласно определению

$$\Omega=\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{(Z\alpha)^2}{2}f.$$

Инфракрасная расходимость в (36) отсутствует в силу ограниченности спектра энергии в атоме водорода. Отсутствие ультрафиолетовой расходимости в (36) также становится очевидным после замены переменных

$$x|\sin\theta|=y,$$
$$\frac{\omega}{\omega_0}|\sin\theta|=\frac{1}{2}(Z\alpha)^2 f|\sin\theta|=y_0. \tag{37}$$

С учетом обозначений (37) формула (36) запишется в виде

$$\Lambda_{nl}^2 = \frac{\alpha}{3\pi}\lambda\!\!\!^{-}{}_c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{2\pi} S_{nl}(f) \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dy \frac{y\cos y}{y^2 - y_0^2}. \quad (38)$$

Разбивая в (38) интегрирование по y на две области: $0 \le y \le y_1$, $y_1 \le y \le \infty$ и принимая во внимание $y_1 \gg y_0$, определим минимальное значение, при котором интегральный косинус равен нулю:

$$\int_{y_1}^{\infty} dy \frac{\cos y}{y} = 0.$$

После этого, учитывая, что $\cos y = 1 - 2\sin^2(y/2)$, представим интервал в (38) в виде суммы двух интегралов:

$$\Lambda_{nl}^2 = \frac{\alpha}{3\pi}\lambda\!\!\!^{-}{}_c^2 \left\{ \int \frac{df}{2\pi} S_n(f) \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \times \right. \\ \left. \times \int_0^{y_1} dy \frac{y}{y^2 - y_0^2} - 2\int_0^{y_1} dy \frac{\sin^2(y/2)}{y} \right\}. \quad (39)$$

После выполнения интегрирования в (39) приходим к следующему выражению:

$$\Lambda_{n0}^2 = \frac{\alpha}{3\pi}\lambda\!\!\!^{-}{}_c^2 \left(\ln\frac{1}{Z\alpha^2} + L_{n0} + \right. \\ \left. + \ln\frac{2y_1}{\sigma_0} - 2\int_0^{y_1} dy \frac{\sin^2(y/2)}{y} \right), \quad (40)$$

где введены обозначения

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \ln(\sin\theta) = \ln\sigma_0 = \ln\frac{1}{2},$$

$$\int_0^{y_1} \frac{df}{2\pi} S_{n0}(f) \ln\frac{1}{f} = L_{n0}. \quad (41)$$

Здесь, в соответствии с определением функции Лиувилля (23), формула (41) для параметра L_{n0} согласуется с формулой (123.17) из [19].

На основе полученного выражения для Λ_{n0}^2 приведем вычисление смещения Лэмба для s-состояний и сопоставим его с известными экспериментальными и теоретическими расчетами, полученными на основе процедуры перенормировок. С этой целью запишем в первом порядке по Λ_{n0}^2 значение поправки к кулоновскому потенциалу (28)

$$\delta V^{eff}(r) = \Lambda_{n0}^2 \Delta V(r),$$

которая определяет смещение Лэмба в первом порядке теории возмущений

$$\delta E_{n,0}^L = \langle n,0 | \Delta V(r) | n,0 \rangle \Lambda_{n0}^2. \quad (42)$$

Используя выражение (40) для Λ_{n0}^2 и вычисляя согласно (42) среднее значение $\Delta V(r)$, найдем смещение Лэмба для s-состояний (Z=1)

$$\delta E_{n,0}^L = \frac{4}{3\pi} mc^2 \frac{1}{n^3} \alpha^5 \left(\ln\frac{1}{\alpha^2} + L_{n0} + \right. \\ \left. + \ln\frac{2y_1}{\sigma_0} - 2\int_0^{y_1} dy \frac{\sin^2(y/2)}{y} \right), \quad (43)$$

которому соответствует частота перехода ≈ 1073 МГц. Данное значение существенно превосходит экспериментальное значение [18] 1058 МГц, что связано с принятым выше нулевым приближением.

Физический смысл нулевого приближения очень прост. Полагая фазовый множитель равным единице, мы получаем выражение для $J^0(x,\theta,\tau) \sim \sin(x\omega_0\tau)$, которое обязано своим происхождением взаимодействию релятивистского электрона с электромагнитным вакуумом. При этом отсутствие ультрафиолетовой расходимости связано с конечностью дисперсии приращения координаты релятивистского электрона $(\mathbf{k}\Delta\mathbf{r})^2 = x^2|\sin\omega_0\tau|^2$. Это является физической причиной запаздывания взаимодействия, названной нами эффектом квантовой нелокальности.

Ясно, что учет фазового множителя приведет к уменьшению значения, полученного по формуле (42), и к лучшему соответствию с экспериментальным значением. Наиболее просто это можно сделать, если пренебречь взаимными корреляциями быстрых осцилляций. Легко показать, что этому приближению соответствует следующее выражение функции $J(x,\theta,\tau)$:

$$J_1(x,\theta,\tau) = \omega_0\cos(x\sin\theta) \times \\ \times \left\{ \sin(x(1+\kappa)\omega_0\tau) + \frac{1}{2}(1 - B_3) \times \right. \\ \left. \times \left(\sin(x(1-\kappa)\omega_0\tau) - \sin(x(1+\kappa)\omega_0\tau) \right) \right\} + \\ + \omega_0\sin(x|\sin\theta|) B_1 \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2}\left(\sin(x(1-\kappa)\omega_0\tau) - \sin(x(1+\kappa)\omega_0\tau) \right) \frac{2}{\pi} \right\}. \quad (44)$$

Здесь учтен тот факт, что в силу нечетности быстроосциллирующей периодической функции $\zeta(\theta)$ ее среднее по периоду равно нулю:

$$\langle \zeta(\theta) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \zeta(\theta) = 0.$$

Зависимость $Q(\theta)$ заменяется средним значением, равным $2/\pi$. После этого подставим (44) в формулу (32) и проинтегрируем по медленному времени τ:

$$\Lambda_{nl}^2 = \frac{\alpha}{3\pi}\lambda_c^2 \int_{-\infty}^{\infty}\frac{df}{2\pi}S_{nl}(f)\frac{1}{\pi}\times$$
$$\times\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}dx\left\{\frac{x\cos(x\sin\theta)}{x^2-\widetilde{\Omega}^2}\frac{1}{1+\kappa}+\right.$$
$$+\frac{x\cos(x\sin\theta)}{x^2-\widetilde{\Omega}^2}\frac{(1-B_3)\kappa}{1-\kappa^2}+ \qquad (45)$$
$$\left.+\frac{2}{\pi}\frac{x\sin(x|\sin\theta|)}{x^2-\widetilde{\Omega}^2}\frac{B_1\kappa}{1-\kappa^2}\right\}.$$

Выделим в (45) слагаемые, пропорциональные κ. В этих слагаемых отсутствуют особенности при $x\to 0$ и поэтому в них можно опустить зависимость от Ω^2. Соответственно, слагаемое, не содержащее κ, будет строго совпадать с формулой нулевого приближения. С учетом вышесказанного имеем:

$$\Lambda_{nl}^2 = \frac{\alpha}{3\pi}\lambda_c^2 \int_{-\infty}^{\infty}\frac{df}{2\pi}S_{nl}(f)\frac{1}{\pi}\times$$
$$\times\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}dx\frac{x\cos(x\sin\theta)}{x^2-\widetilde{\Omega}^2}+$$
$$+\frac{\alpha}{3\pi}\lambda_c^2\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}dx\left\{-\frac{\cos(x\sin\theta)}{x}\frac{\kappa}{1+\kappa}+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos(x\sin\theta)}{x}\frac{(1-B_3)\kappa}{1-\kappa^2}+\frac{2}{\pi}\frac{\sin(x|\sin\theta|)}{x}\frac{B_1\kappa}{1-\kappa^2}\right\}.$$

Итак, смещение Лэмба вместо (43) получим в виде

$$\delta E_{n,0}^L = \frac{4}{3\pi}mc^2\frac{1}{n^3}\alpha^5\times$$
$$\times\left(\ln\frac{1}{\alpha^2}+L_{n0}+I_0+I_1+I_2\right),$$

где

$$I_0=\ln\frac{2y_1}{\sigma_0}-2\int_0^{y_1}dy\frac{\sin^2(y/2)}{y}=0.903-0.094,$$

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}dx\frac{\cos(x\sin\theta)}{x}\times$$
$$\times\left(-\frac{\kappa}{1+\kappa}+\frac{(1-B_3)\kappa}{1-\kappa^2}\right)=-0.284,$$
$$I_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}dy\frac{\sin(x|\sin\theta|)}{x}\frac{B_1\kappa}{1-\kappa^2}\frac{2}{\pi}=0.208,$$

что приводит к значению лэмбовского сдвига

$$\delta E_{n,0}^L \approx \frac{4}{3\pi}mc^2\frac{1}{n^3}\alpha^5\left(\ln\frac{1}{\alpha^2}+L_{n0}+0.733\right) \qquad (46)$$

и соответствующей частоте перехода 1063.5 МГц.

Полученное выражение полезно сопоставить с известным результатом (123.18) из [19]:

$$\delta E_{n,0}^L = \frac{4}{3\pi}mc^2\frac{1}{n^3}\alpha^5\left(\ln\frac{1}{\alpha^2}+L_{n0}+\frac{19}{30}\right), \qquad (47)$$

что соответствует частоте перехода 1050 МГц. Сопоставляя теоретические расчеты смещения Лэмба по формулам (42) и (123.18) из [19] с приводимым в [18] экспериментальным значением $\nu^{эксп}\approx 1058$ МГц, можно сделать вывод о приблизительно равной точности сравниваемых расчетов.

Заключение

Квантовая теория поля достигла замечательных результатов в объяснении широкого спектра релятивистских эффектов [18]. Её методы успешно используются в различных областях, в частности, статистической физике конденсированных сред [37]. Тем не менее, в квантовой теории поля оказались неразрешенными на протяжении большого промежутка времени проблема расходимостей и парадоксы радиационного трения.

Согласно Вайнбергу [18] возникшая с первых же дней существования релятивистской квантовой теории проблема бесконечностей не нашла своего окончательного решения и по сей день. Очевидно логическое несовершенство теории перенормировок, основанной на процедуре вычитания бесконечностей [19].

Чтобы разрешить проблему бесконечностей и устранить парадоксы радиационного трения, необходимо было выйти за рамки общепринятой в квантовой теории поля асипмтотической теории возмущений. Наиболее адекватным этим целям может служить универсальный метод броуновского движения, который занимает особое место в статистической физике начиная с пионерских работ Ланжевена, Эйнштейна, Смолуховского [38].

Современная макроскопическая теория броуновского движения основана на установленных строгих флуктуационно-диссипационных теоремах (ФДТ) Найквиста–Каллена–Вельтона, нелинейных ФДТ и соотношениях взаимности Стратоновича–Ефремова и универсальных флуктуационно-диссипационных соотношениях (ФДС) Бочкова–Кузовлева [39]. Интерес к исследованиям в этом направлении значительно возрос в последние годы [40].

Особую значимость для различных приложений приобретает микроскопическая квантовая теория броуновского движения [22–24]. На её основе предложено решение ряда фундаментальных проблем квантовой теории поля. Установлен эффект квантовой нелокальности, учитывающий явным образом запаздывание взаимодействия релятивистского электрона с полем электромагнитного вакуума. Явный учет запаздывания взаимодействия между источником и полем излучения автоматически исключает парадокс радиационного трения и расходимости, присущие асимптотическим методам теории возмущений при вычислении радиационных эффектов.

Важно отметить, что эффект квантовой нелокальности связан с так называемыми «дрожаниями» (осцилляциями) Шредингера [35], которые являются следствием точных решений уравнений Гейзенберга для динамических переменных релятивистского электрона Дирака.

В настоящей работе для демонстрации важнейшей особенности предлагаемого подхода, свободного от расходимостей, выбран лэмбовский сдвиг уровней, обусловленный воздействием на связанный электрон флуктуаций электромагнитного вакуума и, таким образом, имеющий статистическую природу. Найдено эффективное кулоновское взаимодействие для связанного электрона в поле электромагнитного вакуума. Смещение Лэмба вычисляется после этого как среднее значение эффективной добавки кулоновского взаимодействия. Полученное численное значение находится в хорошем согласии с экспериментальным значением и может быть улучшено после разработки более строгих численных методов.

Приложение

Вычисление асимптотического значения электронных плотностей

Согласно [21] произведение электронных плотностей можно представить следующим образом:

$$e^{i\mathbf{kr}(t)}e^{-i\mathbf{kr}(t_1)} = e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}e^{-i\hat{B}\omega_0\tau}. \qquad (\text{П}.1)$$

Первый сомножитель в (П.1) строго определяется из решения Шредингера (35) [21]. При $\mathbf{p}=0$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{k}\Delta\mathbf{r} &= \mathbf{k}\big(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_1)\big) = x\sin(\omega_0\tau)\times\\ &\times\big(\beta_1\cos(\omega_0\tau)-\beta_2\sin(\omega_0\tau)\big)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}),\end{aligned} \qquad (\text{П}.2)$$

где $\tau = t - t_1$, $x = k\lambda_c$, λ_c – комптоновская длина волны электрона, $\omega_0 = mc^2/\hbar$, $|\mathbf{n}|=1$ – единичный вектор, характеризующий направление вектора $\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\sigma}$ – матрицы Паули, матрицы β_1,β_2,β_3 вводятся следующим образом: $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\beta_1$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \omega_0\boldsymbol{\sigma}\cdot\beta_2$, $\beta = I\cdot\beta_3$ [35]. С учетом свойств матриц β_1,β_2,β_3

$$\beta_1\beta_2 = -\beta_2\beta_1 = i\beta_3,\ \beta_1^2 = \beta_2^2 = 1 \qquad (\text{П}.3)$$

находим дисперсию оператора (П.2) и, соответственно,

$$k\Delta r = \sqrt{(\mathbf{k}\Delta\mathbf{r})^2} = x|\sin(\omega_0\tau)| \equiv xQ. \qquad (\text{П}.4)$$

Принимая во внимание (П.2) и (П.4), запишем $e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}$ в виде

$$\begin{aligned}e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} &= \cos(k\Delta r) + i\sin(k\Delta r)\frac{\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}{k\Delta r} =\\ &= \cos(xQ(\theta)) + i\sin(xQ(\theta))\times\\ &\times\big(\beta_1\zeta(\theta)-\beta_2 Q(\theta)\big)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}),\end{aligned} \qquad (\text{П}.5)$$

где введены обозначения быстроосциллирующих периодических функций

$$\begin{aligned}\zeta(\theta) &= \frac{\sin(\omega_0\tau)}{|\sin(\omega_0\tau)|}\cos(\omega_0\tau) = \frac{\sin\theta}{|\sin\theta|}\cos\theta,\\ Q(\theta) &= |\sin(\omega_0\tau)| = |\sin\theta|.\end{aligned} \qquad (\text{П}.6)$$

Выражение для второго множителя в (П.1), определяемое оператором

$$\begin{aligned}\hat{B} &= \frac{x}{2}\left(\beta_3 U(x) + \beta_1\left(1-\frac{U(x)}{x}\right)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\right),\\ U &= \arctan(x),\end{aligned} \qquad (\text{П}.7)$$

получено в Приложении в [21] на основе формального метода теории s-матрицы. Это решение имеет асимптотически строгий характер как в области больших ($x > 1$), так и малых ($x < 1$) передаваемых импульсов фотонов. В промежуточной области ($x \sim 1$) полученное решение (П.5), отличаясь от точного, тем не менее, не приведет к существенной ошибке вследствие интегрирования в (32) по всей области x.

Вычисляя дисперсию фазового оператора (П.7) на основе свойств матриц β_1,β_2,β_3 (П.3), определим соответственно

$$\widetilde{B} = \sqrt{(\hat{B})^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{U^2 + \left(1-\frac{U}{x}\right)^2} = x\,\kappa(x), \qquad (\text{П}.8)$$

где

$$\kappa(x) = \frac{1}{2}\sqrt{U^2 + \left(1-\frac{U}{x}\right)^2},\quad \lim_{x\to 0}\kappa(x) = 0.$$

Запишем также отношение

$$\frac{\hat{B}}{\widetilde{B}} = \big(B_3\beta_3 + B_1\beta_1(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\big), \qquad (\text{П}.9)$$

где фазовые функции B_3 и B_1 есть

$$\begin{aligned}B_1 &= \frac{1-U/x}{\sqrt{U^2+(1-U/x)^2}},\\ B_3 &= U\Big/\sqrt{U^2+(1-U/x)^2}.\end{aligned} \qquad (\text{П}.10)$$

Запишем после этого аналогично (П.5) выражение для фазового множителя

$$\begin{aligned}e^{-i\hat{B}\omega_0\tau} &= \big\{\cos(\widetilde{B}\omega_0\tau) -\\ &- i\sin(\widetilde{B}\omega_0\tau)\big(B_3\beta_3 + B_1\beta_1(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\big)\big\}.\end{aligned} \qquad (\text{П}.11)$$

Принимая во внимание (П.5) и (П.11), запишем их произведение

$$\begin{aligned} &e^{i\mathbf{kr}(t)}e^{-i\mathbf{kr}(t_1)} = e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}e^{-i\hat{B}\omega_0\tau} = \\ &= \{\cos(xQ(\theta)) + i\sin(xQ(\theta))\times \\ &\times(\beta_1\zeta(\theta) - \beta_2 Q(\theta))(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\}\times \\ &\times\{\cos(\widetilde{B}\omega_0\tau) - i\sin(\widetilde{B}\omega_0\tau)\times \\ &\times(B_3\beta_3 + B_1\beta_1(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}))\}. \end{aligned} \quad (\text{П}.12)$$

После очевидных преобразований с учетом свойств матриц $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и условия, что средние значения по основному состоянию электрона выглядят следующим образом:

$$\langle\beta_3\rangle_0 = 1,\ \langle\beta_1\rangle_0 = \langle\beta_2\rangle_0 = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} &\left\langle e^{i\mathbf{kr}(t)}e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right\rangle_0 = \cos(xQ(\theta))\cos(\widetilde{B}\omega_0\tau) + \\ &+\sin(xQ(\theta))\sin(\widetilde{B}\omega_0\tau)\,B_1\zeta(\theta) - \\ &-i\{\cos(xQ(\theta))\sin(\widetilde{B}\omega_0\tau)\,B_3 - \\ &-\sin(xQ(\theta))\sin(\widetilde{B}\omega_0\tau)\,B_1\,Q(\theta)\} \end{aligned} \quad (\text{П}.13)$$

Из полученного выражения (П.13), а также условия

$$e^{i\mathbf{kr}(t)}e^{-i\mathbf{kr}(t_1)} = \left(e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}e^{i\mathbf{kr}(t)}\right)^+$$

определим средние по основному состоянию электрона значения антикоммутатора и коммутатора электронных плотностей

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{1}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)}, e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right]_+\right\rangle_0 = \\ &= \cos(xQ(\theta))\sin(\widetilde{B}\omega_0\tau) + \\ &+\sin(xQ(\theta))\sin(\widetilde{B}\omega_0\tau)\,B_1\zeta(\theta), \\ &\left\langle \frac{i}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)}, e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right]_-\right\rangle_0 = \\ &= \cos(xQ(\theta))\sin(\widetilde{B}\omega_0\tau)B_3 - \\ &-\sin(xQ(\theta))\sin(\widetilde{B}\omega_0\tau)\,B_1\,Q(\theta). \end{aligned} \quad (\text{П}.14)$$

Запишем выражение

$$\begin{aligned} &J(x,\theta,\tau) = \omega_0\sin(x\omega_0\tau)\times \\ &\times\left\langle \frac{1}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)}, e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right]_+\right\rangle_0 + \\ &+\omega_0\cos(x\omega_0\tau)\left\langle \frac{i}{2}\left[e^{i\mathbf{kr}(t)}, e^{-i\mathbf{kr}(t_1)}\right]_-\right\rangle_0 = \\ &= \omega_0\{\cos(xQ(\theta))\sin((x+\widetilde{B})\omega_0\tau) + \\ &+\cos(xQ(\theta))(1-B_3)\frac{1}{2}\times \\ &\times\left(\sin((x-\widetilde{B})\omega_0\tau) - \sin((x+\widetilde{B})\omega_0\tau)\right) + \\ &+\sin(xQ(\theta))B_1\frac{1}{2}\left(\sin((x-\widetilde{B})\omega_0\tau) - \right. \\ &\left. -\sin((x+\widetilde{B})\omega_0\tau)\right)Q(\theta) + \\ &+\sin(xQ(\theta))B_1\sin(x\omega_0\tau)\sin(\widetilde{B}\omega_0\tau)\zeta(\theta)\}, \end{aligned} \quad (\text{П}.15)$$

определяющее согласно (31) фундаментальную величину Λ^2_{nl} и, следовательно, смещение Лэмба.

Список литературы

1. Abraham M. Theorie der Elektrizitat. Bd.2: Elektromagnetische Theorie der Strahlung, Teubner, Leipzig, 1905.; Lorentz H.A. Theory of Electrons. 2nd edition 1915. Reprinted by Dover, New York, 1952.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
3. Dirac P.A.M. //Proc. Roy. Soc. A. 1938. V. 167. P. 148.
4. Jackson J.D. Classical Electrodynamics. Wiley, New York, 1975.
5. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1981.
6. Feynman R.P. //Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 939.
7. Ford G.W., Lewis J.T., O'Connell R.F. //Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2273.
8. Hakim V., Ambegaokar V. //Phys. Rev. A. 1985. V. 32. P. 423.
9. Barone P.M., Caldeira A.O. //Phys. Rev. A. 1991. V. 43. P. 57.
10. Ефремов Г.Ф. //ЖЭТФ. 1996. Т. 110. С. 1629.
11. Ефремов Г.Ф. //ЖЭТФ. 1998. Т. 114. С. 1661.
12. Никишов А.И., Ритус В.И. //ЖЭТФ. 1998. Т. 110. С. 510.
13. Косяков В.П. //ТМФ. 1999. Т. 119. С. 119.
14. Rohrlich F. //Phys. Lett. A. 2001. V. 283. P. 276; Phys. Lett. A. 2002. V. 295. P. 320.
15. Mendes A.C.R., Takakura F.I. //Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056501.
16. Petrosky T., Ordonez G., Prigogine I. //Phys. Rev. A. 2003. V. 68. P. 022107.
17. Лидский В.В. //ТМФ. 2005. Т. 143. С. 112.
18. Вайнберг С. Квантовая теория поля. Т. 1. Общая теория. М.: Физматлит, 2003.
19. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
20. Тютин И.В., Фрадкин Е.С. //Ядерная физика. 1970. Т. 12. С. 417.
21. Ефремов Г.Ф., Шарков В.В. //ЖЭТФ. 2004. Т. 125. С. 195.
22. Ефремов Г.Ф., Шарков В.В. //ТМФ. 2009. Т. 158. С. 478.
23. Ефремов Г.Ф., Казаков В.А. //Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. С. 453.
24. Ефремов Г.Ф., Смирнов А.Ю. //ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 1071.
25. Schwinger J. //J. Math. Phys. 1961. V. 2. P. 407.
26. Senitzky I.R. //Phys. Rev. 1960. V. 119. P. 670; Phys. Rev. 1961. V. 124. P. 642.
27. Ефремов Г.Ф., Мареева О.В., Воробьёв Д.А., Шарков В.В. //Актуальные проблемы статистической радиофизики (Малаховский сборник). 2003. Т. 2. С. 1.
28. Ивченко Е.Л. //УФН. 2012. Т. 182. С. 869.
29. Efremov G.F., Novicov M.A., Ivanov B.B. // In: Causality and Locality in Modern Physics. Kluwer Academic Publishers. 1996. P. 87.
30. Lamb W.E., Retherford R.C. //Phys. Rev. 1947. V. 72. P. 241.
31. Bethe H.A. //Phys. Rev. 1947. V. 72. P. 339.

32. Welton T.A. //Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 1157.
33. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974.
34. Воронов Б.Л., Гитман Д.М., Тютин И.В. //ТМФ. 2007. Т. 150. С. 41.
35. Schrodinger E. //Sitzungsb. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1930. V. 24. P. 418.
36. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1979.
37. Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962.
38. Эйнштейн А., Смолуховский М. Броуновское движение. М.: ОНТИ, 1936.
39. Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1985.
40. Питаевский Л.П. //УФН. 2011. Т. 181. С. 647.

A MODEL OF ASTROCYTIC REGULATION OF INTERNEURON INHIBITORY AND EXCITATORY INPUTS

S.V. Stasenko, S.Yu. Gordleeva, A.V. Semyanov, A.E. Dityatev, V.B. Kazantsev

The article proposes a mathematical model of astrocytic regulation of inhibitory and excitatory signal pathways in a neural network. The model describes the dynamics of an interneuron with excitatory and inhibitory inputs whose efficiencies are modulated by different gliatransmitters (glutamate, D-serine) released by neighboring astrocyte activation. This modulation coordinates the excitatory and inhibitory inputs, that allows the astrocyte to prevent interneuron hyperexcitation. In addition, the model predicts that the modulation is frequency-dependent and either potentiates or depresses the neuron response depending on the input frequency.

Keywords: neuron-glial interaction, synaptic transmission, astrocyte, neuron.

References

1. Abraham M. Theorie der Elektrizitat. Bd.2: Elektromagnetische Theorie der Strahlung, Teubner, Leipzig, 1905.; Lorentz H.A. Theory of Electrons. 2nd edition 1915. Reprinted by Dover, New York, 1952.
2. Landau L.D., Lifshic E.M. Teorija polja. M.: Nauka, 1973.
3. Dirac P.A.M. //Proc. Roy. Soc. A. 1938. V. 167. P. 148.
4. Jackson J.D. Classical Electrodynamics. Wiley, New York, 1975.
5. Ginzburg V.L. Teoreticheskaja fizika i astrofizika. M.: Nauka, 1981.
6. Feynman R.P. //Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 939.
7. Ford G.W., Lewis J.T., O'Connell R.F. //Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2273.
8. Hakim V., Ambegaokar V. //Phys. Rev. A. 1985. V. 32. P. 423.
9. Barone P.M., Caldeira A.O. //Phys. Rev. A. 1991. V. 43. P. 57.
10. Efremov G.F. //ZhJeTF. 1996. T. 110. S. 1629.
11. Efremov G.F. //ZhJeTF. 1998. T. 114. S. 1661.
12. Nikishov A.I., Ritus V.I. //ZhJeTF. 1998. T. 110. S. 510.
13. Kosjakov V.P. //TMF. 1999. T. 119. S. 119.
14. Rohrlich F. //Phys. Lett. A. 2001. V. 283. P. 276; Phys. Lett. A. 2002. V. 295. P. 320.
15. Mendes A.C.R., Takakura F.I. //Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056501.
16. Petrosky T., Ordonez G., Prigogine I. //Phys. Rev. A. 2003. V. 68. P. 022107.
17. Lidskij V.V. //TMF. 2005. T. 143. S. 112.
18. Vajnberg S. Kvantovaja teorija polja. T. 1. Obshhaja teorija. M.: Fizmatlit, 2003.
19. Beresteckij V.B., Lifshic E.M., Pitaev-skij L.P. Kvantovaja jelektrodinamika. M.: Nauka, 1989.
20. Tjutin I.V., Fradkin E.S. //Jadernaja fizika. 1970. T. 12. S. 417.
21. Efremov G.F., Sharkov V.V. //ZhJeTF. 2004. T. 125. S. 195.
22. Efremov G.F., Sharkov V.V. //TMF. 2009. T. 158. S. 478.
23. Efremov G.F., Kazakov V.A. //Izv. vuzov. Radiofizika. 1979. T. 22. S. 453.
24. Efremov G.F., Smirnov A.Ju. //ZhJeTF. 1981. T. 80. S. 1071.
25. Schwinger J. //J. Math. Phys. 1961. V. 2. P. 407.
26. Senitzky I.R. //Phys. Rev. 1960. V. 119. P. 670; Phys. Rev. 1961. V. 124. P. 642.
27. Efremov G.F., Mareeva O.V., Vorob'jov D.A., Sharkov V.V. //Aktual'nye problemy statisticheskoj radiofiziki (Malahovskij sbornik). 2003. T. 2. C. 1.
28. Ivchenko E.L. //UFN. 2012. T. 182. S. 869.
29. Efremov G.F., Novicov M.A., Ivanov B.B. // In: Causality and Locality in Modern Physics. Kluwer Academic Publishers. 1996. P. 87.
30. Lamb W.E., Retherford R.C. //Phys. Rev. 1947. V. 72. P. 241.
31. Bethe H.A. //Phys. Rev. 1947. V. 72. P. 339.
32. Welton T.A. //Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 1157.
33. Sokolov A.A., Ternov I.M. Reljativistskij jelektron. M.: Nauka, 1974.
34. Voronov B.L., Gitman D.M., Tjutin I.V. //TMF. 2007. T. 150. S. 41.
35. Schrodinger E. //Sitzungsb. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1930. V. 24. P. 418.
36. Dirak P.A.M. Principy kvantovoj mehaniki. M.: Fizmatgiz, 1979.
37. Abrikosov A.A., Gor'kov L.P., Dzjaloshin-skij I.E. Metody kvantovoj teorii polja v statisticheskoj fizike. M.: Fizmatgiz, 1962.
38. Jejnshtejn A., Smoluhovskij M. Brounov-skoe dvizhenie. M.: ONTI, 1936.
39. Stratonovich R.L. Nelinejnaja neravnovesnaja termodinamika. M.: Nauka, 1985.
40. Pitaevskij L.P. //UFN. 2011. T. 181. S. 647.