УДК 517.958:537.812

# О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ



***Н.А. Денисова***

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

natasha.denisova@mail.ru

*Поступила в редакцию 05.03.2014*

Найдено новое семейство неоднородных профилей показателя преломления диэлектрических слоев конечной толщины, для которых амплитудный коэффициент отражения записывается в элементарных функциях.

*Ключевые слова:* уравнение Гельмгольца, показатель преломления, функции Йоста, задача рассеяния, коэффициент отражения.

Строгое решение задачи отражения электромагнитных волн от неоднородного слоя конечной толщины с вещественной диэлектрической проницаемостью известно для нескольких случаев [1]. В данной статье приведен еще один вариант точного решения задачи для монотонных профилей диэлектрической проницаемости. Для нахождения решения использовался аппарат операторов преобразований задачи рассеяния, обобщенный на случай задачи электромагнитного отражения от неоднородного слоя [2, 3].

## 1. Постановка задачи

Пусть три диэлектрические среды разделены плоскими границами $z=0$ и $z=z_s$. Диэлектрические проницаемости сред, занимающих полупространства $z<0$ и $z>z_s$, принимают значения $\varepsilon_a$ и $\varepsilon_s$ соответственно. В области $0<z<z_s$ неоднородная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z)=n^2(z)$ зависит только от $z$. Электромагнитная волна падает на слой из области $z<0$. При нормальном падении электрическое поле $E(z,k)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2E(z,k)}{dz^2}+k^2\varepsilon(z)E(z,k)=0, \qquad (1.1)$$

где $\varepsilon(z)=\overline{n}^2(z),\ k=\dfrac{\omega}{c}$ – волновое число,

$$\overline{n}(z)=\begin{cases} n_a,\ z<0,\\ n(z),\ 0\le z\le z_s,\\ n_s,\ z>z_s,\end{cases}\quad \varepsilon_a=n_a^2, \varepsilon_s=n_s^2.$$

Функция $n(z)\in C^1[0,z_s]$, а $\overline{n}(z)$ в точках $z=0, z=z_s$ может иметь разрывы первого рода. Амплитудный коэффициент отражения от слоя определяется через решение уравнения (1.1) с условиями Коши

$$E(z_s,k)=e^{ikn_sz_s},\ E'(z_s,k)=ikn_se^{ikn_sz_s}$$

с помощью формулы

$$r(k)=\frac{ikn_aE(0,k)-E'(0,k)}{ikn_aE(0,k)+E'(0,k)}\ . \qquad (1.2)$$

Введем в уравнении (1.1) новую переменную $x=x(z)$, где функция $x(z)\in C^1(R)$ и имеет вид

$$x(z)=\begin{cases} z, \quad z<0,\\ \displaystyle\int_0^z \frac{n(t)}{n(0)}dt, \quad 0\le z\le z_s,\\ \displaystyle\frac{n(z_s)}{n(0)}(z-z_s)+\int_0^{z_s}\frac{n(t)}{n(0)}dt, \quad z>z_s.\end{cases} \qquad (1.3)$$

Для функции $\psi(x,k)=E(z(x),k)$ уравнение примет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\tilde{n}^2(x)\psi+Q(x)\frac{d\psi}{dx}=0, \qquad (1.4)$$

где

$$\tilde{n}(x)=\begin{cases} n_a,\ x<0,\\ n(0),\ 0<x<d,\\ n_1,\ x>d,\end{cases}\quad n_1=\frac{n_sn(0)}{n(z_s)},\ d=x(z_s),$$

$$Q(x)=\begin{cases} \left.\dfrac{n(0)}{n^2(z)}\dfrac{dn(z)}{dz}\right|_{z=z(x)},\ 0<x<d,\\ 0,\ x<0,\ x>d.\end{cases} \qquad (1.5)$$

Так как

$$\psi(0,k)=E(0,k),\ \psi'(0,k)=E'(0,k),$$

коэффициент отражения для уравнения (1.4) совпадает с (1.2).

При значениях $0<x<d$ для уравнения (1.4) с двумя видами коэффициентов

$$Q^{(1)}(x) = -\frac{4n(0)\delta}{\operatorname{sh} 2(n(0)\delta x + \nu)}, \qquad (1.6)$$

$$Q^{(2)}(x) = \frac{4n(0)\delta}{\operatorname{sh} 2(n(0)\delta x + \nu)} \qquad (1.7)$$

известны общие решения уравнения (1.4)

$$\psi^{(1)}(x,k) = A(1 - \frac{ik}{\delta}\operatorname{th}(n(0)\delta x + \nu))e^{ikn(0)x} + \\ + B(1 + \frac{ik}{\delta}\operatorname{th}(n(0)\delta x + \nu))e^{-ikn(0)x}, \qquad (1.8)$$

$$\psi^{(2)}(x,k) = A(1 - \frac{ik}{\delta}\operatorname{cth}(n(0)\delta x + \nu))e^{ikn(0)x} + \\ + B(1 + \frac{ik}{\delta}\operatorname{cth}(n(0)\delta x + \nu))e^{-ikn(0)x}. \qquad (1.9)$$

Здесь $A, B$ – произвольные постоянные, $\delta, \nu$ – произвольные положительные параметры.

Цель работы – получить коэффициенты отражения и показатели преломления внутри слоя для уравнения (1.1), соответствующие функциям (1.6), (1.7).

## 2. Функции Йоста

Обозначим через $\psi_{1,2}(x,k)$ и $\varphi_{1,2}(x,k)$ решения уравнения (1.4) (функции Йоста), имеющие заданный вид, соответственно, при $x > d$ и $x < 0$:

$$\psi_{1,2}(x,k) = e^{\mp ikn_1 x},\ x > d, \qquad (2.1)$$

$$\varphi_{1,2}(x,k) = e^{\mp ikn_a x},\ x < 0. \qquad (2.2)$$

Аналогичные решения усеченного $(Q(x) \equiv 0)$ уравнения (1.4) обозначим $\psi^{(0)}_{1,2}(x,k)$, $\varphi^{(0)}_{1,2}(x,k)$. Для усеченного уравнения функции Йоста находятся в явном виде. В частности, при значениях $0 < x < d$ для функции $\varphi^{(0)}_1(x,k)$ получим выражение

$$\varphi^{(0)}_1(x,k) = a_{12}(k)e^{-ikn_a x} - b_{12}(k)e^{ikn_a x}, \qquad (2.3)$$

где $a_{12} = \dfrac{n_a + n(0)}{2n(0)}$, $\quad b_{12} = \dfrac{n_a - n(0)}{2n(0)}$.

В интервале $0 < x < d$ для решений Йоста $\varphi_{1,2}(x,k)$ справедлива следующая теорема.

**Теорема**. Если $\operatorname{Im} k = 0$ и $0 < x < d$, решения Йоста $\varphi_{1,2}(x,k)$ представимы в виде

$$\varphi_1(x,k) = \varphi^{(0)}_1(x,k) + \\ + \int_{-x}^{x} B(x,y)\frac{d}{dy}(-b_{1,2}e^{ikn(0)y} + a_{1,2}e^{-ikn(0)y})dy, \qquad (2.4)$$

$$\varphi_2(x,k) = \varphi^*_1(x,k),$$

где $B(x,y)$ – вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению

$$B(x,y) = -1 + \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+y}{2}} Q(\xi)d\xi\right) - \\ - \int_0^{\frac{x-y}{2}} d\eta \int_0^{\frac{x+y}{2}} Q(\xi+\eta)B_x(\xi+\eta, \xi-\eta)d\xi, \quad |y| < x. \qquad (2.5)$$

Интегральный оператор $\mathrm{I} + \mathrm{B}$ определен формулой

$$(\mathrm{I} + \mathrm{B})f = f(x) + \int_{-x}^{x} B(x,y)f(y)dy,$$

$$B(x,x) = -1 + \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x Q(\xi)d\xi\right). \qquad (2.6)$$

Отсюда

$$\int_0^x Q(\xi)d\xi = \ln[1 + B(x,x)]^{-2}. \qquad (2.7)$$

С другой стороны, используя (1.3), (1.5), интеграл в (2.7) можно вычислить:

$$\int_0^x Q(\xi)d\xi = \int_0^{z(x)} \frac{n(0)}{n^2(z)}\frac{dn(z)}{dz}x'(z)dz = \\ = \ln\frac{n(z(x))}{n(0)}. \qquad (2.8)$$

Из формул (2.7), (2.8) следует, что

$$n(z) = n(0)[1 + B(x(z), x(z))]^{-2}. \qquad (2.9)$$

Дифференцируя (1.3) по $z$ и учитывая (2.9), получим дифференциальное уравнение

$$x'(z) = [1 + B(x,x)]^{-2},\ x(0) = 0,$$

интегрируя которое найдем функцию

$$z = z(x) = \int_0^x [1 + B(t,t)]^2 dt. \qquad (2.10)$$

Соотношения (2.9), (2.10) можно использовать для параметрического определения функции показателя преломления

$$\begin{cases} n = n(0)[1 + B(x,x)]^{-2}, \\ z = \int_0^x [1 + B(t,t)]^2 dt. \end{cases} \qquad (2.11)$$

## 3. Решение задачи

Для решения задачи используются формулы (2.6), (2.11). Подставляя функцию (1.6) в интеграл (2.6), найдем

$$B(x,x) = \frac{\operatorname{sh}(n(0)\delta x)}{\operatorname{sh}\nu \operatorname{ch}(n(0)\delta x + \nu)}. \qquad (3.1)$$

Используя (3.1), по формулам (2.11) получим

$$\begin{cases} n^{(1)} = n(0)\operatorname{th}^2\nu \operatorname{cth}^2(n(0)\delta x + \nu), \\ z = \operatorname{cth}^2\nu\left(x - \dfrac{\operatorname{th}(n(0)\delta x + \nu)}{n(0)\delta} + \dfrac{\operatorname{th}\nu}{n(0)\delta}\right). \end{cases} \qquad (3.2)$$

Чтобы определить амплитудный коэффициент отражения влево для уравнения (1.4) с показателем преломления (3.2), следует использовать решение Йоста $\psi_2(x,k)$ при $x<0$ и $x>d$. Являясь решением уравнения (1.4), эта функция при $x<0$ имеет вид

$$\psi_2(x,k) = C_1\exp(ikn_a x) + C_2\exp(-ikn_a x), \quad x<0. \tag{3.3}$$

Согласно условию (2.1)

$$\psi_2(x,k) = \exp(ikn_1 x), \quad x>d. \tag{3.4}$$

Так как функция $\psi_2(x,k)$ непрерывно дифференцируема по переменной $x$ при всех $x\in R$, то из условий непрерывности самой функции, ее производной в точках $x=0, x=d$, используя равенства (1.8), (3.3), (3.4), можно найти коэффициенты $A, B, C_1, C_2$. Отношение

$$r(k) = C_2/C_1$$

будет искомым коэффициентом отражения. Этот амплитудный коэффициент отражения для показателя преломления (3.2) имеет вид

$$r^{(1)}(k) = \frac{R_{12}^{(1)}(k) + R_{23}^{(1)}(k)\alpha_1^{(1)}(k)}{1 + R_{12}^{(1)}(k)R_{23}^{(1)}(k)\alpha_2^{(1)}(k)}. \tag{3.5}$$

Чтобы компактно записать все входящие в формулу (3.5) функции, введем

$$f(k,\delta,y) = \operatorname{ch}2y - \frac{ik}{\delta}\operatorname{sh}2y. \tag{3.6}$$

С учетом обозначения (3.6) функция $R_{12}^{(1)}(k)$ примет вид

$$R_{12}^{(1)}(k) = \frac{r_{12}f(k,\delta,\nu)+1}{f(k,\delta,\nu)+r_{12}}. \tag{3.7}$$

Это амплитудный коэффициент отражения от неоднородного полупространства с показателем преломления (3.2)

$$\bar{n}(z) = \begin{cases} n_a, & z<0, \\ n^{(1)}(z), & z\ge 0, \end{cases}$$

где $r_{12} = \dfrac{n_a - n(0)}{n_a + n(0)}$. Коэффициент

$$R_{23}^{(1)}(k) = \frac{r_{23}f(k,\delta,z_0)-1}{f^*(k,\delta,z_0)-r_{23}}e^{2ikn(0)d}, \tag{3.8}$$

где $r_{23} = \dfrac{n(z_s)-n_s}{n(z_s)+n_s} = \dfrac{n(0)-n_1}{n(0)+n_1}$, $z_0 = n(0)\delta d + \nu$, знак * означает комплексное сопряжение. Функции $\alpha_1^{(1)}(k)$ и $\alpha_2^{(1)}(k)$ определяют фазовые сдвиги

$$\alpha_1^{(1)}(k) = \frac{f^*(k,\delta,\nu)+r_{12}}{f(k,\delta,\nu)+r_{12}},$$

$$\alpha_2^{(1)}(k) = \frac{r_{12}f^*(k,\delta,\nu)+1}{r_{12}f(k,\delta,\nu)+1}.$$

Аналогичные формулы могут быть получены для функции (1.7). В результате несложных преобразований найдем показатель преломления:

$$\begin{cases} n^{(2)} = n(0)\operatorname{cth}^2\nu\operatorname{th}^2(n(0)\delta x+\nu), 0\le x\le d, \\ z = \operatorname{th}^2\nu\left(x - \dfrac{\operatorname{cth}(n(0)\delta x+\nu)}{n(0)\delta} + \dfrac{\operatorname{cth}\nu}{n(0)\delta}\right) \end{cases} \tag{3.9}$$

внутри слоя толщины

$$z_s = \operatorname{th}^2\nu\left(d - \frac{\operatorname{cth}z_0}{n(0)\delta} + \frac{\operatorname{cth}\nu}{n(0)\delta}\right),$$

$$n^{(2)}(z_s) = n(0)\operatorname{cth}^2\nu\operatorname{th}^2 z_0.$$

Коэффициент отражения от неоднородного слоя с показателем преломления, задаваемым параметрически соотношениями (3.8), представляется в виде (3.5), но все функции имеют верхний индекс 2 и определяются формулами

$$R_{12}^{(2)}(k) = \frac{r_{12}f(k,\delta,\nu)-1}{f(k,\delta,\nu)-r_{12}},$$

$$R_{23}^{(2)}(k) = \frac{r_{23}f(k,\delta,z_0)+1}{f^*(k,\delta,z_0)+r_{23}}e^{2ikn(0)d},$$

$$\alpha_1^{(2)}(k) = \frac{f^*(k,\delta,\nu)-r_{12}}{f(k,\delta,\nu)-r_{12}},$$

$$\alpha_2^{(2)}(k) = \frac{r_{12}f^*(k,\delta,\nu)-1}{r_{12}f(k,\delta,\nu)-1}.$$

Таким образом, использование уравнения (1.4) и формул (2.6), (2.11) позволило получить новое семейство показателей преломления неоднородного слоя и найти соответствующие коэффициенты отражения.

*Список литературы*

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.

2. Денисова Н.А., Степанова С.А. // ЖВМиМФ. 1999. Т. 39. № 7. С.1180–1187.

3. Денисова Н.А., Резвов А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. LV. № 5. С. 369–380.

4. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. Думка, 1977. 329 с.

# ON EXACT SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF REFLECTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES FROM AN INHOMOGENEOUS LAYER

***N.A. Denisova***

A new family of inhomogeneous refractive index profiles of finite-thickness dielectric layers has been obtained, for which the amplitude reflection coefficient is written in terms of elementary functions.

*Keywords:* Helmholtz equation, refractive index, Jost functions, scattering problem, reflection coefficient.

*References*

1. Brekhovskih L.M. Volny v sloistyh sredah. M.: Nauka, 1973. 343 s.
2. Denisova N.A., Stepanova S.A. // ZhVMiMF. 1999. T. 39. № 7. S.1180–1187.
3. Denisova N.A., Rezvov A.V. // Izv. vuzov. Radiofizika. 2012. T. LV. №.5. S. 369–380.
4. Marchenko V.A. Operatory Shturma–Liuvillya i ih prilozheniya. Kiev: Nauk. Dumka, 1977. 329 s.