

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ТРЕХМЕРНОЙ ПЬЕЗОУПРУГОЙ КЕРАМИКИ

© 2014 г.

Л.А. Изумнов, И.П. Марков

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 22.01.2014

Рассматриваются краевые задачи пьезоупругого равновесия в трехмерной постановке. Граничное интегральное уравнение прямого подхода, система уравнений пьезоупругости записываются в форме, единой с системой уравнений анизотропной теории упругости. Для получения компонент матриц фундаментальных и сингулярных решений использованы формы их интегрального и полиномиального представлений. Для трансверсально изотропного случая использованы явные представления этих компонент. Приведены примеры гранично-элементного решения краевых задач.

Ключевые слова: пьезоупругость, граничный элемент, краевая задача, компоненты фундаментальных и сингулярных решений.

Введение

Пьезоэлектрики находят широкое применение в электронике, лазерах, ультразвуке. Они используются как элементы сенсоров, преобразователей и т.п. Применение пьезокерамических материалов стимулирует изучение свойств керамик с учетом связанности электрических и механических полей. Требования к точности и надёжности расчетов соответствующих изделий ставят проблему решения пространственных задач теории упругости с учетом электрического потенциала.

В работе рассматривается применение прямого варианта метода граничных интегральных уравнений (ГИУ).

Математическая модель

Уравнения равновесия записываются в виде [1–3]:

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad i, j = \overline{1,3},$$

где σ_{ij} , D_i – компоненты тензора напряжений и вектора электрического смещения соответственно.

Физические соотношения имеют вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijlm} \varepsilon_{lm} - e_{kij} E_k, \quad D_i = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \tilde{\varepsilon}_{ij} E_j,$$

$$i, j, k, l, m = \overline{1,3},$$

где ε_{ij} – компоненты линейного тензора деформации Коши; $E_j = -\phi_{,j}$ – компоненты электри-

ческого поля, ϕ – электрический потенциал; C_{ijkl} , e_{ijk} и $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ – упругие модули (измеренные при постоянном электрическом поле), пьезоэлектрические коэффициенты (измеренные при постоянной деформации или постоянном электрическом поле) и диэлектрические константы (измеренные при постоянной деформации).

Система дифференциальных уравнений линейной статической теории пьезоупругости имеет вид:

$$C_{ijkl} u_{k,li} + e_{ij} \phi_{,il} = 0, \quad e_{ikl} u_{k,li} - \tilde{\varepsilon}_{il} \phi_{,li} = 0,$$

$$i, j, k, l = \overline{1,3}, \quad \Omega \subset R^3,$$

где u_i – упругие перемещения, $\Omega \subset R^3$ – пьезоупругое тело с границей Γ .

Для того чтобы объединить упругие и электрические переменные, введем новые индексы K, J , варьируемые от 1 до 4, причем индексы 1–3 представляют упругие переменные, а 4 – электрические. С учетом этого обобщенные векторы перемещений и усилий, а также обобщенный тензор пьезоупругих модулей можем записать следующим образом:

$$U_K = \begin{cases} u_k, & k = K = 1, 2, 3, \\ \phi, & K = 4, \end{cases} \quad T_J = \begin{cases} t_j, & j = J = 1, 2, 3, \\ q, & J = 4, \end{cases}$$

$$C_{iJKl} = \begin{cases} C_{ijkl}, & j = J = k = K = 1, 2, 3, \\ e_{lij}, & j = J = 1, 2, 3, k = 4, \\ e_{ikl}, & J = 4, k = K = 1, 2, 3, \\ -\tilde{\varepsilon}_{il}, & J, K = 4, \end{cases}$$

где q – плотность поверхностного заряда ($q = D_i n_i$, n_i обозначает единичный вектор нормали к площадке).

С использованием введенных обозначений систему уравнений статической трехмерной линейной теории пьезоупругости перепишем в виде

$$\begin{aligned} L_{JK} U_k &= 0, \quad \Omega \subset R^3; \quad J, K = \overline{1,4}, \\ u &= \tilde{u} \text{ на } \Gamma^u, \quad t_i = \tilde{t}_i \text{ на } \Gamma^t, \quad \phi = \tilde{\phi} \text{ на } \Gamma^\phi, \\ q &= \tilde{q} \text{ на } \Gamma^q, \end{aligned} \quad (1)$$

где $L_{JK} = C_{ijkl} \partial_i \partial_j$, $i, j = \overline{1,3}$, $J, K = \overline{1,4}$.

Сведение краевой задачи (1) к ГИУ формально аналогично случаю анизотропной теории упругости [3–6]:

$$\begin{aligned} C_{KJ} U_J(x) &= \int_{\Gamma} (U_{KJ}^*(x, \xi) P_J(\xi) - \\ &- T_{KJ}^*(x, \xi) U_J(\xi)) dS(\xi), \\ &K, J = \overline{1,4}, \\ c_{KJ} &= \delta_{KJ} + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} T_{KJ}^* dS, \end{aligned} \quad (2)$$

где δ_{KJ} – дельта Кронекера; $\Gamma = \partial\Omega$ – граница области Ω ; U_J , P_J – компоненты векторов обобщенных перемещений и усилий; U_{KJ}^* и T_{KJ}^* – соответственно, компоненты матриц обобщенных фундаментальных и сингулярных решений (1).

Фундаментальные и сингулярные решения пьезоупругой среды

Построение фундаментальных и сингулярных решений является самостоятельной проблемой [7, 8]. Компоненты матриц фундаментальных решений для анизотропной теории пьезоупругости можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_{JK}^* &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{r^2} (M_{JK}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i, r_i^0) ds(z_i), \\ r_i^0 &= \frac{r_i}{r}, \quad M_{JK}^{zz} = \hat{C}_{ijkl} z_i z_j, \quad z_1, z_2 = 1, \\ U_{JK}^*(x) &= -\frac{\text{Im}}{2\pi r} \sum_{m=1}^4 [A_{JK}(p + \zeta_m q)(a_9(\zeta_m - \zeta_m^*) \times \\ &\times \prod_{k=1, k \neq m}^4 (\zeta_m - \zeta_k)(\zeta_m - \zeta_k^*)^{-1}], \\ &J, K = \overline{1,4}, \quad i = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, $r = |x - y|$, ζ_m – корни многочлена $D(p + \zeta q) = 0$ восьмой степени от ζ ; a_9 – коэффициент при ζ^8 ; $\text{Im} \zeta_m > 0$, $m = \overline{1,4}$; ζ_m^* – сопряженное к ζ_m .

Для получения сингулярного решения применим конечно-разностный аналог центральной производной в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Дискретный аналог и численные эксперименты

Используемая гранично-элементная модель описана в [5]. Граница Γ области аппроксимируется совокупностью четырехугольных восьмиузловых биквадратичных элементов S_k ($k = 1, \dots, N$). Декартовы координаты произвольной точки $y = (y_1, y_2, y_3)$ элемента S_k выражаются через координаты узловых точек этого элемента с помощью функции формы N^e ($e = 1, \dots, 8$) от локальных координат $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$$y_i(\xi) = \sum_{e=1}^8 N^e(\xi) y_i^{\beta(k,e)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\beta(k, e)$ – глобальный номер узла, имеющего в k -м элементе локальный номер e .

Граничные перемещения аппроксимируются билинейными элементами, а поверхностные усилия – постоянными элементами. Для получения дискретного аналога ГИУ в качестве проекционного метода используется метод коллокации. В качестве узлов коллокации выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций.

Существенной особенностью гранично-элементной схемы является наличие иерархического алгоритма численного интегрирования внутри граничного элемента [4, 5]. Такой подход позволяет достичь заданной точности.

Рассмотрим задачу о единичном кубе под действием одноосного растяжения или приложенного поверхностного заряда. Граничные условия формулируются следующим образом: при $x_3 = \pm 0.5$: $t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = \pm 100 \text{ Н/м}^2$; $q = 0$ (для случая одноосного растяжения) и $x_3 = \pm 0.5$: $t_i = 0$; $q = 10^{-10} \text{ Кл/м}^2$ (в случае приложенного поверхностного заряда), перемещения неизвестны; при $x_3 = 0$: $\phi = 0$; при $x_1 = x_2 = \pm 0.5$: $t_i = q = 0$, перемещения неизвестны. В качестве материалов рассматриваются две трансверсально изотропных пьезокерамики PZT-4 и PZT-5H со следующими параметрами: PZT-4:

$$C = \begin{bmatrix} 126.6 & 77.8 & 74.3 & 0 & 0 & 0 \\ 77.8 & 126.6 & 74.3 & 0 & 0 & 0 \\ 74.3 & 74.3 & 115 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24.1 \end{bmatrix} \text{ ГПа,}$$

Таблица 1

Материал	Тип решения	$u_1 \cdot 10^{10}$, м	$u_3 \cdot 10^{10}$, м	ϕ , В
PZT-4	1	-1.164	4.117	1.321
	2	-1.160	4.115	1.321
	3	-1.1632197	4.1187309	1.3205455
	4	-1.1632691	4.1201314	1.3205662
PZT-5H	1	-0.785	3.558	0.716
	2	-0.784	3.557	0.7163
	3	-0.78426954	3.5585732	0.71612707
	4	-0.78424341	3.5594851	0.71613712

Таблица 2

Материал	Тип решения	$u_1 \cdot 10^{10}$, м	$u_3 \cdot 10^{10}$, м	ϕ , В
PZT-4	1	-0.559	1.321	-0.00425
	2	-0.589	1.32	-0.00425
	3	-0.0059027086	0.013212394	-0.0042535965
	4	-0.0059027631	0.013213942	-0.00425361
PZT-5H	1	-0.291	0.716	-0.00227
	2	-0.291	0.716	-0.00227
	3	-0.0029133009	0.0071626271	-0.0022712919
	4	-0.0029133186	0.0071635909	-0.0022713216

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 & 0 \\ -5,2 & -5,2 & 15.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Н/(В}\cdot\text{м)},$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 6.46 & 0 & 0 \\ 0 & 6.46 & 0 \\ 0 & 0 & 5.62 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9},$$

PZT-5H:

$$C = \begin{bmatrix} 126.6 & 55 & 53 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 126.6 & 53 & 0 & 0 & 0 \\ 53 & 53 & 117 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35.5 \end{bmatrix} \text{ГПа},$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\ -6.5 & -6.5 & 23.3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Н/(В}\cdot\text{м)},$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 15.1 & 0 & 0 \\ 0 & 15.1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}.$$

Фундаментальные решения вычислялись двумя способами – по явным формулам для трансверсально изотропного материала [9] и численно по интегральной и полиномиальной формулам (3) при помощи линейной интерполяции Лагранжа [5]. Исследовались перемещения u_1 , u_3 и потенциал ϕ в точке (0.5, 0.5, 0.5). Проведено сравнение с аналитическими и численными результатами из [9]. Для случая одно-

осного растяжения результаты приведены в табл. 1, для случая приложенного поверхностного заряда – в табл. 2. Расчеты проводились на гранично-элементной сетке с количеством элементов 1536.

В табл. 1, 2 в графе «Тип решения» цифрами 1,2,3,4 обозначены: 1 – аналитическое решение [9], 2 – численное решение [9], 3 – гранично-элементное решение с аналитическим нахождением компонент ядер, 4 – гранично-элементное решение с численным нахождением компонент ядер. Необходимо отметить, что в [9] допущена опечатка в результатах для перемещений в случае приложенного поверхностного заряда (табл. 2), результаты должны быть на два порядка меньше.

Рассмотрим задачу о действии на тело электрического потенциала, приложенного, как показано на рис. 1. Тело жестко закреплено на нижнем торце, остальная поверхность свободна от усилий. Там, где приложен потенциал, плотность поверхностного заряда неизвестна. В качестве материала взята трансверсально изотропная пьезокерамика PZT со следующими свойствами:

$$C = \begin{bmatrix} 107.6 & 63.1 & 63.9 & 0 & 0 & 0 \\ 63.1 & 107.6 & 63.9 & 0 & 0 & 0 \\ 63.9 & 63.9 & 100.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22.2 \end{bmatrix} \text{ГПа},$$

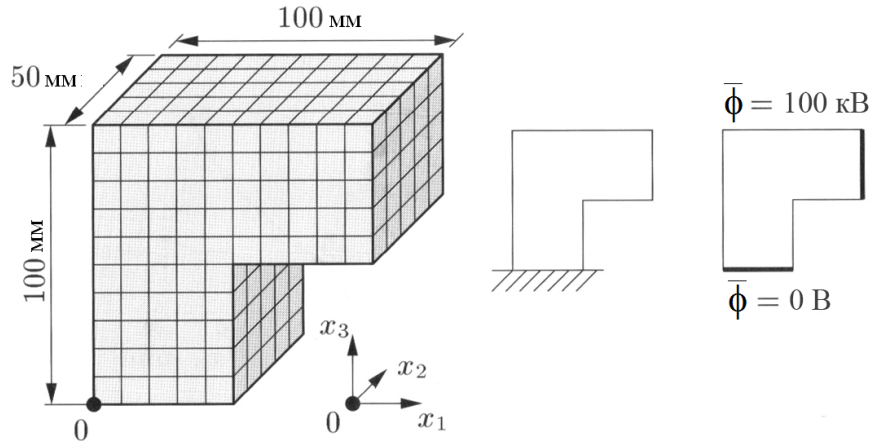


Рис. 1

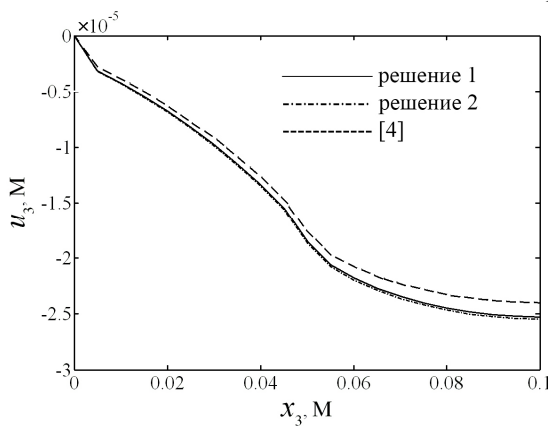


Рис. 2

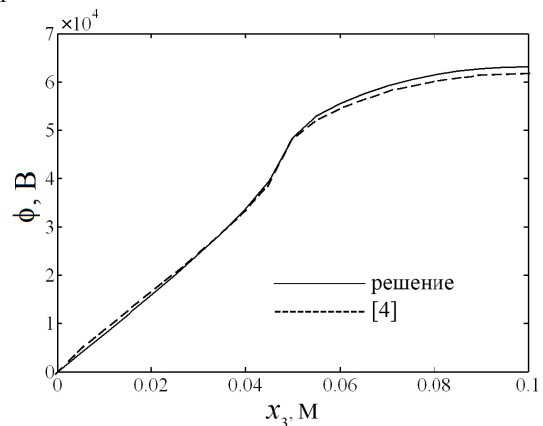


Рис. 3

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.0 & 0 & 0 \\ -9.6 & -9.6 & 15.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{H}/(\text{В}\cdot\text{м}),$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1936 & 0 & 0 \\ 0 & 1936 & 0 \\ 0 & 0 & 2109 \end{bmatrix}$$

Вслед за [3] исследовались перемещения u_3 и потенциал ϕ в узлах на линии $(0.05, 0, x_3)$. Проведено сравнение полученных результатов с результатами из [3] (рис. 2, 3). Используются следующие обозначения: гранично-элементное решение 1 – фундаментальные решения находятся численно по полиномиальной формуле (3) при помощи линейной интерполяции Лагранжа [5]; гранично-элементное решение 2 – фундаментальные решения вычисляются по явным формулам для трансверсально изотропного материала [9]. Расчеты проводились на гранично-элементной сетке с количеством элементов 1400.

На рис. 3 гранично-элементное решение 1 и гранично-элементное решение 2 графически неразличимы.

Заключение

Продемонстрированы возможности методического и программного гранично-элементного обеспечения решения задач равновесия линейной трехмерной теории пьезоупругости. Гранично-элементное получение решений на основе численного определения ядер ГИУ сравнивается с трансверсально изотропным случаем гранично-элементного получения решения, когда ядра ГИУ определяются аналитически. Созданная гранично-элементная схема дает возможность получать высокую точность искомых решений, превосходящую точность аналогичных схем других авторов.

Список литературы

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитно-упругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. Gaul L., Kogl M., Wagner M. Boundary element methods for engineers and scientists. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2003. 488 p.

4. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во КГУ, 1986. 296 с.

5. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

6. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе [и др.]; ред. В.Д. Купрадзе. Изд. 2-е. М.: Наука, 1976. 664 с.

7. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Пазин В.П., Петров А.Н. Численно-аналитическое построение

матриц Грина трехмерных теорий упругости и электроупругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. Вып. 3. С. 134–140.

8. Игумнов Л.А., Пазин В.П. Численно-аналитическое построение матриц Грина и Неймана трехмерной теории термоупругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. Вып. 4. С. 159–165.

9. Ding H., Liang J. The fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectricity and boundary element method // Computers and Structures. 1999. № 71. P. 447–455.

BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF ELECTRO-MECHANICAL FIELDS OF 3-D PIEZOELASTIC CERAMICS

L.A. Igumnov, I.P. Markov

Boundary-value problems of piezoelectric equilibrium in a 3-D formulation are considered. The direct approach boundary integral equation and the set of equations of piezoelectricity are written in the same form as the equation set of anisotropic elasticity. To obtain components of the matrices of fundamental and singular solutions, their integral and polynomial representations are used. For the transversally isotropic case, explicit forms of these components are used. Examples of the boundary-element analysis of boundary-value problems are given.

Keywords: piezoelectricity, boundary element, boundary-value problem, components of fundamental and singular solutions.

References

1. Parton V.Z., Kudryavcev B.A. *Ehlektromagnitnouprugost' p'ezoelektricheskikh i ehlektroprovodnyh tel.* M.: Nauka, 1988. 472 s.

2. Novackij V. *Teoriya uprugosti.* M.: Mir, 1975. 872 s.

3. Gaul L., Kogl M., Wagner M. *Boundary element methods for engineers and scientists.* Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2003. 488 p.

4. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во КГУ, 1986. 296 с.

5. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

6. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе [и др.]; ред. В.Д. Купрадзе. Изд. 2-е. М.: Наука, 1976. 664 с.

7. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Пазин В.П., Петров А.Н. Численно-аналитическое построение матриц Грина трехмерных теорий упругости и электроупругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. Вып. 3. С. 134–140.

8. Игумнов Л.А., Пазин В.П. Численно-аналитическое построение матриц Грина и Неймана трехмерной теории термоупругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. Вып. 4. С. 159–165.

9. Ding H., Liang J. The fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectricity and boundary element method // Computers and Structures. 1999. № 71. P. 447–455.