МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

О ЧИСЛЕ ЛИНЕЙНЫХ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

М.В. Долов, Е.В. Круглов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

kruglov19@mail.ru

Поступила в редакцию 13.02.2014

Доказано, что полиномиальное векторное поле степени n не менее двух может иметь не более $3n$–1 различных линейных частных интегралов, причем оценка является точной для нелинейностей второй, третьей и четвертой степеней.

Ключевые слова: алгебраическая интегрируемость, полиномиальные векторные поля, частные интегралы, первые интегралы, дифференциальные уравнения.

При решении как локальных, так и глобальных задач теории дифференциальных уравнений линейные частные интегралы эффективно использовались в работах Л. Эйлера, К. Якоби, Ф.Г. Миндинга, Н.Н. Баутина, К.С. Сибирского, Н.И. Вулпе, М.Н. Попа, А.С. Шубэ, Т.А. Дружковой, Р.А. Любимовой и других авторов. Постановка задачи в данной работе связана с [1].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y),\ \dot{y} = Q(x, y), \qquad (1)$$

где P и Q – взаимно простые полиномы, коэффициенты которых и переменные x, y в общем случае комплексные, $\max(\deg P, \deg Q) = n$.

По определению система (1) алгебраически интегрируема, если все инвариантные множества системы (1) алгебраические.

Теорема 1 [1]. Для максимального числа $S(n)$ различных неприводимых над полем комплексных чисел алгебраических инвариантных кривых алгебраически неинтегрируемых систем (1) справедлива оценка $S(n) \le \dfrac{n^2+n+2}{2} = p$, при этом $S(2) = 4$.

Точность оценки $S(3)$ доказана в [2, 3], при этом установлено, что равенства $S(2) = 4$, $S(3) = 7$ достигаются в классе систем (1) с линейными частными интегралами, коэффициенты которых могут быть комплексными в случае вещественных систем. Вопрос о точности $S(n) \le p$ при $n \ge 4$ открыт.

В связи с неравенством $S(n) \le p$ возникает вопрос о достижимости равенства $S(n) = p$ в классе систем (1) с линейными частными интегралами.

Основной результат данной работы содержит

Теорема 2. Для $n \ge 2$ система (1) с взаимно простыми полиномами P и Q может иметь не более $3n-1$ различных линейных частных интегралов, при этом для $2 \le n \le 4$ существуют системы (1) с $3n-1$ различными линейными частными интегралами.

Вспомогательные утверждения

Лемма [4]. Если дифференциальное уравнение $Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0$, где P и Q – полиномы, $\max(\deg P,\ \deg Q) = n \ge 2$, допускает общий интеграл

$$F(x, y) - CG(x, y) = 0\ , \qquad (2)$$

где $C \in \mathrm{C}$, $F(x, y)$ и $G(x, y)$ – линейные функции, то P и Q имеют общий делитель, тождественно не равный постоянной.

Считая в общем случае коэффициенты полиномов P и Q и переменные x, y комплексными, как и в [5], можно показать, что имеет место

Теорема 3 (Мироненко В.И.). Если r различных неприводимых над полем комплексных чисел алгебраических кривых $R_j(x, y) = 0$, $j = \overline{1, r}$, $\deg R_j = m_j$ инвариантны для системы (1) и

$$\sum_{j=1}^{r} m_j > \frac{1}{24} m(m+1)(m+2)\big(8 + 3(m+3)(n-1)\big), \qquad (3)$$

где $m = \max_{1 \le j \le r} m_j$, то система (1) алгебраически интегрируема и порядок кривых не выше m.

Доказательство теоремы 2

Первая часть утверждения теоремы 2 доказывается аналогично [4]. Допустим, что существуют системы (1) с взаимно простыми P и Q с $3n$ различными линейными частными интегралами. При $r = 3n$, $m_j = m = 1$ выполнено неравенство (3). По теореме 3 система (1) алгебраически интегрируема и имеет общий интеграл (2), где F и G – линейные функции. Согласно лемме, при $n \ge 2$ у полиномов P и Q есть общий делитель, тождественно не равный постоянной. Полученное противоречие доказывает, что для $n \ge 2$ число линейных частных интегралов системы (1) меньше $3n$.

При $n = 2$ существуют системы (1) с пятью различными линейными частными интегралами [6; 7, с. 9–12]. Для $n = 3$ в [8] с точностью до линейного невырожденного преобразования найдены вещественные системы (1) с восемью вещественными линейными частными интегралами. При $n = 4$ утверждению теоремы удовлетворяет система [9] $\dot{x} = x(x-1)(x^2 - 3x + 3)$, $\dot{y} = y(y-1)(y^2 - 3y + 3)$, допускающая 11 линейных частных интегралов: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $x = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $y = x$, $y = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}x + \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$, $y = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}x + \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$.

Теорема 2 доказана.

Так как при $n \ge 5$ выполнено неравенство $3n - 1 < \frac{n(n+1)}{2}$, то из теоремы 2 следует утверждение теоремы 2 [4] о том, что при $n \ge 5$ нет систем (1) с взаимно простыми P и Q с $\frac{n(n+1)}{2}$ различными линейными частными интегралами.

Для $n = 2$ и $n = 3$ при наличии у (1) соответственно пяти и восьми линейных частных интегралов в силу теоремы 1 система (1) алгебраически интегрируема. При $n = 4$ значение $3n - 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2} = 11$, и в случае наличия у (1) частных интегралов $\Phi_j = a_j x + b_j y + c_j = 0$, $j = \overline{1, 11}$, по первой теореме Дарбу [10] система (1) имеет первый интеграл Дарбу $\Phi_1^{\beta_1} \ldots \Phi_k^{\beta_k} = C$, где $1 \le k \le 11$, $\beta_j \ne 0$. Так как $\deg \Phi_j = 1$, то у системы (1) нет предельных циклов.

Теорема 2 дает точную оценку сверху числа различных линейных частных интегралов. При некоторых ограничениях на систему (1) эта оценка указана в [2].

Ранее другим способом доказано, что максимальное число различных (в том числе комплексных) линейных частных интегралов системы (1) при $n = 3$ равно восьми [11]. При этом в [11] детально не рассмотрен случай, когда система (1) вырождена на бесконечности, т.е.

$$xQ_n(x, y) - yP_n(x, y) \equiv 0, \qquad (4)$$

где $P_n(x, y)$ и $Q_n(x, y)$ – однородные полиномы степени n, содержащиеся в P и Q соответственно. При выполнении тождества (4) система (1) при $n = 3$ может иметь не более шести различных линейных частных интегралов [12]. В [13–15] доказано, что полиномиальное векторное поле четвертой степени, вырожденное на бесконечности, может иметь не более 9 линейных частных интегралов.

Замечания. 1. Пример уравнения $xdy - ydx = 0$ показывает, что в теореме 2 условие $n \ge 2$ и требование взаимной простоты P и Q существенны.

2. Рассматривая систему [9] $\dot{x} = (x-4) \times (x+2)(y^2 + x + 1)$, $\dot{y} = xy(y^2 - 9)$ и её частные интегралы $x = 4$, $x = -2$, $y = 0$, $y = 3$, $y = -3$, $y = x - 1$, $y = -x + 1$, $y = \frac{x}{2} + 1$, $y = -\frac{x}{2} - 1$ видим, что в [16, с. 219] неверно утверждение: «а) общее число различных k и k'-направлений не превосходит пяти». Здесь $y = kx + b$, $x = k'y + a$ – интегральные прямые вещественной системы (1) при $n = 4$.

Список литературы

1. Долов М.В. О числе алгебраических инвариантных кривых полиномиальных векторных полей // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 838–839.

2. Долов М.В., Бубнова И.В. Системы с линейными частными интегралами // Известия РАЕН. Дифференц. уравнения. 2006. № 11. С. 79–80.

3. Дружкова Т.А. Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами. Ч. 1. Метод пособие. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. 36 с.

4. Долов М.В. О точности оценки числа алгебраических кривых полиномиальных векторных полей // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 2(1). С. 135–137.

5. Мироненко В.И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. Минск: Изд-во БГУ, 1981. 103 с.

6. Дружкова Т.А. Дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами. Дис… канд. физ.-мат. наук. Горький: ГГУ, 1975. 129 с.

7. Дружкова Т.А. Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами. Ч. 2. Метод пособие. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. 30 с.

8. Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференц. и интегральные уравнения. Межвуз. сб. Горький, ГГУ. 1977. С. 19–22.

9. Долов М.В., Чистякова С.А. О числе линейных частных интегралов полиномиальных векторных полей с вырожденной бесконечностью // Тез. докл. Международной конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2–7 июля 2010 г. С. 76–77.

10. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2. М.-Л.: ГТТИ, 1936. 563 с.

11. Долов М.В., Павлюк Ю.В. К вопросу об алгебраической интегрируемости полиномиальных векторных полей // Тр. СВМО. 2004. Т. 6. № 1. С. 40–50.

12. Долов М.В., Чистякова С.А. О числе линейных частных интегралов кубической системы, вырожденной на бесконечности // Тр. СВМО. 2007. Т. 9. № 2. С. 62–74.

13. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвёртой степени с вырожденной бесконечностью. I // Вестник ННГУ. 2010. № 6. С. 132–137.

14. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвёртой степени с вырожденной бесконечностью. II // Вестник ННГУ. 2011. № 1. С. 139–148.

15. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвёртой степени с вырожденной бесконечностью. III // Вестник ННГУ. 2011. № 2. С. 123–129.

16. Латипов Х.Р., Косс М.Ш. Об интегральных прямых одного дифференциального уравнения // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Качественные методы теории нелинейных колебаний. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1984. С. 219–222.

ON THE NUMBER OF LINEAR PARTIAL INTEGRALS OF POLYNOMIAL VECTOR FIELDS

M.V. Dolov, E.V. Kruglov

A polynomial vector field of degree n at least two is proved to have no more than $3n$ -1 different linear partial integrals, the estimate being accurate for second-, third- and fourth-order nonlinearities.

Keywords: algebraic integrability, polynomial vector fields, particular integrals, first integrals, differential equations.

References

1. Dolov M.V. O chisle algebraicheskih invariantnyh krivyh polinomial'nyh vektornyh polej // Differencial'nye uravneniya. 2004. T. 40. № 6. S. 838–839.

2. Dolov M.V., Bubnova I.V. Sistemy s linejnymi chastnymi integralami // Izvestiya RAEN, Differenc. uravneniya. 2006. № 11. S. 79–80.

3. Druzhkova T.A. Algebraicheskie differencial'nye uravneniya s algebraicheskimi integralami. CH.1. Metod posobie. N. Novgorod: Izd-vo NNGU, 2005. 36 s.

4. Dolov M.V. O tochnosti ocenki chisla algebraicheskih krivyh polinomial'nyh vektornyh polej // Vestnik NNGU. 2013. № 2(1). S. 135–137.

5. Mironenko V.I. Linejnaya zavisimost' funkcij vdol' reshenij differencial'nyh uravnenij. Mn: Izd-vo BGU, 1981. 103 s.

6. Druzhkova T.A. Differencial'nye uravneniya s algebraicheskimi integralami. Dis… kand. fiz.-mat. nauk. Gor'kij: GGU, 1975. 129 s.

7. Druzhkova T.A. Algebraicheskie differencial'nye uravneniya s algebraicheskimi integralami. Ch. 2. Metod posobie. N. Novgorod: Izd-vo NNGU, 2009. 30 s.

8. Lyubimova R.A. Ob odnom differencial'nom uravnenii s integral'nymi pryamymi // Differenc. i integral'nye uravneniya. Mezhvuz.sb. Gor'kij, GGU. 1977. S. 19–22.

9. Dolov M.V., Chistyakova S.A. O chisle linejnyh chastnyh integralov polinomial'nyh vektornyh polej s vyrozhdennoj beskonechnost'yu // Tez. dokl. Mezhdunarodnoj konf. po differencial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam, Suzdal', 2–7 iyulya 2010 g. S. 76–77.

10. Gursa Eh. Kurs matematicheskogo analiza. T. 2. M.-L., GTTI. 1936. 563 s.

11. Dolov M.V., Pavlyuk Yu.V. K voprosu ob algebraicheskoj integriruemosti polinomial'nyh vektornyh polej // Tr. SVMO. 2004. T. 6. № 1. S. 40–50.

12. Dolov M.V., Chistyakova S.A. O chisle linej-nyh chastnyh integralov kubicheskoj sistemy, vyrozhdennoj na beskonechnosti // Tr. SVMO. 2007. T. 9. № 2. S. 62–74.

13. Dolov M.V., Chistyakova S.A. O linejnyh chastnyh integralah polinomial'nyh vektornyh polej chetvyortoj stepeni s vyrozhdennoj beskonechnost'yu. I // Vestnik NNGU. 2010. № 6. S. 132–137.

14. Dolov M.V., Chistyakova S.A. O linejnyh chastnyh integralah polinomial'nyh vektornyh polej chetvyortoj stepeni s vyrozhdennoj beskonechnost'yu. II // Vestnik NNGU. 2011. № 1. S. 139–148.

15. Dolov M.V., Chistyakova S.A. O linejnyh chastnyh integralah polinomial'nyh vektornyh polej chetvyortoj stepeni s vyrozhdennoj beskonechnost'yu. III // Vestnik NNGU. 2011. № 2. S. 123–129.

16. Latipov H.R., Koss M.SH. Ob integral'nyh pryamyh odnogo differencial'nogo uravneniya // IX Mezhdunar. konf. po nelinejnym kolebaniyam. Kachestvennye metody teorii nelinejnyh kolebanij. T. 2. Kiev: Naukova dumka, 1984. S. 219–222.