

УДК 539.3+519.6

## ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАНТОВ ШАГОВОГО МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

© 2014 г.

*Л.А. Игумнов, Я.Ю. Ратаушко*

НИИ механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 25.09.2013

Рассматривается задача построения шаговых по времени методов численного обращения преобразования Лапласа, основанных на теореме операционного исчисления об интегрировании оригинала. Шаговая схема определяется выбором квадратурной формулы и схемой численного решения задачи Коши, порождаемой интегралом, возникающим в рамках рассматриваемого подхода.

*Ключевые слова:* обращение преобразования Лапласа, шаговый метод, переменный шаг, схема Рунге–Кутты.

### Введение

Оригинальный подход к построению шаговых по времени схем метода граничных элементов описан в работах [1–3]. Ключевой проблемой построения гранично-элементной схемы [3–5] является проблема численного обращения интегрального преобразования Лапласа. В работах [6–8] применён шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа. В [9] приводится модификация метода, позволяющая учитывать специфику интегрирования сильно осциллирующих функций. Расширение подхода дают также работы [10, 11], использующие схемы Рунге–Кутты для решения задачи Коши, порождённой специальной процедурой обращения преобразования Лапласа. Работа посвящена вопросу рассмотрения и сравнения модификаций шагового метода, основанных на изложенных в [9–11] идеях.

### Постановка задачи и метод решения

Прямое и обратное интегральные преобразования Лапласа соответственно определяются формулами:

$$\bar{y}(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt,$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\omega}-i\infty}^{\tilde{\omega}+i\infty} \bar{y}(s) e^{st} ds,$$

где  $s = \tilde{\omega} + i\omega$  – комплексная переменная, введённая в полуплоскости  $\tilde{\omega} > \tilde{\omega}_0$ .

Рассмотрим метод, опирающийся на теорему об интегрировании оригинала – шаговый метод

численного обращения преобразования Лапласа.

Пусть

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Заменим интеграл (1) квадратурной суммой, весовые множители которой определяются с помощью изображения по Лапласу  $\bar{f}$  и линейного многошагового метода (изложение идёт с учётом результатов [1–3]):

$$y(0) = 0, \quad y(n\Delta t) = \sum_{k=1}^n \omega_k(\Delta t), \quad n = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \bar{f} \left( \frac{\gamma(R e^{i\frac{2\pi}{L}})}{\Delta t} \right) e^{-inl\frac{2\pi}{L}}. \quad (3)$$

Аппроксимация, используемая при выводе формул (2), (3), основана на применении линейного многошагового метода (с характеристической функцией  $\gamma(z)$ ) для решения возникающей в процессе преобразования интеграла (1) задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d}{dt} x(t) = sx(t) + C, \quad x(0) = 0. \quad (4)$$

На выбор многошагового метода накладываются следующие условия: метод должен быть порядка точности  $p \geq 1$ , являясь строго нуль-устойчивым или  $A$ -устойчивым. Функция  $\bar{f}(s)$  должна быть ограничена в правой полуплоскости относительно прямой  $(c - i\infty, c + i\infty)$ , то есть:

$$|\bar{f}(s)| \leq K|s|^{-\mu} \quad \text{при } K < \infty, \mu > 0.$$

Если функция  $\bar{f}(s)$  аналитична и ограничена в области

$$|\arg(s-c)| < \pi - \phi,$$

где  $\phi < \frac{\pi}{2}$ , критерий устойчивости может быть ослаблен до  $A(\alpha)$ -устойчивости.

К соответствующим примерам многошаговых методов относятся методы дифференцирования назад порядка  $p \leq 6$ : для  $A$ -устойчивого метода дифференцирования назад второго порядка ( $\alpha = 90^\circ$ ) можем записать:

$$\gamma(z) = 3/2 - 2z + z^2/2.$$

При условии того, что функция  $\bar{f}(s)$  в уравнении (3) вычисляется с некоторой погрешностью  $\varepsilon$ , выбор  $L = N$  и  $R^n = \sqrt{\varepsilon}$  допускает погрешность вычисления  $\omega_n$  порядка  $O(\sqrt{\varepsilon})$ .

### Модификация шагового метода с переменным шагом

Модификация формулы (3) для вычисления  $\omega_n$  с переменным шагом и линейной аппроксимацией функции выглядит следующим образом:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=0}^{L-1} \bar{f} \left[ \left( \frac{\gamma(Re^{in\phi_k})}{\Delta t} \right) e^{-in\phi_k} + \bar{f} \left( \frac{\gamma(Re^{in\phi_{k+1}})}{\Delta t} \right) e^{-in\phi_{k+1}} \right] \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{2}. \quad (5)$$

Для случаев, когда  $\bar{f}(\gamma(Re^{in\phi})/\Delta t)/e^{in\phi}$  – сильно осциллирующая функция, в сочетании с (5) целесообразно использовать комбинированную формулу, учитывающую специфику интегрирования таких функций [9]:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{2} e^{-in\frac{\phi_k + \phi_{k+1}}{2}} \times \left[ D_1(w) f \left( \frac{\gamma(Re^{in\phi_k})}{\Delta t} \right) + D_2(w) f \left( \frac{\gamma(Re^{in\phi_{k+1}})}{\Delta t} \right) \right], \quad (6)$$

$$w = -n \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{2},$$

$$D_{1,2}(w) = \begin{cases} \frac{\sin w}{w} \pm \frac{w \cos w - \sin w}{w^2} i & \text{при } |w| > w_2, \\ e^{\mp wi} & \text{при } |w| \leq w_2. \end{cases}$$

Формулы (5), (6) позволяют перераспределять расчётные узлы по промежутку изменения  $\phi$  для получения большей точности результата.

### Модификация шагового метода на узлах схемы Рунге–Кутты

Ещё один возможный вариант модификации традиционного метода с целью повышения качества результата при сохранении затрат – сгущение расчётных узлов в пространстве частот путём замены многошагового метода, использованного для решения задачи Коши (4).

Рассмотрим метод Рунге–Кутты, записанный с помощью таблицы Бутчера:

$$\frac{c|A^T}{b^T}, \quad A \in R^{m \times m}, \quad b, c \in R^m.$$

Для корректной формулировки шаговой схемы должны быть выполнены следующие условия [11]:

1. Метод Рунге–Кутты должен быть  $A$ -устойчивым;
2.  $|R(z)| < 1$  при  $z \neq 0$ , где  $R(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}(1, \dots, 1)^T$  – функция устойчивости;
3.  $R(\infty) = 0$ ;
4.  $\exists A^{-1}$ .

Для простоты будем рассматривать  $b^T A^{-1} = (0, \dots, 0, 1)$ , тогда метод автоматически  $L$ -устойчив.

Внедряя формализованный метод Рунге–Кутты вместо линейного многошагового метода для решения задачи Коши дифференциального уравнения, получим [11]:

$$y_0 = 0, \quad y_n = b^T A^{-1} \sum_{k=1}^n \omega_k(\Delta t), \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \bar{f} \left( \frac{\Delta(Re^{il\frac{2\pi}{L}})}{\Delta t} \right) e^{-inl\frac{2\pi}{L}},$$

$$\Delta(z) = A^{-1} - zA^{-1}[1]b^T A^{-1}.$$

В качестве схем метода Рунге–Кутты, удовлетворяющих сформулированным условиям, выберем схемы Радо и Лобатто [11].

### Численные результаты

Рассматривается решение задачи о действии осевой силы  $F = 1 \text{ Н/м}^2$  на поропругий стержень [3]. Отклики перемещений и давлений, вызванные силой  $F$ , наблюдаются в точке  $y = 3 \text{ м}$  стержня длиной  $l = 3 \text{ м}$ . Численные результаты получаются для материала с параметрами:  $K = 4.8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $G = 7.2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,

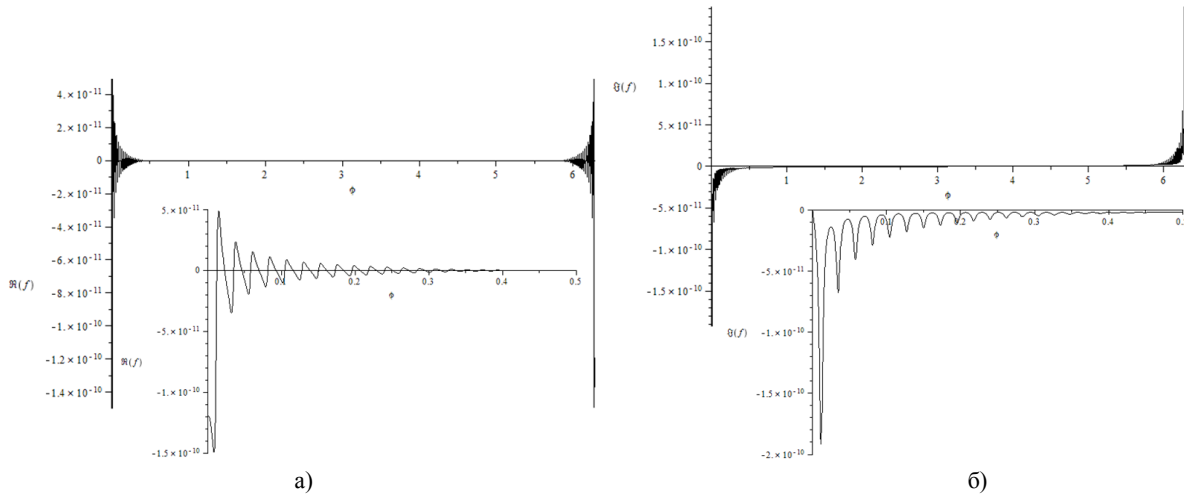


Рис. 1

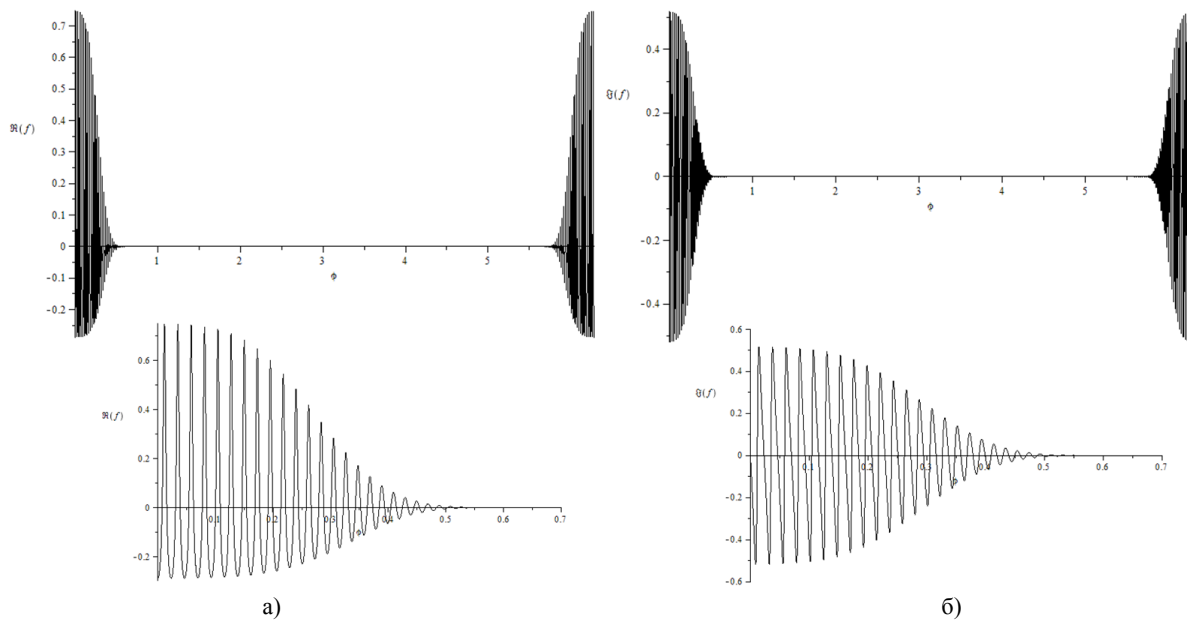


Рис. 2

$\rho_s = 2458 \text{ кг/м}^3$ ,  $\phi = 0.19$ ,  $K_s = 3.6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  
 $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_f = 3.3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $k =$   
 $= 1.9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$ . Здесь  $K$ ,  $G$  – константы  
 упругости,  $\rho_s$ ,  $\rho_f$  – плотности упругого скелета  
 и наполнителя,  $\phi$  – пористость,  $k$  – проницае-  
 мость,  $K_s$ ,  $K_f$  – объёмные модули упругого  
 скелета и наполнителя. Выберем отрезок вре-  
 мени  $0.02 \text{ с}$ , что составляет приблизительно  $5.5$   
 периодов функций по времени. При расчётах  
 использован коэффициент  $R = 0.997$ .

На рис. 1, 2 приведён вид действительной и  
 мнимой частей спектра перемещений и давлени-  
 ей соответственно.

Обозначим через  $L$  общее число узлов  
 (включая дополнительные для схем Рунге–  
 Кутты) по углу, через  $N$  – по времени. Рассмот-

рим равномерное разбиение промежутка изме-  
 нения  $\phi$  для модификации шагового метода,  
 основанной на схемах Лобатто и Радо, и кусоч-  
 но-равномерную сетку на промежутках  
 $[0, \pi/2]$ ,  $[\pi/2, 3\pi/2]$ ,  $[3\pi/2, 2\pi]$  для модифика-  
 ции с переменным шагом, основанной на мето-  
 де Эйлера (2), (5). Результаты обращения для  
 отклика перемещений при  $N=L/2=600$  представ-  
 лены на рис. 3. Красная кривая соответствует  
 схеме с переменным шагом, количество узлов  
 на промежутках –  $560, 80, 560$ ; синяя – схеме  
 Лобатто; зелёная – схеме Радо. Здесь и далее  
 для сравнения чёрным цветом приведён более  
 точный вид решения. Аналогично на рис. 4 по-  
 казаны результаты для  $N=L/2=1200$ , на рис. 5 –  
 для  $N=L/2=2400$ , с сохранением пропорции ко-  
 личество узлов на промежутках для схемы с  
 переменным шагом. При измельчении сеток на

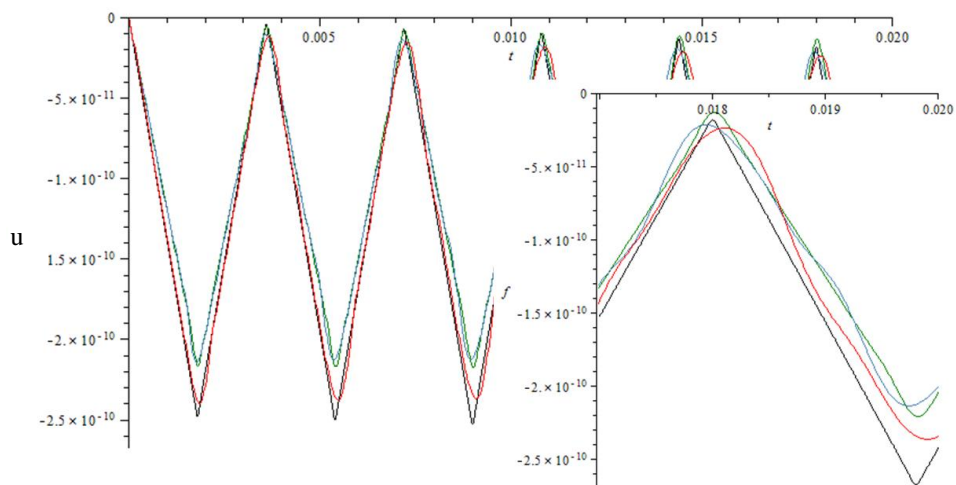


Рис. 3

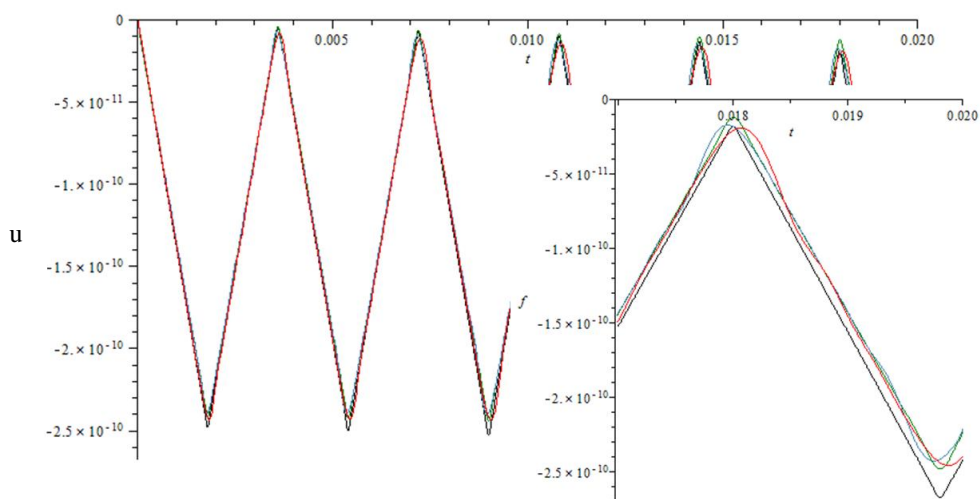


Рис. 4

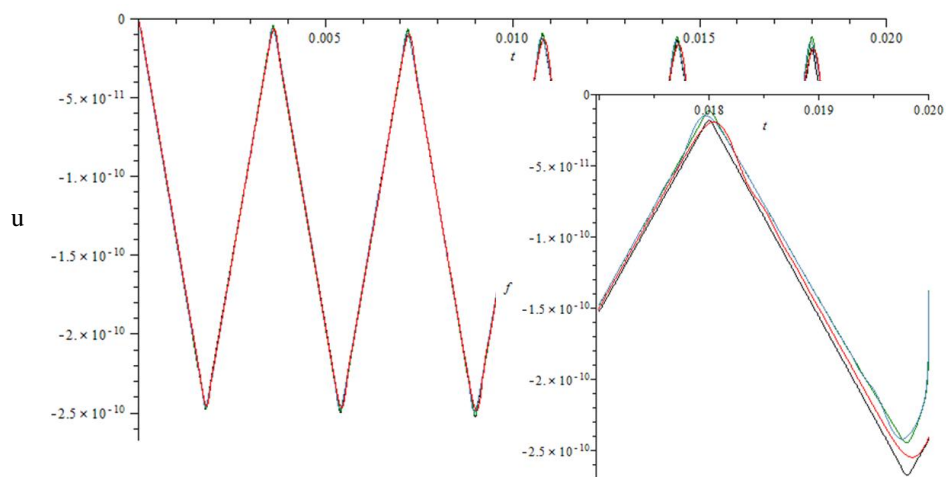


Рис. 5

промежутках до 2240, 320, 2240 узлов на графике появляются характерные осцилляции, поэтому для подсчётов использована модификация на основе формул интегрирования сильно осциллирующих функций (2), (6).

На вставке в рис. 5 в конце расчётного промежутка видна потеря устойчивости схем, основанных на методах семейства Рунге–Кутты, поэтому на рис. 6а,б дополнительно приведён вид двух предпоследних пиков решения.

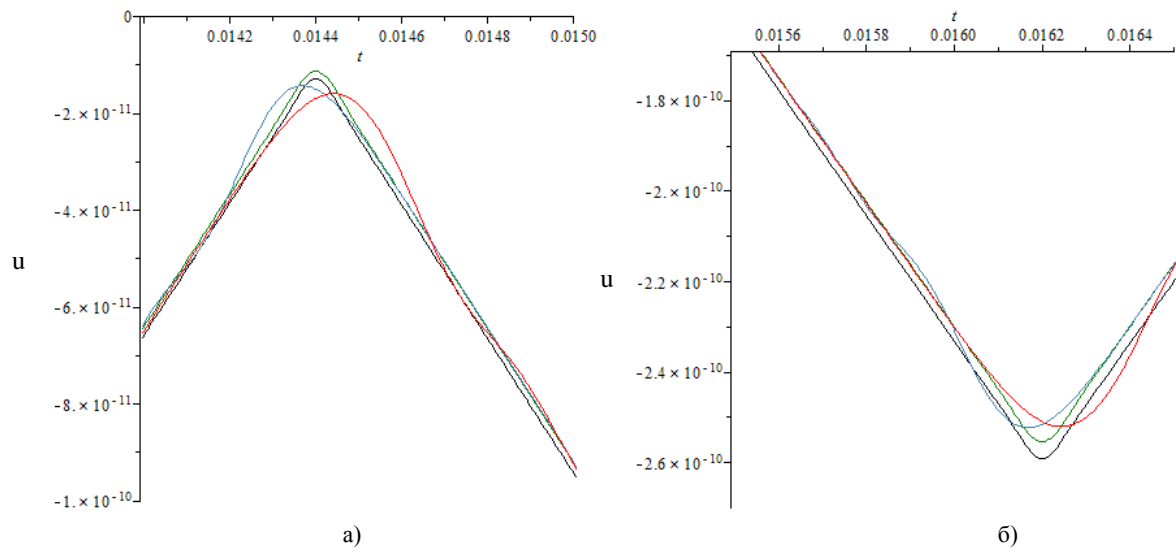


Рис. 6

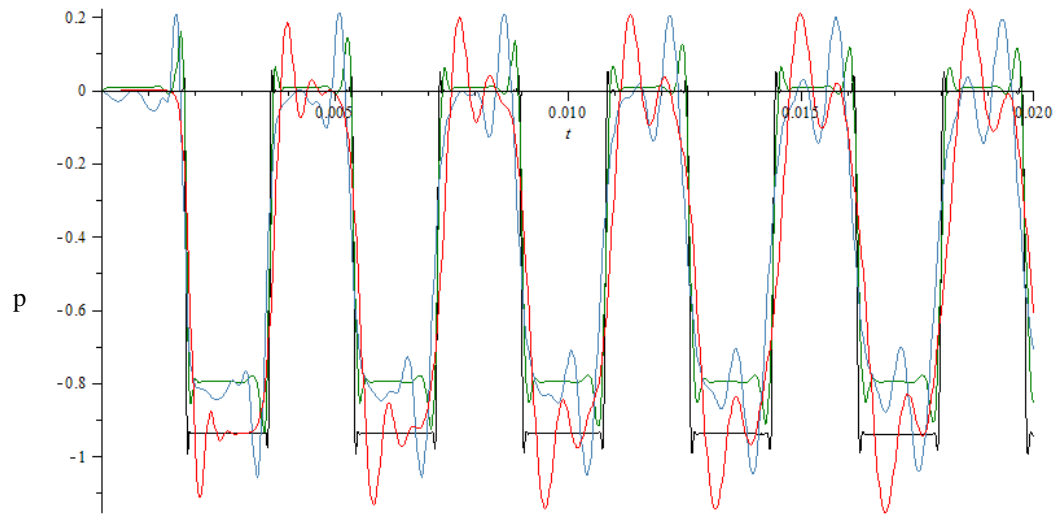


Рис. 7

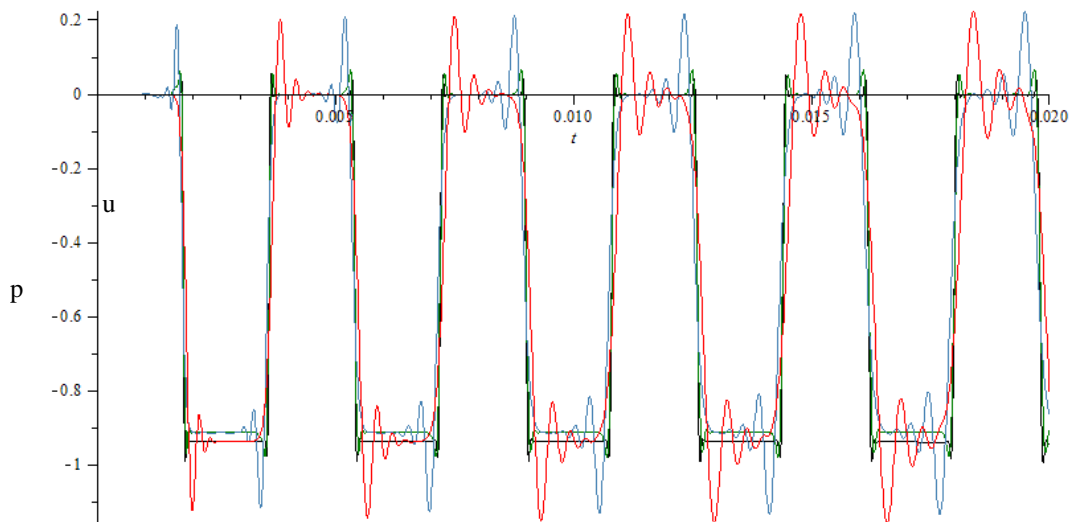


Рис. 8

На рис. 7, 8 представлены полученные графики давления при  $N=L/2=600$ ,  $N=L/2=1200$  соответственно; цветовое обозначение использованных схем сохранено.

Схема Радо независимо от числа узлов аппроксимации даёт наименьший сдвиг по времени (запаздывание или опережение) и в целом в рассмотренных условиях незначительно уступает схеме с переменным шагом, основанной на методе Эйлера; схема Лобатто даёт худшие результаты. На малом числе узлов подход на основе методов семейства Рунге–Кутты отстаёт в точности аппроксимации от подхода с переменным шагом, однако схема Радо лучшим образом передаёт качественный характер решения. С дальнейшим измельчением сеток схемы на основе методов Рунге–Кутты предоставляют немного лучшие результаты, но первыми теряют устойчивость при кратном увеличении  $N$  и  $L$ .

#### Список литературы

1. Lubich C. Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. I // Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 129–145.
2. Lubich C. Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. II // Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 413–425.
3. Schanz M. Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. Berlin Springer, 2001. 170 p.
4. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической те-

рии упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

5. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. 295 с.

6. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Развитие метода граничных элементов для решения трехмерных контактных нестационарных динамических задач теории упругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. Вып. 69. С. 125–136.

7. Аменицкий А.В., Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Гранично-элементное моделирование на основе квадратур сверток динамического состояния составных упругих тел // Вычислительная механика сплошных сред. Пермь: Изд-во ИМСС УрО РАН. 2008. Т. 1. № 3. С. 5–14.

8. Аменицкий А.В. Развитие методов граничных элементов для численного моделирования динамики трехмерных однородных пороупругих тел: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Н.Новгород, 2010. 20 с.

9. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Гранично-элементная методика на основе модифицированного метода квадратур сверток в динамических задачах упругих тел // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. Вып. 70. С. 150–158.

10. Banjai L. Multistep and multistage convolution quadrature for the wave equation: Algorithms and experiments // SIAM J. Sci. Comput. 2010. № 32. P. 2964–2994.

11. Banjai L., Messner M., Schanz M. Runge–Kutta convolution quadrature for the boundary element method // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2012. P. 90–101.

## APPLICATION OF TIME-STEP METHOD VARIANTS FOR NUMERICAL INVERSION OF THE LAPLACE TRANSFORM

L.A. Igumnov, Ya.Yu. Rataushko

The problem of constructing time-step methods for numerical inversion of the Laplace transform, based on the original function integration theorem, is considered. The stepping scheme is determined by the choice of the quadrature formula and the numerical solution scheme for the Cauchy problem, which arises for the integral appearing in the framework of the observed approach.

*Keywords:* Laplace transform inversion, time-step method, variable step, Runge-Kutta scheme.

#### References

1. Lubich C. Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. I // Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 129–145.
2. Lubich C. Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. II // Numerische Mathematik. 1988. № 52. P. 413–425.
3. Schanz M. Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. Berlin Springer, 2001. 170 p.
4. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. Metody granichnyh integral'nyh uravnenij i granichnyh jelementov v

reshenii zadach trehmernoj dinamicheskoy teorii uprugosti s soprjzhennymi poljami. M.: Fizmatlit, 2008. 352 s.

5. Ugodchikov A.G., Hutorjanskij N.M. Metod granichnyh jelementov v mehanike deformiruемого tverdogo tela. Kazan': Izd-vo Kazanskogo un-ta, 1986. 295 s.

6. Belov A.A., Igumnov L.A., Litvinchuk S.Ju. Razvitie metoda granichnyh jelementov dlja reshenija trehmernyh kontaktnyh nestacionarnyh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhvuz. sbornik. N.Novgorod: Izd-vo NNGU, 2007. Vyp. 69. S. 125–136.

7. Amenickij A.V., Belov A.A., Igumnov L.A., Litvinchuk S.Ju. Granichno-jelementnoe modelirovanie na osnove kvadratur svertok dinamicheskogo sostojanija sostavnyh uprugih tel // Vychislitel'naja mehanika sploshnyh sred. Perm': Izd-vo IMSS UrO RAN. 2008. T. 1. № 3. S. 5–14.

8. Amenickij A.V. Razvitie metodov granichnyh jelementov dlja chislennogo modelirovanija dinamiki trehmernyh odnorodnyh porouprugih tel: Avtoref. dis... kand. fiz.-mat. nauk. N.Novgorod, 2010. 20 s.

9. Belov A.A., Igumnov L.A., Litvinchuk S.Ju. Granichno-jelementnaja metodika na osnove modifitsiro-

vannogo metoda kvadratur svertok v dinamicheskikh zadachah uprugih tel // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhvuz. sbornik. N.Novgorod: Izd-vo NNGU, 2008. Vyp. 70. C. 150–158.

10. Banjai L. Multistep and multistage convolution quadrature for the wave equation: Algorithms and experiments // SIAM J. Sci. Comput. 2010. № 32. P. 2964–2994.

11. Banjai L., Messner M., Schanz M. Runge–Kutta convolution quadrature for the boundary element method // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2012. P. 90–101.