УДК 519.711.2

О ВЛИЯНИИ ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ КВАЗИИНВАРИАНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ТОЧНОСТЬ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕШЕНИЯ И ВРЕМЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

И.С. Гельфер

НИИ прикладной математики и кибернетики
Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

neymark@pmk.unn.ru

Поступила в редакцию 06.11.2013

Работа посвящена дальнейшему исследованию свойств квазиинвариантного управления, а именно, даны оценки для точности установившегося решения и времени переходного процесса. Полученные аналитические результаты сопровождаются численными экспериментами.

Ключевые слова: динамическая система, устойчивость, квазиинвариантное управление, численное моделирование.

С помощью синтеза квазиинвариантного управления объектом динамической системы, осуществлённого Ю.И. Неймарком, была разрешена проблема идеального регулятора Г.В. Щипанова. При этом наметился ряд вопросов, связанных с возможностью и улучшением качества управления объектом, требующих дальнейшего изучения.

Система квазиинвариантного управления объектом описывается [1] уравнениями вида

$$\begin{aligned} A_n(p)x &= -B_m(p)(u+\xi(t)), \\ \mu u &= D_q(p)(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $A_n(p),\ B_m(p),\ D_q(p)$ – действительные полиномы от $p = d/dt$ степеней n, m и q, μ – малый параметр, x – управляемая действительная переменная, u – управление, $\xi(t)$ – внешнее ограниченное воздействие. В [1] показано, что при любом $A_n(p)$, гурвицевом $B_m(p)$ и надлежащим образом выбираемых μ и $D_q(p)$, $q = n - m - 1$, возможно обеспечить устойчивость системы управления и спустя некоторое время $T > 0$ сколь угодную малость $|x(t)|$. Но в переходном процессе $|u|$ может достигать очень больших значений, а время установления – быть длительным, в то время как $|u|$ должен быть ограниченным, а сам переходный процесс достаточно быстрым. Требование ограниченности $|u|$ можно удовлетворить путём изменения вида управления, варианты которого, предложенные Ю.И. Неймарком, рассмотрены в [2]. Способ добиться малости времени установления T, также предложенный Ю.И. Неймарком, кратко описан в [3]. В данной работе подробно показывается, как выбор корней полинома $D_q(p)$ и значений параметра μ влияет на время переходного процесса T, а также даётся оценка точности установившегося решения $|x(t)|$.

О быстроте переходного процесса

Общее решение уравнения $(\mu A_n(p) + B_m(p)D_q(p))x = -\mu B_m(p)\xi$, которое получается из системы (1), если выразить u через x, есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения, $x_1(t)$, и частного решения неоднородного с нулевыми начальными условиями, $x_2(t)$:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} + \mu \sum_{i=1}^{n} K_i \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} \xi(\tau) d\tau, \tag{2}$$

где $x_1(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}$ определяет переходный процесс, а $x_2(t) = \mu \sum_{i=1}^{n} K_i \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} \xi(\tau) d\tau$ – установившийся режим. Коэффициенты c_i определяются из заданных начальных условий $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_1$, …, $x^{n-1}(0) = x_{n-1}$, а

$$K_i = \frac{B_m(\lambda_i)}{\left(\mu \cdot A_n(p) + B_m(p)D_q(p)\right)'_{p=\lambda_i}},$$

где λ_i – корни характеристического полинома $\mu A_n(p) + B_m(p)D_q(p)$, имеющие отрицательные действительные части в силу требуемой его устойчивости. Имеет место

Утверждение. Для любых сколь угодно малых $\varepsilon>0$ и $T>0$ при ограниченности возмущения $\xi(t)$ и начальных условий при $m=0$ возможен такой выбор μ и корней полинома $D_q(p)$, $q=n-1$, для которых при всех $t>T$ $|x(t)|<\varepsilon$.

Доказательство. По условию $|x_i|<N<\infty$, $i=\overline{0,n-1}$, $|\xi(t)|<M<\infty$. Выберем корни многочлена $D_{n-1}(p)$ действительными, отрицательными и различными. При $\mu\to 0$ $n-1$ корней полинома $\mu A_n(p)+D_{n-1}(p)$ стремятся к корням $D_{n-1}(p)$, а ещё один, λ_n, должен стремиться к ∞, т.к. $D_{n-1}(\lambda_n)\neq 0$, а $\mu A_n(\lambda_n)+D_{n-1}(\lambda_n)=0$. Для устойчивости $\mu A_n(p)+D_{n-1}(p)$ требуется, чтобы $\lambda_n\to-\infty$. Поделив равенство $\mu A_n(\lambda_n)+$ $+D_{n-1}(\lambda_n)=0$ на λ_n^{n-1}, получаем $\mu a_n\lambda_n=-(d_{n-1}+$ $+\mu a_{n-1})-\ldots-(d_0+\mu a_0)\lambda_n^{-n+1}$, откуда следует, что при $\mu\to 0$ $\lambda_n\approx-\dfrac{d_{n-1}}{a_n\mu}$, где a_n, d_{n-1} – коэффициенты при старших степенях полиномов $A_n(p)$ и $D_{n-1}(p)$, и, чтобы $\lambda_n\to-\infty$, надо выбрать $\operatorname{sgn}(\mu)=\operatorname{sgn}(d_{n-1}/a_n)$.

Учитывая, что $x_2(t)$ берётся с нулевыми начальными условиями, имеем:

$$\begin{cases} c_1+c_2+\ldots+c_n=x_0,\\ \lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\ldots+\lambda_nc_n=x_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_1^{n-1}c_1+\lambda_2^{n-1}c_2+\ldots+\lambda_n^{n-1}c_n=x_{n-1},\end{cases}$$

откуда определяются

$$c_i=\frac{\begin{vmatrix}1\ldots\ldots\ldots1\;x_0\;1\ldots\ldots\ldots1\\ \lambda_1\ldots\lambda_{i-1}\;x_1\;\lambda_{i+1}\ldots\lambda_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_1^{n-1}\ldots\lambda_{i-1}^{n-1}\;x_{n-1}\lambda_{i+1}^{n-1}\ldots\lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1\;1\ldots\ldots\ldots\ldots1\\ \lambda_1\;\lambda_2\ldots\ldots\ldots\lambda_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_1^{n-1}\lambda_2^{n-1}\ldots\ldots\lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}},\ i=\overline{1,n}.$$

Знаменатель c_i – определитель Вандермонда, равный $\prod\limits_{1\le j<i\le n}(\lambda_i-\lambda_j)$, не равный нулю в силу того, что $\lambda_i\neq\lambda_j$ при $i\neq j$. После соответствующих преобразований, а именно, приведя числитель у c_i к треугольному виду и сократив общие множители, получаем

$$|c_i|=\left|\left(x_{n-1}-x_{n-2}\sum_{j\neq i}\lambda_j+x_{n-3}\sum_{\substack{j,k\neq i,\\ j\neq k}}\lambda_j\lambda_k-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\ldots+(-1)^{n-1}x_0\prod_{j\neq i}\lambda_j\right)\left(\prod_{j\neq i}(\lambda_j-\lambda_i)\right)^{-1}\right|. \tag{3}$$

Если $i=n$, то λ_n входит в знаменатель выражения (3) в степени $n-1$, а в числителе λ_n отсутствует, и, т.к. при $\mu\to 0$ $\lambda_n\to-\infty$, а λ_j, $j=\overline{1,n-1}$, конечны, то $|c_n|\to 0$.

Пусть $i\neq n$. λ_n входит в числитель и знаменатель выражения (3) в первой степени. Разделив числитель и знаменатель на λ_n, получим

$$|c_i|=\left|\left(x_{n-2}-x_{n-3}\sum_{j\neq i,n}\lambda_j+\ldots+(-1)^n x_0\prod_{j\neq i,n}\lambda_j+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{g(\bar{x}_0^{n-1};\bar{\lambda}_1^{n-1})}{\lambda_n}\right)\left(\prod_{j\neq i,n}(\lambda_j-\lambda_i)-\frac{f(\bar{x}_0^{n-1};\bar{\lambda}_1^{n-1})}{\lambda_n}\right)^{-1}\right|,$$

$$\bar{x}_0^{n-1}=\{x_0,\ldots,x_{n-1}\},\ \bar{\lambda}_1^{n-1}=\{\lambda_1,\ldots\lambda_{n-1}\},$$

где $g=x_{n-1}-x_{n-2}\sum\limits_{j\neq i,n}\lambda_j+\ldots+(-1)^{n-1}x_0\prod\limits_{j\neq i,n}\lambda_j$ и $f=\lambda_i\times\ \times\prod\limits_{j\neq i,n}(\lambda_j-\lambda_i)$ не зависят от λ_n, а значит, $\dfrac{g}{\lambda_n}$, $\dfrac{f}{\lambda_n}$ стремятся к нулю при $\mu\to 0$ и

$$|c_i|\xrightarrow[\mu\to 0]{}\left|\frac{x_{n-2}-x_{n-3}\sum\limits_{j\neq i,n}\lambda_j+\ldots+(-1)^n x_0\prod\limits_{j\neq i,n}\lambda_j}{\prod\limits_{j\neq i,n}(\lambda_j-\lambda_i)}\right|,$$

откуда следует ограниченность c_i, $i=\overline{1,n-1}$.

Теперь заменим λ_i на $\eta\lambda_i$, где η – некоторое положительное число. Тогда

$$|c_i|\xrightarrow[\mu\to 0]{}\left|\eta^{n-2}\left(x_{n-2}/\eta^{n-2}-x_{n-3}\sum_{j\neq i,n}\lambda_j\Big/\eta^{n-3}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ldots+(-1)^n x_0\prod_{j\neq i,n}\lambda_j\right)\left(\eta^{n-2}\prod_{j\neq i,n}(\lambda_j-\lambda_i)\right)^{-1}\right|.$$

При неограниченном возрастании η в числителе все члены, кроме последнего, стремятся к нулю и $|c_i|\xrightarrow[\mu\to 0,\eta\to\infty]{}\left|\dfrac{x_0\prod\limits_{j\neq i,n}\lambda_j}{\prod\limits_{j\neq i,n}(\lambda_j-\lambda_i)}\right|$, значит, c_i ограничены при сколь угодно больших η, откуда следует, что $|c_i|<C<\infty$ для всех $i=\overline{1,n}$. Далее, задавая достаточно малую величину

$\varepsilon > 0$, можно при $\mu \to 0$ сделать $|x_1(t)| <$ $< C\sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i t} < (n-1)Ce^{\lambda_{\max} T} < \frac{\varepsilon}{2}$, выбрав (за счёт выбора η) максимальное из λ_i, $i = \overline{1, n-1}$, $\lambda_{\max} < \frac{1}{T}\ln\left(\frac{\varepsilon}{2(n-1)C}\right)$.

Рассмотрим второй член в (2):

$$|x_2(t)| \le \mu M \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{K_i}{\lambda_i}\right| \left(1 - e^{\lambda_i t}\right) \le \mu M \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{K_i}{\lambda_i}\right|,$$

где $K_i = \dfrac{-1}{\mu a_n \prod_{j \ne i} (\lambda_i - \lambda_j)}$, $i = \overline{1, n}$. Если $i = n$, то

$$\left|\frac{K_n}{\lambda_n}\right| = \left|\frac{1}{\mu a_n \lambda_n{}^n \prod_{j \ne n} (1 - \lambda_j / \lambda_n)^{n-1}}\right|,$$

и при $\mu \to 0$ стремится к величине $\left|\dfrac{\mu^{n-1} a_n^{n-1}}{d_{n-1}^n}\right|$, стремящейся к нулю вместе с μ. Если же $i \ne n$, то

$$\left|\frac{K_i}{\lambda_i}\right| = \left|\frac{1}{\mu a_n \lambda_i \prod_{j \ne i} (\lambda_i - \lambda_j)}\right|,$$

и при $\mu \to 0$ стремится к

$$\left|\frac{\mu a_n}{\mu a_n \lambda_i d_{n-1} \prod_{j \ne i, n} (\lambda_i - \lambda_j)}\right| < K < \infty.$$

Значит, $x_2(t) \le \mu M(n-1)K + o(\mu)$, и при достаточно малом μ может быть меньше заданной малой величины $\varepsilon/2$, а $|x(t)| < \varepsilon$.

Оценка установившегося решения

Можно найти более точную оценку для решения в установившемся режиме $x_2(t)$. После соответствующих преобразований получаем $|x_2(t)| < \mu M \left|\sum_{i=1}^{n} K_i \lambda_i^{-1} - \sum_{i=1}^{n} K_i \lambda_i^{-1} e^{\lambda_i t}\right|$, где $M = \max|(\xi(t))|$. Член $\sum_{i=1}^{n} K_i \lambda_i^{-1} e^{\lambda_i t}$ неограниченно убывает с ростом t в силу выбора λ_i, значит, $|x_2(t)| \le \mu M \left|\sum_{i=1}^{n} K_i \lambda_i^{-1}\right|$. Малость $|x_2(t)|$ при заданном M определяется величиной параметра μ и значением выражения $\sum_{i=1}^{n} K_i \lambda_i^{-1}$, где $K_i = -1 \Big/ \mu a_n \prod_{j \ne i} (\lambda_i - \lambda_j)$, $i = \overline{1, n}$, как было показано выше, ограничены.

Следует заметить, что оценка для установившегося решения $x_2(t)$ справедлива и при $m \ne 0$. В этом случае при $i = n$

$$\left|\frac{K_n}{\lambda_n}\right| = \left|\frac{b_m \lambda_n{}^m \prod_{s=1}^{m} \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_n}\right)}{\mu a_n \lambda_n{}^n \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)}\right|.$$

Последнее выражение в силу того, что $\mu \to 0$ и $\lambda_n \to -\infty$, стремится к

$$\frac{b_m}{\mu a_n \lambda_n{}^{n-m}} \approx \frac{b_m \mu^{n-m-1} a_n^{n-m-1}}{d_{n-m-1}^{n-m}}.$$

Отсюда следует, что $|K_i / \lambda_i|$ при $\mu \to 0$ стремится к нулю при $m < n-1$ и ограничено при $m = n-1$ (λ_s – корни полинома $B_m(p)$). При $i \ne n$ оценка для $|K_i / \lambda_i|$ получается аналогично случаю с $m = 0$ и отличается только конечным множителем $b_m \prod_{s=1}^{m} (\lambda_s - \lambda_i)$.

Численные эксперименты

Для полинома $A_4(p) = p^4 - p^3 + 2p^2 + 3p - 2$, постоянно действующего ограниченного случайного возмущения $\xi(t) = 25\sin(3t)$, при начальных условиях $x(0) = 0.5$, $\dot{x}(0) = 0.2$, $\ddot{x}(0) = 0.2$ и $\dddot{x}(0) = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-3}$ при надлежащем выборе полинома $D_3(p)$ и параметра μ определяется время T, начиная с которого $|x(t)| < \varepsilon$. Оказалось, что при $\mu = 0.001$ для полинома $D_3(p) = \prod_{i=1}^{3} (p - \lambda_i)$ при $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$ время установления $T = 7.44$, для $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -20$, $\lambda_3 = -30$ $T = 0.73$ и для $\lambda_1 = -100$, $\lambda_2 = -200$, $\lambda_3 = -300$ $T = 0.07$ (рис. 1, соответственно а), б), в)).

В табл. 1 приведены значения времени переходного процесса T и точности установившегося решения при различных λ и μ.

Как видно из таблицы, время переходного процесса T убывает с убыванием λ_1, λ_2, λ_3, а параметр μ существенного влияния на T не оказывает, в то время как точность установив-

Таблица 1

λ	μ	T	$\lvert x_{уст.}\rvert$
-1, -2, -3	0.001	7.440	5.174e-04
-1, -2, -3	0.0005	7.505	2.586e-04
-1, -2, -3	0.0001	7.605	5.169e-05
-10, -20, -30	0.001	0.730	3.927e-06
-10, -20, -30	0.0005	0.730	1.964e-06
-10, -20, -30	0.0001	0.730	3.927e-07
-100, -200, -300	0.001	0.070	4.164e-09
-100, -200, -300	0.0005	0.070	2.082e-09
-100, -200, -300	0.0001	0.070	4.164e-10

Таблица 2

λ	T	$\lvert x_{уст.}\rvert$
-2, -3	7.505	1.64e-04
-10, -15	6.460	1.56e-05
-20, -30	6.335	4.10e-06
-100, -150	6.235	1.66e-07

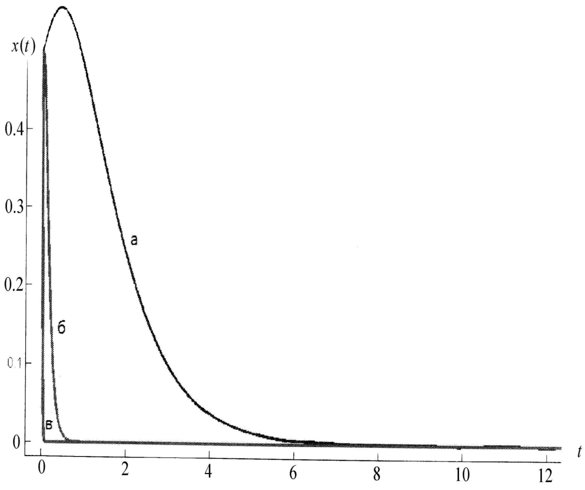

Рис. 1

шегося решения $\left|x_{уст.}\right| = \max\left|x_2(t)\right|$ улучшается с убыванием λ_i и μ. В установившемся режиме $\left|x_2(t)\right|$ не превосходит величины $\mu M\left|\sum_{i=1}^{n} K_i\lambda_i^{-1}\right|$, которая достигается при $\xi(t) = M$. При $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$, $\mu = 0.001$ и $\xi(t) = 25$ $\left|x_{уст.}\right| =$ =0.0042, в то время как при $\xi(t) = 25\sin(3t)$ $\left|x_{уст.}\right|$, как видно из табл. 1, не превосходит 5.174e-04.

Рассмотрим случай $m = 1$, $B_m(p) = p + 1$, $\xi(t) = 25\sin(3t)$, начальные условия те же самые. В табл. 2 приведены значения T и $\left|x_{уст.}\right|$ при $\mu = 0.0001$ и корнях полинома $D_2(p) =$ $= (p - \lambda_1)(p - \lambda_2)$.

При убывании λ_i $\mid x_{уст.} \mid$ становится сколь угодно малым, в то время как T стремится к конечной величине. Последнее происходит оттого, что максимальный корень полинома $B_m(p)D_q(p)$ нельзя сделать меньше максимального из заданных корней $B_m(p)$.

Таким образом, точность установившегося решения и время переходного процесса целиком и полностью зависят от выбора параметров управления λ и μ.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект № 11-01-00379.

Список литературы

1. Неймарк Ю.И. Синтез и функциональные возможности квазиинвариантного управления // АиТ. 2008. № 10. С. 48–56.

2. Гельфер И.С., Неймарк Ю.И. Нелинейность как расширение возможностей квазиинвариантного управления // Нелинейные колебания механических систем. Труды VIII Всероссийской научной конференции. Т. 1. Н. Новгород, 2008. С. 132–136.

3. Неймарк Ю.И., Гельфер И.С. Квазиинвариантное управление с быстрым установлением // Модели, методы и программные средства: Тез. докл. итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса, Н. Новгород, 27–30 ноября 2007 г. Н. Новгород, 2007. С. 27–30.

THE INFLUENCE OF THE CHOICE OF QUASI-INVARIANT CONTROL PARAMETERS ON THE ACCURACY OF A STEADY-STATE SOLUTION AND THE TRANSIENT PROCESS TIME

I.S. Gelfer

A further study is presented of quasi-invariant control properties; in particular, the estimates are given for the steady-state solution accuracy and the time of a transition process. The analytical results obtained are supported by numerical experiments.

Keywords: dynamic system, stability, quasi-invariant control, numerical simulation.

References

1. Nejmark Ju.I. Sintez i funkcional'nye vozmozhnosti kvaziinvariantnogo upravlenija // AiT. 2008. № 10. S. 48–56.

2. Gel'fer I.S., Nejmark Ju.I. Nelinejnost' kak rasshirenie vozmozhnostej kvaziinvariantnogo upravlenija // Nelinejnye kolebanija mehanicheskih sistem. Trudy VIII Vserossijskoj nauchnoj konferencii. T. 1. N. Novgorod, 2008. S. 132–136.

3. Nejmark Ju.I., Gel'fer I.S. Kvaziinvariantnoe upravlenie s bystrym ustanovleniem // Modeli, metody i programmnye sredstva: Tez. dokl. itogovoj nauchnoj konferencii uchebno-nauchnogo innovacionnogo kompleksa, N. Novgorod, 27–30 nojabrja 2007 g. N. Novgorod, 2007. S. 27–30.