УДК 519.857

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ

М.Х. Прилуцкий, Е.А. Кумагина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

kumagina@inbox.ru

Поступила в редакцию 27.11.2013

Рассматривается проблема оптимального распределения ограниченных ресурсов в сетевых канонических и иерархических структурах. Строится общая математическая модель, ставится оптимизационная задача распределения ресурсов и предлагается алгоритм ее решения, основанный на использовании рекуррентных соотношений динамического программирования.

Ключевые слова: распределение ресурсов, сетевая структура, принцип оптимальности динамического программирования.

Задачи многоресурсного сетевого планирования и управления

При планировании и управлении системами различного типа (производственного, технического, организационного и др.) возникают задачи распределения разнородных ограниченных ресурсов [1–6]. Особенностью рассматриваемых систем является то, что они представляют собой комплекс взаимосвязанных работ (деятельностей). Структура этой взаимосвязи описывается с помощью канонических сетевых моделей – ориентированных взвешенных графов без петель и контуров, элементам которых поставлены в соответствие некоторые характеристики. Активизация деятельностей возможна лишь при наличии необходимых ресурсов. Для каждой деятельности заданы временные и ресурсные характеристики.

Ресурсы, циркулирующие в системе, будем классифицировать по типам (внешние и внутренние ресурсы) и срокам годности (складируемые, нескладируемые).

Внешние ресурсы поступают в систему извне (материалы, сырье, полуфабрикаты) – это, как правило, складируемые ресурсы. Внутренние ресурсы либо принадлежат системе (оборудование, транспортные средства, рабочая сила – это нескладируемые ресурсы), либо возникают в результате выполнения деятельностей. Мы будем предполагать, что внутренних нескладируемых ресурсов у системы достаточно для эффективного функционирования, и будем рассматривать только внутренние ресурсы, которые позволяют учитывать технологические зависимости в порядке выполнения деятельностей. Таким образом, мы будем рассматривать только такие внутренние ресурсы, которые, будучи произведенными к некоторому моменту времени, могут быть использованы в любой другой момент времени, т.е. это ресурсы складируемого типа. При этом предполагается, что произведенный внутренний ресурс является возобновляемым, т.е. после потребления этот ресурс сохраняется и может быть повторно использован в любом последующем такте. Введение внутренних ресурсов позволяет моделировать как сетевые канонические, так и многоуровневые иерархические структуры.

На процесс выполнения деятельностей накладываются ограничения трех типов – технологические, организационные и ресурсные. Технологические условия определяют взаимозависимость, длительность и интенсивность выполнения деятельностей. Организационные условия определяют моменты начала и окончания выполнения деятельностей. Ресурсные ограничения определяют возможности расходования ресурсов.

Задачи многоресурсного планирования и управления заключаются в определении стратегии распределения ресурсов между деятельностями и интенсивностей потребления ими необходимых ресурсов таким образом, чтобы обеспечить выполнение всей заданной совокупности деятельностей в заданные сроки. Определение интенсивностей потребления деятельностями необходимых ресурсов определяет порядок их выполнения, то есть моменты начала и окончания выполнения деятельностей.

Исходные параметры математической модели

I – n-элементное множество деятельностей, подлежащих выполнению, причем будем предполагать, что некоторая фиктивная деятельность λ всегда принадлежит множеству I и любым его подмножествам. Активизация деятельности λ возможна лишь в том случае, когда нельзя активизировать любую другую деятельность из-за отсутствия необходимых ресурсов.

$J = J^{внеш} \cup J^{внутр}$ – m-элементное множество ресурсов (внешних и внутренних), циркулирующих в процессе функционирования системы,

$|J^{внутр}| = m_1$, $|J^{внеш}| = m_2$.

T – t_0-элементное множество неотрицательных рациональных чисел (аналог времени).

$J^{-}(i) = (j^{-}_{i1}, j^{-}_{i2}, \ldots, j^{-}_{im})$ – вектор ресурсов, необходимых для активизации деятельности i, $i \in I$, $j^{-}_{ik} \in J$, $k = \overline{1,m}$. Если ресурс не используется, то соответствующая компонента вектора ресурсов равна нулю.

$J^{+}(i) = (j^{+}_{i1}, j^{+}_{i2}, \ldots, j^{+}_{im})$ – вектор ресурсов, которые будут произведены в результате активизации деятельности i, $i \in I$, $j^{+}_{ik} \in J$, $k = \overline{1,m}$.

$F(t) = (f_{t1}, f_{t2}, \ldots, f_{tm_1})$ – вектор внутренних ресурсов, соответствующий моменту t, где f_{tj} – количество внутреннего ресурса j, которое будет доступно в системе начиная с момента времени t, $j \in J^{внутр}$, $t \in T$.

$G(t) = (g_{t1}, g_{t2}, \ldots, g_{tm_2})$ – вектор внешних ресурсов, где g_{tj} – количество внешнего ресурса j, которое поступит в систему в момент времени t, $j \in J^{внеш}$, $t \in T$.

$H(t) = G(t)\&\, F(t) = (h_{t1}, h_{t2}, \ldots, h_{tm})$ – вектор наличия всех ресурсов системы в момент t, $j \in J$, $t \in T$ (& – операция конкатенации).

$R(i) = (R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{im})$ – вектор максимальных интенсивностей потребления ресурсов деятельностью i, $i \in I$.

D – директивный срок, $D \in T$, – момент времени, к которому нужно стремиться завершить выполнение всех деятельностей.

Варьируемые параметры математической модели

$Z = \| z^{t}_{ij} \|_{n \times m \times t_0}$ – матрица интенсивностей потребления ресурсов, где z^{t}_{ij} – интенсивность потребления деятельностью i ресурса j в момент времени t, $i \in I$, $j \in J$, $t \in T$.

Ограничения математической модели

$$0 \le z^{t}_{ij} \le R_{ij},\ i \in I,\ j \in J,\ t \in T. \qquad (1)$$

$$\sum_{t \in T} z^{t}_{ij} = j^{-}_{ij},\ i \in I,\ j^{-}_{ij} \in J,\ j = \overline{1,m}. \qquad (2)$$

$$\sum_{i \in I} z^{t'}_{ij} \le \sum_{t=1}^{t'} h_{tj} - \sum_{t=1}^{t'-1} \sum_{i \in I} z^{t}_{ij} \quad t' \in T,\ j \in J. \qquad (3)$$

$$z^{t}_{ij} \ge 0,\ i \in I,\ j \in J,\ t \in T. \qquad (4)$$

Здесь условия (1) ограничивают интенсивности потребления ресурсов максимально возможными. Условия (2) означают, что любая деятельность считается выполненной, если она потребила все необходимые для своей активации ресурсы. Условия (3) определяют ограничения на возможности потребления ресурсов. Условия (4) являются естественными условиями, налагаемыми на переменные математической модели.

Постановка задачи

Требуется найти значения интенсивностей потребления ресурсов, удовлетворяющие системе ограничений (1)–(4), которые минимизируют нарушение директивного срока:

$$\Phi(Z) = \max_{\substack{z^{t}_{ij} > 0 \\ i \in I, j \in J, t \in T}} (\max(0,\ t - D)) \to \min .$$

Несмотря на то, что ограничения (1)–(4) являются линейными, критерий задачи является существенно нелинейным, что не позволяет применить для решения поставленной задачи известные методы математического программирования.

Функционирование системы

Пусть $S \times T$ – множество состояний системы, где $S = \{\boldsymbol{s} | s_j \ge 0,\ j \in J\}$ и состояние $<\boldsymbol{s}, t>$ определяет наличие различных ресурсов (внутренних и внешних), которыми система располагает в момент времени t, $\boldsymbol{s} \in S$, $t \in T$.

Множество управлений системой будем отождествлять с множеством деятельностей I, а через $I(\boldsymbol{s}, t) = \{i | j^{-}_{ki} \le h_{ki},\ k = \overline{1,m},\ i \in I\}$ обозначим множество допустимых управлений в состоянии $<\boldsymbol{s}, t>$, $I(\boldsymbol{s}, t) \in I$, $\boldsymbol{s} \in S$, $t \in T$. $I(\boldsymbol{s}, t)$ – это множество неактивизированных деятельностей, полностью обеспеченных ресурсами.

Через $c(\boldsymbol{s}, i, \boldsymbol{s}', t, t')$ обозначим «доход», который система приобретет, если под управлением i из состояния $<\boldsymbol{s}, t>$ она перейдет в новое состояние $<\boldsymbol{s}', t'>$, где $t' = t$, если $i \ne \lambda$.

Значения функции дохода $c(\boldsymbol{s}, i, \boldsymbol{s}', t, t')$ зависят от трех факторов:

- ресурсов, которые система использует для активизации деятельности i;
- ресурсов, которые система произведет в результате активизации деятельности i;

• исходных параметров, характеризующих деятельность i, $i \in I$, $\boldsymbol{s} \in S$, $\boldsymbol{s}' \in S$, $t \in T$, $t' \in T$.

Для оценки «дохода» предлагается использовать временные характеристики сетевой модели. Под «доходом» будем понимать суммарный временной резерв деятельностей. Длительность выполнения деятельности определяется с учетом максимально возможной интенсивности потребления этой деятельностью ресурсов, необходимых для ее активации. Используя рекуррентные соотношения, нужно рассчитать резервы времени через ранние и поздние моменты начала и окончания выполнения деятельностей, например так, как это предложено в [6].

Система функционирует следующим образом: в состоянии $<\boldsymbol{s},t>$ под воздействием управления i, $i \in I(\boldsymbol{s},t) \cup \{\lambda\}$, система переходит в новое состояние $<\boldsymbol{s}',t'>$, где $s'_j = s_j + j^{+}_{ij} - j^{-}_{ij}$, $t' = t$, если $i \neq \lambda$ и $s'_j = s_j + h_{tj}$, $t' = t+1$, если $i = \lambda$, $j \in J$. При этом переходе система активизирует деятельность i (что отражается в удалении этой деятельности из множества $I(\boldsymbol{s},t)$) и приобретает доход, определяемый функцией $c(\boldsymbol{s}, i, \boldsymbol{s}', t, t')$. Функционирование системы осуществляется до тех пор, пока все деятельности не будут активизированы.

Требуется найти такую стратегию управления системой, при которой суммарный доход, приобретенный системой за все время функционирования, будет минимальным.

Постановка задачи поиска оптимальной стратегии управления

Стратегию управления системой мы будем отождествлять с функцией $f(\boldsymbol{s},t)$, определенной на множестве $S \times T$ со значениями из I. Обозначим через $\mu(\boldsymbol{s},t, I', f(\boldsymbol{s},t))$ суммарный доход, который система приобретет, если она находится в состоянии $<\boldsymbol{s},t>$, остались не выполнены деятельности из множества I' и к системе применены управления, определяемые заданной стратегией $f(\boldsymbol{s},t)$.

Тогда исходная задача будет заключаться в определении такой стратегии $f_0(\boldsymbol{s},t)$, для которой выполняется $\mu(\boldsymbol{s},t, I', f_0(\boldsymbol{s},t)) = \min\ \mu(\boldsymbol{s},t, I', f(\boldsymbol{s},t))$, где min берется по всем возможным стратегиям $f(\boldsymbol{s},t)$. Стратегию $f_0(\boldsymbol{s},t)$ в дальнейшем будем называть оптимальной стратегией.

Алгоритм решения задачи

Для рассматриваемой системы выполняется свойство Маркова – поведение системы после момента времени t зависит только от состояния системы в этот момент времени и не зависит от поведения системы до момента t. Выполнение этого свойства, с учетом аддитивности дохода, приобретаемого системой в процессе функционирования, позволяет применить к рассматриваемой системе принцип оптимальности динамического программирования (принцип Р. Беллмана).

Обозначим через $\nu(\boldsymbol{s},t, I')$ величину суммарного дохода, который система приобретет, если она находится в состоянии $<\boldsymbol{s},t>$, остались не активизированы деятельности из множества I' и к системе применены управления, задаваемые оптимальной стратегией. Тогда $\nu(\boldsymbol{s},t, I') = \min\ (c(\boldsymbol{s}, i, \boldsymbol{s}', t, t') + \nu(\boldsymbol{s}', t', I' \setminus \{i\})))$, где min берется по всем i, $i \in I(\boldsymbol{s},t) \cap I'$. Если задать граничные условия $\nu(s,t, I') = 0$ при $I' = \{\lambda\}$, то полученные рекуррентные соотношения могут быть использованы для определения оптимальной стратегии.

Найденная оптимальная стратегия $f_0(\boldsymbol{s},t)$ для каждого момента времени $t \in T$ определяет конкретную деятельность, полностью обеспеченную ресурсами. Таким образом, на множестве деятельностей определяется порядок их выполнения. Деятельности последовательно включаются в строящееся расписание и потребляют необходимые им ресурсы с максимально возможной интенсивностью.

Заключение

В работе представлена задача распределения ресурсов в сетевых канонических структурах. Описаны исходные варьируемые параметры и ограничения математической модели. В рамках этой математической модели поставлена задача минимизации нарушения директивного срока. Для ее решения предложен алгоритм, основанный на принципе оптимальности динамического программирования.

Построенная математическая модель и предложенная схема нахождения оптимальной стратегии дают возможность описывать широкий класс задач распределения ресурсов. К таким задачам относятся задачи объемно-календарного планирования для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства [7–9], задачи планирования процесса изготовления изделий микроэлектроники [10], задачи планирования для предприятий с непрерывным циклом изготовления продукции [11–12] и др.

Список литературы

1. Прилуцкий М.Х. Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. 1996. № 2. С. 139–146.

2. Прилуцкий М.Х., Батищев Д.И., Гудман Э.Д., Норенков И.П. Метод декомпозиций для решения комбинаторных задач упорядочения и распределения ресурсов // Информационные технологии. Москва. 1997. № 1. С. 29–33.

3. Прилуцкий М.Х., Батищев Д.И., Гудман Э.Д., Норенков И.П. Метод комбинирования эвристик для решения комбинаторных задач упорядочения и распределения ресурсов // Информационные технологии. Москва. 1997. № 2. С. 29–32.

4. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. 2006. № 6. С. 194–205.

5. Прилуцкий М.Х. Распределение однородного ресурса в иерархических системах древовидной структуры. Труды международной конференции «Идентификация систем и задачи управления SICPRO 2000». Москва, 26–28 сентября 2000 г. Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2000. С. 2038–2049.

6. Прилуцкий М.Х., Кумагина Е.А. Задачи распределения разнородных ресурсов в сетевых канонических структурах // Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы. 2000. № 4. С. 46–52.

7. Прилуцкий М.Х., Кумагина Е.А. Задача упорядочения работ как задача о назначениях // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. Вып. 21. С. 18–24.

8. Прилуцкий М.Х. Многокритериальные многоиндексные задачи объёмно-календарного планирования // Известия АН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 78–82.

9. Прилуцкий М.Х., Власов С.Е. Многокритериальные задачи объёмного планирования. Лексикографические схемы // Информационные технологии. 2005. № 7. С. 61–66.

10. Прилуцкий М.Х., Власов С.Е. Многостадийные задачи теории расписаний с альтернативными вариантами выполнения работ // Системы управления и информационные технологии. 2005. № 2. С. 44–48.

11. Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е. Оптимизационные задачи объёмно-календарного планирования для нефтеперерабатывающих предприятий // Системы управления и информационные технологии. 2007. № 2.1(28). С. 188–192.

12. Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е. Потоковые модели для предприятий с непрерывным циклом изготовления продукции // Информационные технологии. 2007. № 10. С. 47–52.

OPTIMAL STRATEGIES OF RESOURCE ALLOCATION IN NETWORK STRUCTURES

M.Kh. Prilutskii, E.A. Kumagina

The problem of optimally allocating limited resources in canonical and hierarchical network structures is considered. A general mathematical model is built, an optimization problem of resource allocation is formulated and its solution algorithm is proposed based on recurrence relations of dynamic programming.

Keywords: resource allocation, network structure, optimality principle of dynamic programming.

References

1. Priluckij M.H. Mnogokriterial'noe raspredelenie odnorodnogo resursa v ierarhicheskih sistemah // Avtomatika i telemehanika. 1996. № 2. C. 139–146.

2. Priluckij M.H., Batishhev D.I., Gudman Je.D., Norenkov I.P. Metod dekompozicij dlja reshenija kombinatornyh zadach uporjadochenija i rasprede-lenija resursov // Informacionnye tehnologii. Moskva. 1997. № 1. C. 29–33.

3. Priluckij M.H., Batishhev D.I., Gudman Je.D., Norenkov I.P. Metod kombinirovanija jevristik dlja reshenija kombinatornyh zadach uporjadochenija i raspredelenija resursov // Informacionnye tehnologii. Moskva. 1997. № 2. C. 29–32.

4. Afrajmovich L.G., Priluckij M.H. Mnogoindeksnye zadachi raspredelenija resursov v ierarhicheskih sistemah // Avtomatika i telemehanika. 2006. № 6. S. 194–205.

5. Priluckij M.H. Raspredelenie odnorodnogo resursa v ierarhicheskih sistemah drevovidnoj struktury. Trudy mezhdunarodnoj konferencii «Identifikacija sistem i zadachi upravlenija SICPRO 2000». Moskva, 26–28 sentjabrja 2000 g. Institut problem upravlenija im. V.A. Trapeznikova RAN. M.: Institut problem upravlenija im. V.A. Trapeznikova RAN, 2000. S. 2038–2049.

6. Priluckij M.H., Kumagina E.A. Zadachi raspredelenija raznorodnyh resursov v setevyh kanonicheskih strukturah // Perspektivnye informacionnye tehnologii i intellektual'nye sistemy. 2000. № 4. S. 46–52.

7. Priluckij M.H., Kumagina E.A. Zadacha uporjadochenija rabot kak zadacha o naznachenijah // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie. N. Novgorod: Izd-vo NNGU, 1999. Vyp. 21. C. 18–24.

8. Priluckij M.H. Mnogokriterial'nye mnogoindeksnye zadachi ob#jomno-kalendarnogo planirovanija // Izvestija AN. Teorija i sistemy upravlenija. 2007. № 1. S. 78–82.

9. Priluckij M.H., Vlasov S.E. Mnogokriterial'nye zadachi ob#jomnogo planirovanija. Leksikograficheskie shemy // Informacionnye tehnologii. 2005. № 7. S. 61–66.

10. Priluckij M.H., Vlasov S.E. Mnogostadijnye zadachi teorii raspisanij s al'ternativnymi variantami vypolnenija rabot // Sistemy upravlenija i informa-cionnye tehnologii. 2005. № 2. S. 44–48.

11. Priluckij M.H., Kostjukov V.E. Optimizacionnye zadachi ob'jomno-kalendarnogo planirovanija dlja neftepererabatyvajushhih predprijatij // Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii. 2007. № 2.1(28). S. 188–192.

12. Priluckij M.H., Kostjukov V.E. Potokovye modeli dlja predprijatij s nepreryvnym ciklom izgotovlenija produkcii // Informacionnye tehnologii. 2007. № 10. S. 47–52.