УДК 517.9

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ

А.В. Калинин, В.Е. Молодкина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

mph@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 31.10.2013

Приводятся представления векторных полей во внешних областях через дифференциальные операции векторного анализа.

Ключевые слова: представления векторных полей, дифференциальные операции векторного анализа.

Различные представления функций используются в теории вложения пространств дифференцируемых функций, основы которой были заложены в работах С.Л. Соболева [1, 2]. Существенное развитие эта теория получила в работах С.М. Никольского, В.П. Ильина, О.В. Бесова [3], Ю.Г. Решетняка [4, 5], В.И. Буренкова [6]. В частности, в работах [4, 5] рассматриваются интегральные представления для функций и вектор-функций через некоторые дифференциальные операторы, на основе которых доказываются оценки, известные в литературе под названием неравенств Корна [7].

Важную роль в приложениях, связанных с задачами гидродинамики и электромагнитной теории, играют оценки векторных полей $\vec{u}$, связывающие их L_p-нормы с L_p-нормами $\operatorname{div}\vec{u}$ и $\operatorname{rot}\vec{u}$. Эти вопросы изучались в работах [8–13]. При изучении электромагнитных полей в неоднородных средах с разрывными коэффициентами, характеризующими свойства среды, непосредственное использование этих результатов невозможно. В работах [14–18] на основе дифференциальных представлений векторных функций через операторы div и rot были получены оценки для скалярных произведений векторных полей и продемонстрирована возможность их применения для исследования внутренних задач электромагнитной теории.

В настоящей работе приводятся новые представления векторных полей через дифференциальные операторы div и rot во внешних областях. Эти представления могут быть использованы при исследовании внешних краевых задач электромагнитной теории и гидродинамики.

1. Основные результаты работы. Через $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, … обозначаются точки евклидова пространства $\mathbf{R}^3$; через $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ – его канонический базис; через $(\vec{x}\cdot\vec{y})$ – скалярное произведение; через $[\vec{x}\times\vec{y}]$ – векторное произведение; $|\vec{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$; $S = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : |\vec{x}| = 1\}$.

Пусть Ω_{int} – открытое подмножество в $\mathbf{R}^3$, звездное относительно начала координат $\vec{0} \in \Omega_{\text{int}}$ с границей Γ, являющейся многообразием класса C^1; $\Omega_{\text{ext}} = \mathbf{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_{\text{int}}$, где $\overline{\Omega}_{\text{int}} = \Omega_{\text{int}} \cup \Gamma$ – замыкание Ω_{int} в $\mathbf{R}^3$. Для каждого $\vec{s} \in S_\Gamma$ определим луч $l_{\vec{s}} = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = r\vec{s}, r \in (0,\infty)\}$. Через S_Γ будет обозначаться множество $S_\Gamma = \{\vec{s} \in S : l_{\vec{s}} \cap \Gamma \neq \emptyset\}$. В работе предполагается, что выполнены условия:

1) $S_\Gamma = S \cap \mathcal{O}$ для некоторого открытого в $\mathbf{R}^3$ множества $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^3$ (т.е. S_Γ – открытое подмножество S в индуцированной пространством $\mathbf{R}^3$ топологии);

2) для каждого $\vec{s} \in S_\Gamma$ множество $l_{\vec{s}} \cap \Gamma$ состоит ровно из одной точки $\vec{x} = \vec{s} \cdot R(\vec{s})$, при этом $\vec{x} = r\vec{s} \in \Omega_{\text{int}}$, если $0 < r < R(\vec{s})$ и $\vec{x} = r\vec{s} \in \Omega_{\text{ext}}$, если $r > R(\vec{s})$;

3) функция $h(\vec{x}) = R(\vec{x}/|\vec{x}|)$, определенная на открытом множестве $\mathcal{O}_\Gamma = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = r\vec{s}, (r,\vec{s}) \in (0,\infty) \times S_\Gamma\}$, является функцией класса $C^1(\mathcal{O}_\Gamma)$.

Для каждой точки $\vec{x} \in \Gamma$ обозначим через $\vec{n}(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Gamma$, единичный вектор внешней по отношению к Ω_{int} нормали; для вектор-функции $\vec{u} \in \{C(\overline{\Omega}_{\text{ext}})\}^3$ использованы обозначения:

$$u_n(\vec{x}) = (\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})),\ \vec{x} \in \Gamma,$$
$$\vec{u}_n(\vec{x}) = u_n(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}),$$
$$\vec{u}_t(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}_n(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Gamma. \qquad (1)$$

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть граница Γ множества $\Omega_{\text{int}} \subset \mathbf{R}^3$ удовлетворяет сформулированным выше условиям 1)–3). Тогда для любой функции $\vec{u} \in \left\{C^1(\overline{\Omega}_{\text{ext}})\right\}^3$ при всех $\vec{x} \in \Omega_{\text{ext}}$ справедливо представление

$$\vec{u}(\vec{x}) = \operatorname{rot}_{\vec{x}} \int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \tau[\vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}]\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \tau^2 \vec{x}\,\operatorname{div}_{\vec{z}} \vec{u}(\tau\vec{x})\,d\tau + \tag{2}$$

$$+ \vec{x}\left(\operatorname{grad}_{\vec{x}} \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \cdot \vec{n}\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right)\right) u_n\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right) \cdot \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}$$

(здесь $\vec{z} = \tau\vec{x}$, $\operatorname{div}_{\vec{z}} \vec{u}(\tau\vec{x}) = \operatorname{div}_{\vec{z}} \vec{u}(\vec{z})$).

Теорема 2. Пусть граница Γ множества $\Omega_{\text{int}} \subset \mathbf{R}^3$ удовлетворяет сформулированным выше условиям 1)–3). Тогда для любой функции $\vec{u} \in \left\{C^1(\overline{\Omega}_{\text{ext}})\right\}^3$ при всех $\vec{x} \in \Omega_{\text{ext}}$ справедливо представление

$$\vec{u}(\vec{x}) = \operatorname{grad}_{\vec{x}} \int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} (\vec{u}(\tau\vec{x}) \cdot \vec{x})\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \tau[\operatorname{rot}_{\vec{z}} \vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}]\,d\tau + \tag{3}$$

$$+ \left[\vec{x} \times \left[\operatorname{grad}_{\vec{x}} \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \times \vec{u}_\tau\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right)\right]\right].$$

2. Предварительные результаты. Пусть $\vec{z} = \vec{z}_\tau(\vec{x}) = \tau\vec{x}$. Справедливы следующие очевидные соотношения:

$$\frac{\partial z_i}{\partial \tau} = x_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \tau, & i = j. \end{cases} \tag{4}$$

Из соотношений (4) следует справедливость соотношений

$$\frac{\partial u_i(\vec{z})}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i(\vec{z})}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial x_j} = \tau \frac{\partial u_i(\vec{z})}{\partial z_j}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_j \frac{\partial u_i(\vec{z})}{\partial x_j} = \tau \sum_{j=1}^{3} x_j \frac{\partial u_i(\vec{z})}{\partial z_j} = \tau \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i(\vec{z})}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial \tau} = \frac{\partial u_i(\vec{z})}{\partial \tau}. \tag{6}$$

Доказательство сформулированных теорем опирается на следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\vec{u} \in \left\{C^1(\overline{\Omega}_{\text{ext}})\right\}^3$. Тогда при всех $\vec{x} \in \Omega_{\text{ext}}$ справедливо соотношение

$$\vec{u}(\vec{x}) = \int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \operatorname{rot}_{\vec{x}} \tau[\vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}]\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \tau^2 \vec{x}\,\operatorname{div}_{\vec{z}} \vec{u}(\tau\vec{x})\,d\tau + \frac{h^2(\vec{x})}{|\vec{x}|^2} \vec{u}\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right). \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно, при всех $\vec{x} \in \Omega_{\text{ext}}$ выполнено

$$\vec{u}(\vec{x}) = \int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \frac{\partial}{\partial \tau}(\tau^2 \vec{u}(\tau\vec{x}))\,d\tau + \vec{u}\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right) \cdot \frac{h^2(\vec{x})}{|\vec{x}|^2} =$$

$$= \int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \tau\left\{2\vec{u}(\tau\vec{x}) + \tau \frac{\partial \vec{u}(\tau\vec{x})}{\partial \tau}\right\} d\tau + \frac{h^2(\vec{x})}{|\vec{x}|^2} \vec{u}\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right).$$

Покажем, что

$$\operatorname{rot}_x[\vec{u}(z_\tau(\vec{x})) \times \vec{x}] + \tau\vec{x}\,\operatorname{div}_z \vec{u}(z_\tau(\vec{x})) = = 2\vec{u}(z_\tau(\vec{x})) + \tau \frac{\partial \vec{u}(z_\tau(\vec{x}))}{\partial \tau}.$$

Действительно, рассмотрим выражение

$$\left(\vec{e}_1 \cdot \operatorname{rot}_x[\vec{u}(\vec{z}) \times \vec{x}]\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left([\vec{u}(\vec{z}) \times \vec{x}] \cdot \vec{e}_3\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left([\vec{u}(\vec{z}) \times \vec{x}] \cdot \vec{e}_2\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u_1(\vec{z})x_2 - u_2(\vec{z})x_1\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_3}\left(u_3(\vec{z})x_1 - u_1(\vec{z})x_3\right) = 2u_1(\vec{z}) +$$

$$+ x_2 \frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial u_2(\vec{z})}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial x_3} =$$

$$= 2u_1(\vec{z}) - x_1\left(\frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(\vec{z})}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3(\vec{z})}{\partial x_3}\right) +$$

$$+ x_1 \frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u_2(\vec{z})}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial x_3}.$$

Учитывая (5), (6), получаем

$$\left(\vec{e}_1 \cdot \operatorname{rot}_x[\vec{u}(\vec{z}) \times \vec{x}]\right) = -x_1 \tau\,\operatorname{div}_z \vec{u}(\vec{z}) + + 2u_1(\vec{z}) + \tau \frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial \tau}. \tag{8}$$

Совершенно аналогично получаются соотношения

$$\left(\vec{e}_2 \cdot \operatorname{rot}_x[\vec{u}(\vec{z}) \times \vec{x}]\right) = -x_2 \tau\,\operatorname{div}_z \vec{u}(\vec{z}) + + 2u_2(\vec{z}) + \tau \frac{\partial u_2(\vec{z})}{\partial \tau}, \tag{9}$$

$$\left(\vec{e}_3 \cdot \operatorname{rot}_x[\vec{u}(\vec{z}) \times \vec{x}]\right) = -x_3 \tau\,\operatorname{div}_z \vec{u}(\vec{z}) + + 2u_3(\vec{z}) + \tau \frac{\partial u_3(\vec{z})}{\partial \tau}. \tag{10}$$

Полученные соотношения (8)–(10) являются покомпонентной записью доказываемого равенства (7), откуда с учетом (4) следует (7). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\vec{u} \in \left\{C^1(\overline{\Omega}_{\text{ext}})\right\}^3$. Тогда при всех $\vec{x} \in \Omega_{\text{ext}}$ справедливо соотношение

$$\vec{u}(\vec{x}) = \int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \operatorname{grad}_{\vec{x}} (\vec{u}(\tau\vec{x}) \cdot \vec{x})\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1}\tau[\mathrm{rot}_{\vec{z}}\vec{u}(\vec{z}_\tau(\vec{x}))\times\vec{x}]d\tau+\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\vec{u}\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right). \quad (11)$$

Доказательство. Очевидно, при всех $\vec{x}\in\Omega_{\mathrm{ext}}$ выполнено

$$\vec{u}(\vec{x})=\int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1}\frac{\partial}{\partial\tau}(\tau\vec{u}(\tau\vec{x})\cdot\vec{x})d\tau+\vec{u}\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right)\cdot\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}. \quad (12)$$

Покажем, что

$$\begin{gathered}\mathrm{grad}_x(\vec{u}(z_\tau(\vec{x}))\cdot\vec{x})+\tau[\mathrm{rot}_z\vec{u}(z_\tau(\vec{x}))\times\vec{x}]=\\=\vec{u}(z_\tau(\vec{x}))+\tau\frac{\partial\vec{u}(z_\tau(\vec{x}))}{\partial\tau}.\end{gathered} \quad (13)$$

С учетом (7) можно записать

$$\left(\mathrm{e}_1\cdot\mathrm{grad}_x(\vec{u}(\vec{z})\cdot\vec{x})\right)=u_1(\vec{z})+\tau\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial u_i(\vec{z})}{\partial z_1}. \quad (14)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}&\left(\vec{\mathrm{e}}_1\cdot\mathrm{rot}_z[\vec{u}(\vec{z})\times\vec{x}]\right)=\\&=\tau\left(\mathrm{rot}_z\vec{u}(\vec{z})\cdot\vec{\mathrm{e}}_2\right)x_3-\tau\left(\mathrm{rot}_z\vec{u}(\vec{z})\cdot\vec{\mathrm{e}}_3\right)x_2=\\&=\tau x_3\left(\frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial z_3}-\frac{\partial u_3(\vec{z})}{\partial z_1}\right)-\\&-\tau x_2\left(\frac{\partial u_2(\vec{z})}{\partial z_1}-\frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial z_2}\right)=\\&=\tau\left(x_1\frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial z_1}+x_2\frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial z_2}+x_3\frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial z_3}\right)-\\&-\tau\left(x_1\frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial z_1}-x_2\frac{\partial u_2(\vec{z})}{\partial z_1}-x_3\frac{\partial u_3(\vec{z})}{\partial z_1}\right).\end{aligned}$$

Учитывая (8), получаем

$$\tau\left(\vec{\mathrm{e}}_1\cdot[\mathrm{rot}_z\vec{u}(\vec{z})\times\vec{x}]\right)=\tau\frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial\tau}-\tau\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial u_i(\vec{z})}{\partial z_1}. \quad (15)$$

Сложив равенства (14) и (15), получим

$$\begin{gathered}\left(\vec{\mathrm{e}}_1\cdot\mathrm{grad}_x(\vec{u}(\vec{z})\cdot\vec{x})\right)+\tau\left(\vec{\mathrm{e}}_1\cdot[\mathrm{rot}_z\vec{u}(\vec{z})\times\vec{x}]\right)=\\=u_1(\vec{z})+\tau\frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial\tau},\end{gathered} \quad (16)$$

$$\begin{gathered}\left(\vec{\mathrm{e}}_1\cdot\mathrm{grad}_x(\vec{u}(\vec{z})\cdot\vec{x})\right)+\left(\vec{\mathrm{e}}_1\cdot\tau[\mathrm{rot}_z\vec{u}(\vec{z})\times\vec{x}]\right)=\\=u_1(\vec{z})+\tau\frac{\partial u_1(\vec{z})}{\partial\tau}.\end{gathered} \quad (17)$$

Совершенно аналогично получаются соотношения

$$\begin{gathered}\left(\vec{\mathrm{e}}_2\cdot\mathrm{grad}_x(\vec{u}(\vec{z})\cdot\vec{x})\right)+\left(\vec{\mathrm{e}}_2\cdot\tau[\mathrm{rot}_z\vec{u}(\vec{z})\times\vec{x}]\right)=\\=u_2(\vec{z})+\tau\frac{\partial u_2(\vec{z})}{\partial\tau},\end{gathered} \quad (18)$$

$$\begin{gathered}\left(\vec{\mathrm{e}}_3\cdot\mathrm{grad}_x(\vec{u}(\vec{z})\cdot\vec{x})\right)+\left(\vec{\mathrm{e}}_3\cdot\tau[\mathrm{rot}_z\vec{u}(\vec{z})\times\vec{x}]\right)=\\=u_3(\vec{z})+\tau\frac{\partial u_3(\vec{z})}{\partial\tau}.\end{gathered} \quad (19)$$

Полученные соотношения (17)–(19) являются покомпонентной записью доказываемого равенства (11). Лемма доказана.

3. Доказательство основных теорем. Для доказательства теоремы 1 перепишем представление (7) с учетом соотношения

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}_x\int\limits_{g(\vec{x})}^{1}\vec{G}(\vec{x},\tau)\,d\tau=\int\limits_{g(\vec{x})}^{1}\mathrm{rot}_x\vec{G}(\vec{x},\tau)\,d\tau-\\-[\mathrm{grad}_x g(\vec{x})\times\vec{G}(\vec{x},g(\vec{x}))]\end{gathered} \quad (20)$$

в виде

$$\begin{gathered}\vec{u}(\vec{x})=\mathrm{rot}_{\vec{x}}\int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1}\tau[\vec{u}(\tau\vec{x})\times\vec{x}]d\tau+\\+\int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1}\tau^2\vec{x}\,\mathrm{div}_{\vec{z}}\vec{u}(\tau\vec{x})\,d\tau+\\+\frac{h^2(\vec{x})}{|\vec{x}|^2}\vec{u}\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right)+\\+\left[\mathrm{grad}_{\vec{x}}\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\times\left[\vec{u}\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right)\times\vec{x}\right]\right]\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}.\end{gathered}$$

Применяя к последнему слагаемому формулу $\left[\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right]=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, получим

$$\begin{gathered}\vec{u}(\vec{x})=\mathrm{rot}_{\vec{x}}\int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1}\tau[\vec{u}(\tau\vec{x})\times\vec{x}]d\tau+\\+\int\limits_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1}\tau^2\vec{x}\,\mathrm{div}_{\vec{z}}\vec{u}(\tau\vec{x})\,d\tau+\frac{h^2(\vec{x})}{|\vec{x}|^2}\vec{u}\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right)+\\+\vec{u}\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right)\left(\mathrm{grad}_{\vec{x}}\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\cdot\vec{x}\right)\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}-\\-\vec{x}\left(\mathrm{grad}_{\vec{x}}\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\cdot\vec{u}\left(\frac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right)\right)\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}.\end{gathered}$$

Отметим, что при всех $\vec{x}\in\mathcal{O}_\Gamma$ справедливо соотношение

$$\left(\mathrm{grad}_{\vec{x}}\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\cdot\vec{x}\right)=-\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}. \quad (20)$$

Действительно,

$$\mathrm{grad}_{\vec{x}}\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}=-h(\vec{x})\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}+\frac{1}{|\vec{x}|}\mathrm{grad}_{\vec{x}}h(\vec{x}).$$

Поскольку функция $h(\vec{x})=R\left(\vec{x}/|\vec{x}|\right)=R(\vec{s})$ неизменна вдоль направления $\vec{x}$, то $\left(\mathrm{grad}_{\vec{x}}h(\vec{x})\cdot\vec{x}\right)=0$ и справедливо (20). Отметим также, что при всех $\vec{x}\in\mathcal{O}_\Gamma$ вектор $\mathrm{grad}_{\vec{x}}\dfrac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}$ коллинеарен вектору $\vec{n}\left(\dfrac{\vec{x}h(\vec{x})}{|\vec{x}|}\right)$, поскольку соотношение

$$\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}=k,\ \ k>0\ ,\ \vec{x}\in\mathcal{O}_\Gamma,$$

определяет семейство поверхностей, гомотетичных поверхности Г, определяемой равенством

$$\frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} = 1, \ \vec{x} \in \mathcal{O}_\Gamma,$$

при этом можно считать, что

$$\vec{n}(\vec{x}) = -\mathrm{grad}_{\vec{x}} \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \cdot \left| \mathrm{grad}_{\vec{x}} \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \right|^{-1}.$$

Поэтому окончательно получаем

$$\vec{u}(\vec{x}) = \mathrm{rot}_{\vec{x}} \int_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \tau[\vec{u}(\tau\vec{x}) \times \vec{x}]\, d\tau +$$

$$+ \int_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \tau^2 \vec{x}\, \mathrm{div}_{\vec{z}} \vec{u}(\tau\vec{x})\, d\tau -$$

$$-\vec{x}\left(\mathrm{grad}_{\vec{x}} \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \cdot \vec{n}(\vec{x}) \right) \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \cdot u_n \left(\frac{\vec{x} h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \right).$$

Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 перепишем представление (11) с учетом соотношения

$$\mathrm{grad}_x \int_{g(\vec{x})}^{1} \vec{G}(\vec{x}, \tau)\, d\tau = \int_{g(\vec{x})}^{1} \mathrm{grad}_x \vec{G}(\vec{x}, \tau)\, d\tau -$$

$$-\left(\vec{G}(\vec{x}, g(\vec{x})) \cdot \mathrm{grad}_x g(\vec{x}) \right)$$

в виде

$$\vec{u}(\vec{x}) = \int_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \mathrm{grad}_{\vec{x}} (\vec{u}(\tau\vec{x}) \cdot \vec{x})\, d\tau +$$

$$+ \int_{h(\vec{x})/|\vec{x}|}^{1} \tau[\mathrm{rot}_{\vec{z}} \vec{u}(\vec{z}_\tau(\vec{x})) \times \vec{x}]\, d\tau + \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \vec{u}\left(\frac{\vec{x} h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \right) +$$

$$+ \mathrm{grad} \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \cdot \left(\vec{x} \cdot \vec{u}\left(\frac{\vec{x} h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \right) \right) =$$

$$= \vec{u}\left(\frac{\vec{x} h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \right) \left(\mathrm{grad} \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \right) + \left[\vec{x} \times \left[\mathrm{grad} \frac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \times \vec{u}(\vec{x}) \right] \right].$$

Учитывая, что векторы $\mathrm{grad} \dfrac{h(\vec{x})}{|\vec{x}|}$ и $\vec{n}\left(\dfrac{\vec{x} h(\vec{x})}{|\vec{x}|} \right)$ коллинеарны при всех $\vec{x} \in \mathcal{O}_\Gamma$ и справедливо (20), заключаем, что теорема 2 справедлива.

Работа поддержана (частично поддержана) грантом (соглашение от 27 августа 2013 г. № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (код проекта 1727).

Список литературы

1. Соболев С.Л. Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб. 1938. Т. 4. № 3. С. 471–497.

2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 С.

3. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 С.

4. Решетняк Ю.Г. Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12. № 2. С.420–432.

5. Решетняк Ю.Г. Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21. № 6. С.108–116.

6. Буренков В.И. Интегральные представление С.Л. Соболева и формула Тейлора // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1973. Т. 131. С. 210–225.

7. Решетняк Ю.Г. Об интегральных представлениях дифференцируемых функций // В сб.: Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука,1980. С. 173–187.

8. Быховский Э.Б., Смирнов Н.В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа // Труды МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 5–36.

9. Вейль Г. Метод ортогональной проекции в теории потенциала // Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984.

10. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

11. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.

12. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

13. Girault V., Raviart P.-A. Finite Element Approximation of the Navier–Stokes Equations. Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1979. 207 p.

14. Калинин А.В. Некоторые оценки теории векторных полей // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1997. Вып. 1 (18). С. 32–38.

15. Калинин А.В., Жидков А.А., Тюхтина А.А. L_p-оценки векторных полей в неограниченных областях и некоторые задачи электромагнитной теории в неоднородных средах // Вестник Удмуртского университета. Сер. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 1. С. 3–14.

16. Калинин А.В., Калинкина А.А. L_p-оценки векторных полей // Изв. вузов. Сер. Математика. 2004. № 3. С. 26–35.

17. Калинин А.В., Морозов С.Ф. Стационарные задачи для системы уравнений Максвелла в неоднородных средах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1997. Вып. 1 (18). С. 24–31.

18. Kalinin A.V., Tyukhtina A.A., Zhidkov A.A. L_p-estimations of vector fields in unbounded domains // Applied Mathematics. 2012. Т. 3. №. 1. P. 45–51.

SOME REPRESENTATIONS OF VECTOR FIELDS IN EXTERNAL DOMAINS

A.V. Kalinin, V.E. Molodkina

Some representations of vector fields in external domains by differential operations of vector analysis are presented.

Keywords: representations of vector fields, differential operations of vector analysis.

References

1. Sobolev S.L. Ob odnoj teoreme funkcional'nogo analiza // Mat. sb. 1938. T. 4. № 3. S. 471–497.
2. Sobolev S.L. Nekotorye primeneniya funkcional'nogo analiza v matematicheskoj fizike. L.: Izd-vo LGU, 1950. 255 S.
3. Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skij S.M. Integral'nye predstavleniya funkcij i teoremy vlozheniya. M.: Nauka, 1975. 480 S.
4. Reshetnyak Yu.G. Nekotorye integral'nye predstavleniya differenciruemyh funkcij // Sib. mat. zhurn., 1971. T. 12. № 2. S.420–432.
5. Reshetnyak Yu.G. Integral'nye predstavleniya differenciruemyh funkcij v oblastyah s negladkoj granicej // Sib. mat. zhurn. 1980. T. 21. № 6. S.108–116.
6. Burenkov V.I. Integral'nye predstavlenie S.L. Soboleva i formula Tejlora // Tr. Mat. in-ta AN SSSR, 1973. T. 131. S. 210–225.
7. Reshetnyak Yu.G. Ob integral'nyh predstavleniyah differenciruemyh funkcij // Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi. Novosibirsk: Nauka,1980. S. 173–187.
8. Byhovskij Eh.B., Smirnov N.V. Ob ortogonal'nom razlozhenii prostranstva vektor-funkcij, kvadratichno summiruemyh po zadannoj oblasti, i operatorah vektornogo analiza // Trudy MIAN SSSR. 1960. T. 59. S. 5–36.
9. Vejl' G. Metod ortogonal'noj proekcii v teorii potenciala // Matematika. Teoreticheskaya fizika. M.: Nauka, 1984.
10. Dyuvo G., Lions Zh.-L. Neravenstva v mekhanike i fizike. M.: Nauka, 1980.
11. Ladyzhenskaya O.A. Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoj neszhimaemoj zhidkosti. M.: Fizmatgiz, 1961.
12. Temam R. Uravneniya Nav'e–Stoksa. Teoriya i chislennyj analiz. M.: Mir, 1981.
13. Girault V., Raviart P.-A. Finite Element Approximation of the Navier–Stokes Equations. Berlin – Heidelberg – New York: Springer–Verlag, 1979. 207 p.
14. Kalinin A.V. Nekotorye ocenki teorii vektornyh polej // Vestnik NNGU. Seriya Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie. 1997. Vyp. 1 (18). S. 32–38.
15. Kalinin A.V., Zhidkov A.A., Tyuhtina A.A. Lp-ocenki vektornyh polej v neogranichennyh oblastyah i nekotorye zadachi ehlektromagnitnoj teorii v neodnorodnyh sredah // Vestnik Udmurtskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki. 2012, № 1. S. 3–14.
16. Kalinin A.V., Kalinkina A.A. Lp-ocenki vektornyh polej // Izv. vuzov. Ser. Matematika. 2004, № 3. S. 26–35.
17. Kalinin A.V., Morozov S.F. Stacionarnye zadachi dlya sistemy uravnenij Maksvella v neodnorodnyh sredah // Vestnik NNGU. Seriya Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie. 1997. Vyp. 1 (18). S. 24–31.
18. Kalinin A.V., Tyukhtina A.A., Zhidkov A.A. Lp-estimations of vector fields in unbounded domains // Applied Mathematics. 2012. T. 3. №.1. P. 45–51.