УДК 519.6

ДЛИНА ОБУЧЕНИЯ ПОРОГОВОЙ ФУНКЦИИ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Н.Ю. Золотых

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

zolotykh@vmk.unn.ru

Поступила в редакцию 06.11.2013

Предлагается обзор результатов о строении и мощностных свойствах минимального разрешающего множества пороговой функции k-значной логики.

Ключевые слова: пороговая функция, разрешающее множество, длина обучения.

1. **Определения и предварительные сведения**

Пороговой функцией k-значной логики n переменных называется такое отображение f k-ичного n-мерного гиперкуба $E_k^n = \{0,1,\ldots,k-1\}^n$ в множество $\{0,1\}$, для которого найдутся вещественные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, такие, что

$$M_0(f) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_k^n : \ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le a_0 \right\},$$

где

$$M_\nu(f) = \{x \in E_k^n : \ f(x) = \nu\} \quad (\nu = 0,1),$$

при этом неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le a_0 \qquad (1)$$

называется *пороговым*. Легко видеть, что коэффициенты (*веса*) порогового неравенства функции f можно сделать целыми. Множество всех пороговых функций, заданных на E_k^n, обозначим $\mathcal{T}(n,k)$, $n \ge 1$, $k \ge 2$.

Вопросы, возникающие в ходе исследований пороговых функций, как правило, оказываются весьма сложными. Например, до сих пор не известна асимптотика величины $|\mathcal{T}(n,k)|$ $(n \to \infty)$. Из результатов Л. Шлефли [1] о числе открытых областей, получаемых при разбиении n-мерного пространства $m = 2^n$ гиперплоскостями, легко получить верхнюю оценку:

$$|\mathcal{T}(n,2)| < 2\sum_{j=0}^{n} \binom{2^n - 1}{j} < 2^{n^2}.$$

С. Яджима и Т. Ибараки [2] получили первую нетривиальную нижнюю оценку:

$$|\mathcal{T}(n,2)| > 2^{n^2/2}.$$

Ю.А. Зуев [3, 4] доказал, что

$$|\mathcal{T}(n,2)| > 2^{n^2(1-10/\ln n)}, \qquad (2)$$

тем самым установив асимптотику логарифма числа булевых пороговых функций:

$$\log|\mathcal{T}(n,2)| \sim n^2 \quad (n \to \infty) \qquad (3)$$

($\log$ здесь и далее означает логарифм по основанию 2). При этом использовался следующий комбинаторно-вероятностный результат о (± 1)-матрицах, полученный А.М. Одлыжко [5]. Обозначим $P(m,n)$ вероятность того, что в линейной оболочке строк случайной матрицы $A \in \{-1,1\}^{m\times n}$ содержится хотя бы один вектор, отличный от строк матрицы A и им противоположных. Одлыжко [5] доказал, что существует такая положительная последовательность $\alpha(n) < 10/\ln n$, что

$$P(n(1-\alpha(n)),\ n) \to 0 \quad (n \to \infty). \qquad (4)$$

Дж. Кан, Я. Комлош и Е. Семереди [6] усилили этот результат, доказав асимптотику (4) для $\alpha(n) \le c/n$, где c – некоторая положительная константа, т.е.

$$P(n - c,\ n) \to 0 \quad (n \to \infty). \qquad (5)$$

Отсюда следует усиление неравенства (2):

$$|\mathcal{T}(n,2)| \ge 2^{n^2 - n\log n - O(n)}.$$

Более того, в [6] выдвинута гипотеза, что (5) имеет место уже при $c = 1$. Как показано в [6, 7], в случае справедливости этой гипотезы конструкция Зуева для получения нижней оценки величины $|\mathcal{T}(n,2)|$ приводит к асимптотическому равенству

$$|\mathcal{T}(n,2)| \sim 2 \cdot \frac{2^{n^2}}{n!} \quad (n \to \infty).$$

Другой подход к получению асимптотики логарифма (3), также использующий лемму Одлыжко [5], предложил А.А. Ирматов [8].

Обстоятельный обзор результатов по пороговым булевым функциям и пороговым представлениям булевых функций содержится в [9].

Для числа пороговых функций k-значной логики А.А. Ирматов и Ж.Д. Ковиянич [10] получили нижнюю оценку

$$\left|\mathcal{T}(n,k)\right| \geq \frac{1}{2} \cdot \binom{k^n}{n-4-2n/\log_k n} \cdot \left|\mathcal{T}\left(\frac{2n}{\log_k n+4}, k\right)\right|,$$

справедливую для достаточно больших n. Отсюда и из оценки Шлефли получается асимптотика логарифма числа таких функций:

$$\log\left|\mathcal{T}(n,k)\right| \sim n^2 \log k \quad (n \to \infty).$$

Для пороговых функций k-значной логики двух переменных в [11] получена оценка:

$$\left|\mathcal{T}(2,k)\right| = \frac{6k^4}{\pi^2} + O(k^3 \log k) \quad (k \to \infty).$$

Множество $T \subseteq E_k^n$ называется *разрешающим* для функции $f \in \mathcal{T}(n,k)$, если для любой другой функции $g \in \mathcal{T}(n,k)$ найдется $x \in T$, такой, что $f(x) \neq g(x)$. Разрешающее множество T функции f называется *тупиковым* или *неприводимым*, если никакое собственное подмножество множества T не является разрешающим для функции f. Разрешающее множество функции f минимальной мощности называется ее *наименьшим* разрешающим множеством. Точка $x \in E_k^n$ называется *существенной* для функции $f \in \mathcal{T}(n,k)$, если найдется функция $g \in \mathcal{T}(n,k)$, отличная от f только в точке x. Очевидно, что любая существенная точка принадлежит всякому разрешающему множеству заданной пороговой функции.

Мощность минимального разрешающего множества пороговой функции f обозначим $\sigma(f)$. *Длиной обучения* называется величина

$$\sigma(n,k) = \max_{f \in \mathcal{T}(n,k)} \left|y(f)\right|.$$

Средней мощностью минимального разрешающего множества называется

$$\overline{\sigma}(n,k) \leq \frac{1}{\left|\mathcal{T}(n,k)\right|} \sum_{f \in \mathcal{T}(n,k)} \left|\sigma(f)\right|.$$

В работе приводится обзор основных результатов о строении разрешающего множества и об оценках длины обучения пороговых функций. В разделе 2 рассматриваются пороговые функции, зависящие от n переменных. В разделе 3 исследуется специальный случай $n = 2$.

Если P – полиэдр (выпуклое многогранное множество) в $\mathbb{R}^n$, то будем обозначать через $\operatorname{Vert} P$ множество его вершин. Если $X \subseteq \mathbb{R}^n$, то $\operatorname{Conv} X$ – выпуклая оболочка множества X, а $\operatorname{Cone} X$ – коническая оболочка этого множества (множество всех неотрицательных линейных комбинаций).

2. Длина обучения и строение минимального разрешающего множества

Следующее построение хорошо известно в пороговой логике (см., например, [4, 12]). С каждой функцией $f \in \mathcal{T}(n,k)$ в пространстве весов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ свяжем так называемый конус $C(f)$ *разделяющих функционалов*, заданный как множество решений следующей системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq a_0 & \text{для всех} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M_0(f); \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j > a_0 & \text{для всех} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M_1(f). \end{cases} \tag{6}$$

Пусть $T_\nu \subseteq M_\nu(f)$ $(\nu = 0,1)$. Рассмотрим подсистему системы (6):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq a_0 & \text{для всех} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_0; \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j > a_0 & \text{для всех} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1. \end{cases} \tag{7}$$

Утверждение. Для того чтобы множество $T = T_0 \cup T_1$, $T_\nu \subseteq M_\nu(f)$ $(\nu = 0,1)$, было разрешающим для $f \in \mathcal{T}(n,k)$, необходимо и достаточно, чтобы система неравенств (6) была эквивалентна системе неравенств (7).

Можно доказать, что в системе (7) найдется минимальная подсистема, эквивалентная всей системе:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq a_0 & \text{для всех} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_0(f); \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j > a_0 & \text{для всех} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1(f). \end{cases} \tag{8}$$

Следствие 1. Для любой $f \in \mathcal{T}(n,k)$ множество $T = T_0 \cup T_1$, где $T_\nu \subseteq M_\nu(n,k)$ $(\nu = 0,1)$, является тупиковым разрешающим тогда и только тогда, когда $T_\nu = T_\nu(f)$ $(\nu = 0,1)$.

Следствие 2. Для любой $f \in \mathcal{T}(n,k)$ существует единственное тупиковое разрешающее множество $T(f) = T_0(f) \cup T_1(f)$. Оно совпадает с множеством всех существенных точек функции f.

Таким образом, $\sigma(n,k)$ можно интерпретировать как максимальное число соседних пороговых функций, а $\overline{\sigma}(n,k)$ – их среднее число.

Теорема 1 [12]. Для любой функции $f \in \mathcal{T}(n,k)$

$$T_\nu(f) \subseteq \operatorname{Vert} M_\nu(f) \quad (\nu = 0,1).$$

Оценивая $|\operatorname{Vert}\operatorname{Conv} M_\nu(f)|$ сверху, В.Н. Шевченко [12] доказал, что

$$\sigma(n,k) \le 2^n \log^n(k+1).$$

Более точную (при фиксированном n) оценку получил T. Hegedüs [13] на основе результатов [14] о числе вершин в неявно заданных целочисленных полиэдрах:

$$\sigma(n,k) = O(\log^{n-1} k) \quad (k \to \infty). \qquad (9)$$

Полиэдр называется *целочисленным*, если все его вершины целые. Рассмотрим полиэдр $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$, где $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, и «неявно заданный» целочисленный полиэдр $P_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$. Проблемой получения оценок величины $|\operatorname{Vert} P_{\mathbb{Z}}|$ занимались В.Н. Шевченко, С.И. Веселов, А.Ю. Чирков, A.S. Hayes, D.C. Larman, I. Bárány, R. Howe, L. Lovász, W. Cook, M. Hartmann, R. Kannan, C. McDiarmid и др., см. обзор работ в [15].

Полностью структуру $T(f)$ описывают теоремы 2 и 4 ниже.

Теорема 2 [16, 17]. Для любой функции $f \in \mathcal{T}(n,k)$

$$T_0(f) = T_1(g) = \operatorname*{Vert}_{a,a_0} \operatorname{Conv}\left\{x \in E_k^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j = a_0\right\},$$

где $g = 1 - f$ и объединение берется по всем $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, a_0, таким, что неравенство (1) является пороговым для функции f.

На основе теоремы 2 в [16, 17] получена первая нетривиальная оценка для $\sigma(n,k)$ снизу.

Теорема 3 [16, 17]. При любом фиксированном $n \ge 2$

$$\sigma(n,k) = \Omega(\log^{n-2} k) \quad (k \to \infty). \qquad (10)$$

Прогресс на пути построения более точных верхних и нижних оценок для $\sigma(n,k)$ долгое время происходил за счет использования новых результатов о числе вершин в неявно заданных целочисленных полиэдрах. Все полученные на этом пути оценки, тем не менее, имели при фиксированном n тот же вид, что и (9), (11) – уточнялась лишь мультипликативная константа. В частности, в [18] получена двусторонняя оценка:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\log k - n - 3 - (n-1)\log(n-2)\right)^{n-2}}{4(n-1)3^{n-1}(n-2)^{n-2}((n-2)!)^2} \le$$
$$\le \sigma(n,k) \le 2n\log(2n)(1 + \log(k+1))^{n-1}.$$

Долгое время недоказанной оставалась гипотеза $\sigma(n,k) = \Theta(\log^{n-2} k)$ (при любом фиксированном $n \ge 2$). На пути к ее доказательству в [19] предложена новая характеризация $T(f)$. Обозначим $K(f) = \operatorname{Cone}(M_1(f) - M_0(f))$, $F_0(f) = \operatorname{Conv} M_0(f) - K(f)$, $F_1(f) = \operatorname{Conv} M_1(f) + K(f)$.

Теорема 4 [19]. Для любой функции $f \in \mathcal{T}(n,k)$

$$T_\nu(f) = \operatorname{Vert} F_\nu(f) \quad (\nu = 0,1).$$

Следствие. Пусть $f \in \mathcal{T}(n,k)$, $x, y \in T_\nu(f)$ $(\nu = 0,1)$, $x \ne y$. Тогда

$$2x - y \notin F_0(f) \cup F_1(f). \qquad (11)$$

К сожалению, удобного описания $F_0(f) \cup F_1(f)$ не известно. Рассмотрим, однако, множество $\mathcal{T}'(n,k)$ таких пороговых функций из $\mathcal{T}(n,k)$, для каждой из которых найдется пороговое неравенство (1) с целыми коэффициентами, такими, что $0 < a_0 < a_j(k-1)$ $(j = 1,2,\dots,n)$. Для любой $f \in \mathcal{T}'(n,k)$ имеем $(F_0(f) \cup F_1(f)) \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}_+^n$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел. Тогда условие (11) превращается в *свойство разделенности*, введенное В.Н. Шевченко в [20] в связи с исследованием задачи о числе вершин неявно заданных целочисленных полиэдров. Говорят, что множество $G \subset \mathbb{Z}_+^n$ обладает *свойством разделенности*, если из условий $x, y \in G$, $x \ne y$ следует $2x - y \notin \mathbb{Z}_+^n$.

Теорема 5 [20]. Пусть множество $N \subset \mathbb{Z}_+^n$ обладает свойством разделенности и для каждого $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in N$ выполнено $\alpha_j \le x_j \le \beta_j$ $(j = 1,2,\dots,n-1)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, β_1, $\beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ – неотрицательные числа, тогда

$$|N| \le \prod_{j=1}^{n-1} 1 + \log\frac{\beta_j + 2}{\alpha_j + 1}.$$

Теорема 5 позволяет доказать следующий результат о мощности $|T(f)|$, если $f \in \mathcal{T}'(n,k)$.

Теорема 6 [19]. Для любой $f \in \mathcal{T}'(n,k)$ при $n \ge 2$

$$|T_\nu(f)| \le n(1 + \log n)(1 + \log(k+1))^{n-2} \quad (\nu = 0,1).$$

Для уточнения верхней оценки $|T(f)|$ в общем случае полезным оказалось понятие неприводимой точки. Пусть P – полиэдр в $\mathbb{R}^n$. Точка $x \in P \cap \mathbb{Z}^n$ называется *неприводимой* в P (а точнее: в $P \cap \mathbb{Z}^n$), если x нельзя представить в

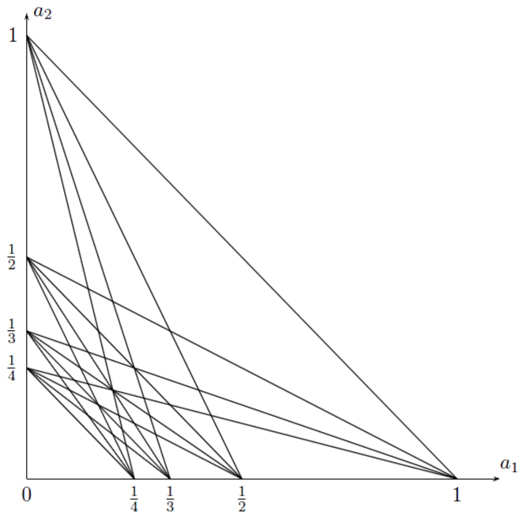

Рис. 1. Разбиение первой четверти плоскости весов a_1, a_2 прямыми $a_1x_1 + a_2x_2 = 1$, где $(x_1, x_2) \in \in \{1, 2, \ldots, 4\}^2$

виде $x = (y+z)/2$ ни для каких двух различных y и z из $P \cap \mathbb{Z}^n$. Легко видеть, что любая вершина в $\operatorname{Conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$ является неприводимой в P. Обратное в общем случае неверно. Тем не менее, эти понятия близки, как показывают оценки числа вершин и числа неприводимых точек.

Теорема 7 [21]. Пусть $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$, где $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ и $P \cap \mathbb{Z}^n \subseteq E_k^n$. Если N – множество неприводимых точек в P, тогда при любом фиксированном n

$$|N| = O\left(m^{n/2} \log^{n-1} k\right) \quad (k \to \infty).$$

В [21] эта теорема используется для получения лучшей верхней оценки для $\sigma(n,k)$.

Теорема 8 [21]. При любом фиксированном $n \ge 2$

$$\sigma(n,k) = O\left(\log^{n-2} k\right) \quad (k \to \infty).$$

Из теорем 3, 8 получаем, что для любого фиксированного $n \ge 2$

$$\sigma(n,k) = \Theta\left(\log^{n-2} k\right) \quad (k \to \infty).$$

M. Antony, G. Brightwell, D. Cohen, J. Shawe-Taylor [22] получили верхнюю оценку средней мощности минимального разрешающего множества булевых пороговых функций:

$$\overline{\sigma}(n,2) \le n^2.$$

Этот результат можно обобщить (см. [23]) на случай пороговых функций k-значной логики:

$$\overline{\sigma}(n,k) \le n^2 \log k.$$

3. Длина обучения пороговой функции двух переменных

Известно, что возможные значения мощности наименьшего разрешающего множества пороговой функции, зависящей от двух переменных, суть 3 и 4. Таким образом, справедлива

Теорема 9 [16, 24]. Для любого $k \ge 2$

$$\sigma(2,k) = 4.$$

Более того, среднее значение мощности наименьшего разрешающего множества пороговой функции двух переменных асимптотически равно $7/2$.

Теорема 10 [25].

$$\overline{\sigma}(2,k) = \frac{7}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (k \to \infty).$$

Пересекая конусы разделяющих функционалов для всех пороговых функций из $\mathcal{T}(2,k)$ в пространстве весов a_0, a_1, a_2 с плоскостью $a_0 = 1$, получаем интересное геометрическое следствие.

Теорема 11. Среди ограниченных областей, получаемых при разбиении плоскости весов a_1, a_2 всеми прямыми $a_1x_1 + a_2x_2 = 1$, где $(x_1, x_2) \in \{0, 1, \ldots, k-1\}^2$, встречаются только треугольники и четырехугольники, причем их количества асимптотически равны.

Аналогичный результат получается, если разбивать плоскость весов a_1, a_2 прямыми $a_1x_1 + a_2x_2 = 1$, где $(x_1, x_2) \in \{1, 2, \ldots, k\}^2$ и т.п. В частности, на рис. 1 представлено разбиение указанными прямыми первой четверти плоскости.

Список литературы

1. Schläfli L. Gesammelte mathematisce Abhanglugen. Band 1. Basel: Verlag Birkhäuzer, 1950.
2. Yajima S., Ibaraki T. A lower bound of the number of threshold functions // IEEE Trans. on Electronic Comput. 1965. V. 14. № 6. P. 926–929.
3. Зуев Ю.А. Асимптотика логарифма числа пороговых функций алгебры логики // Доклады АН СССР. 1989. Т. 306. № 3. С. 528–530.
4. Зуев Ю.А. Комбинаторно-вероятностные и геометрические методы в пороговой логике // Дискретная математика. 1991. Т. 3. № 2. С. 47–57.
5. Odlyzko A.M. On subspaces spanned by random selection of ± 1 vectors // J. Combin. Theory, A. 1988. V. 47. № 1. C. 124–133.
6. Kahn J., Komlós J., Szemerédi E. On the probability that a random ± 1-matrix is singular // J. American Math. Society. 1995. V. 8. № 1. P. 223–240.

7. Зуев Ю.А. По океану дискретной математики: От перечислительной комбинаторики до современной криптографии. В 2 тт. М.: Либрокомб, 2012.

8. Ирматов А.А. О числе пороговых функций // Дискретная математика. 1993. Т. 5. № 3. С. 40–43.

9. Зуев Ю.А. Пороговые функции и пороговые представления булевых функций // Матем. вопросы кибернетики. Вып. 5. М.: Физматлит, 1994. С. 5–61.

10. Ирматов А.А., Ковиянич Ж.Д. Об асимптотике логарифма числа пороговых функций k-значной логики // Дискретная математика. 1998. Т. 10. № 3. С. 35–56.

11. Koplowitz J., Lindenbaum M., Bruckstein A.M. The number of digital straight lines on an $N \times N$ grid // IEEE Trans. Inform. Theory. 1990. V. 36. P. 192–197.

12. Шевченко В.Н. О некоторых функциях многозначной логики, связанных с целочисленным программированием // Методы дискретного анализа в теории графов и схем. Вып. 42. Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1985. С. 99–108.

13. Hegedüs T. Geometrical concept learning and convex polytopes // Proc. 7th Ann. ACM Conf. on Computational Learning Theory. New York: ACM Press, 1994. P. 228–236.

14. Cook W., Hartmann M., Kannan R., McDiarmid C. On integer points in polyhedra // Combinatorica. 1992. V. 12. № 1. P. 27–37.

15. Веселов С.И., Чирков А.Ю. Оценки числа вершин целых полиэдров // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. 2007. Т. 14. № 2. С. 14–31.

16. Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. О сложности расшифровки пороговых функций k-значной логики // Доклады Академии наук. 1998. Т. 362. № 5. С. 606–608.

17. Золотых Н.Ю., Шевченко В.Н. О нижней оценке сложности расшифровки пороговых функций k-значной логики // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1999. Т. 39. № 2. С. 346–352.

18. Золотых Н.Ю. Оценки мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Матем. вопросы кибернетики. Вып. 17. М.: Физматлит, 2008. С. 159–168.

19. Золотых Н.Ю., Чирков А.Ю. О верхней оценке мощности минимального разрешающего множества пороговой функции // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19. № 5. С. 35–46.

20. Шевченко В.Н. О числе крайних точек в целочисленном программировании // Кибернетика. 1981. № 2. С. 133–134.

21. Chirkov A.Yu., Zolotykh N.Yu. On the number of irreducible points in polyhedral // arXiv:1306.4289. 2013.

22. Antony M., Brightwell G., Shawe-Taylor J. On exact specification by labelled examples // Discrete Applied Mathematics. 1995. V. 61. № 1. C. 1–25.

23. Вировлянская М.А., Золотых Н.Ю. Верхняя оценка средней мощности минимального разрешающего множества пороговой функции многозначной логики // Вестник Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Матем. моделирование и оптимальное управление. 2003. № 1. С. 238–246.

24. Золотых Н.Ю. О сложности расшифровки пороговых функций, зависящих от двух переменных // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». Часть I. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-матем. ф-те МГУ, 2001. С. 74–79.

25. Alekseyev M.A., Basova M.G., Zolotykh N.Yu. The average cardinality of the minimal teaching set of a threshold function on a two-dimensional rectangular grid // arXiv:1307.1058. 2013.

TEACHING DIMENSION OF THRESHOLD FUNCTION OF MANY-VALUED LOGIC

N.Yu. Zolotykh

An overview of the results on structural and cardinality properties of a minimal teaching set of a threshold function of k-valued logic is presented.

Keywords: threshold function, teaching set, teaching dimension.

References

1. Schläfli L. Gesammelte mathematisce Abhanglugen. Band 1. Basel: Verlag Birkhäuzer, 1950.

2. Yajima S., Ibaraki T. A lower bound of the number of threshold functions // IEEE Trans. on Electronic Comput. 1965. V. 14. № 6. P. 926–929.

3. Zuev Ju.A. Asimptotika logarifma chisla porogovyh funkcij algebry logiki // Doklady AN SSSR. 1989. T. 306. № 3. S. 528–530.

4. Zuev Ju.A. Kombinatorno-verojatnostnye i geometricheskie metody v porogovoj logike // Dis-kretnaja matematika. 1991. T. 3. № 2. S. 47–57.

5. Odlyzko A.M. On subspaces spanned by random selection of ± 1 vectors // J. Combin. Theory, A. 1988. V. 47. № 1. C. 124–133.

6. Kahn J., Komlós J., Szemerédi E. On the probability that a random ± 1-matrix is singular // J. American Math. Society. 1995. V. 8. № 1. P. 223–240.

7. Zuev Ju.A. Po okeanu diskretnoj matematiki: Ot perechislitel'noj kombinatoriki do sovremennoj kriptografii. V 2 tt. M.: Librokomb, 2012.

8. Irmatov A.A. O chisle porogovyh funkcij // Diskretnaja matematika. 1993. T. 5. № 3. S. 40–43.

9. Zuev Ju.A. Porogovye funkcii i porogovye predstavlenija bulevyh funkcij // Matem. voprosy kibernetiki. Vyp. 5. M.: Fizmatlit, 1994. S. 5–61.

10. Irmatov A.A., Kovijanich Zh.D. Ob asimptotike logarifma chisla porogovyh funkcij k-znachnoj logiki // Diskretnaja mate-matika. 1998. T. 10. № 3. S. 35–56.

11. Koplowitz J., Lindenbaum M., Bruckstein A.M. The number of digital straight lines on an $N \times N$ grid // IEEE Trans. Inform. Theory. 1990. V. 36. P. 192–197.

12. Shevchenko V.N. O nekotoryh funkcijah mnogoznachnoj logiki, svjazannyh s celochislennym programmirovaniem // Metody diskretnogo analiza v teorii grafov i shem. Vyp. 42. No-vosibirsk: In-t matem. SO AN SSSR, 1985. S. 99–108.

13. Hegedüs T. Geometrical concept learning and convex polytopes // Proc. 7th Ann. ACM Conf. on Computational Learning Theory. New York: ACM Press, 1994. P. 228–236.

14. Cook W., Hartmann M., Kannan R., McDiarmid C. On integer points in polyhedra // Combinatorica. 1992. V. 12. № 1. P. 27–37.

15. Veselov S.I., Chirkov A.Ju. Ocenki chisla vershin celyh polijedrov // Diskretnyj analiz i issledovanie operacij. Serija 2. 2007. T. 14. № 2. C. 14–31.

16. Shevchenko V.N., Zolotyh N.Ju. O slozhnosti rasshifrovki porogovyh funkcij k-znachnoj logiki // Doklady Akademii nauk. 1998. T. 362. № 5. C. 606–608.

17. Zolotyh N.Ju., Shevchenko V.N. O nizhnej ocenke slozhnosti rasshifrovki porogovyh funkcij k-znachnoj logiki // Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiziki. 1999. T. 39. № 2. S. 346–352.

18. Zolotyh N.Ju. Ocenki moshhnosti minimal'-nogo razreshajushhego mnozhestva porogovoj funkcii mnogoznachnoj logiki // Matem. voprosy kibernetiki. Vyp. 17. M.: Fizmatlit, 2008. S. 159–168.

19. Zolotyh N.Ju., Chirkov A.Ju. O verhnej ocenke moshhnosti minimal'nogo razreshajushhego mnozhestva porogovoj funkcii // Diskretnyj analiz i issledovanie operacij. 2012. T. 19. № 5. S. 35–46.

20. Shevchenko V.N. O chisle krajnih tochek v celochislennom programmirovanii // Kibernetika. 1981. № 2. S. 133–134.

21. Chirkov A.Yu., Zolotykh N.Yu. On the number of irreducible points in polyhedral // arXiv:1306.4289. 2013.

22. Antony M., Brightwell G., Shawe-Taylor J. On exact specification by labelled examples // Discrete Applied Mathematics. 1995. V. 61. № 1. C. 1–25.

23. Virovljanskaja M.A., Zolotyh N.Ju. Verhnjaja ocenka srednej moshhnosti minimal'nogo razreshajushhego mnozhestva porogovoj funkcii mnogoznachnoj logiki // Vestnik Nizhegorod. un-ta im. N.I. Lobachevskogo. Matem. modelirovanie i optimal'noe upravlenie. 2003. № 1. S. 238–246.

24. Zolotyh N.Ju. O slozhnosti rasshifrovki porogovyh funkcij, zavisjashhih ot dvuh peremennyh // Materialy XI Mezhgosudarstvennoj shkoly-seminara «Sintez i slozhnost' upravljajushhih sistem». Chast' I. M.: Izd-vo Centra prikladnyh issledovanij pri mehanikomatem. f-te MGU, 2001. S. 74–79.

25. Alekseyev M.A., Basova M.G., Zolotykh N.Yu. The average cardinality of the minimal teaching set of a threshold function on a two-dimensional rectangular grid // arXiv:1307.1058. 2013.