МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.925+518.61

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ПРИ РЕШЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов

НИИ прикладной математики и кибернетики
Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

olga.antonovsckaja@yandex.ru

Поступила в редакцию 03.02.2014

Решается вопрос о выборе параметров квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей условию ограниченности ее первой производной (первой разности) на заданном сечении.

Ключевые слова: математическая модель, непрерывная (дискретная) динамическая система, равновесное состояние, устойчивость, метод функций Ляпунова.

Введение

Метод функций Ляпунова [1], названный Н.Г. Четаевым прямым методом Ляпунова в теории устойчивости [2], находит все более широкие приложения к анализу разнообразных свойств математических моделей как непрерывных, так и дискретных динамических систем самой различной природы [3]. В то же время, продолжается развитие самого метода как математической теории. При этом основной является проблема расширения областей приложения метода функций Ляпунова, возникающая при решении конкретных задач [4].

Важное место в прямом методе Ляпунова занимает построение подходящей функции Ляпунова [1–3]. При определении устойчивости и получении качественных характеристик нелинейных непрерывных (дискретных) динамических систем, допускающих линеаризацию вблизи равновесных состояний, могут быть использованы функции Ляпунова квадратичного вида [3, с.120–132; 4, с. 33–45], построенные для соответствующих линеаризованных систем. При этом ставится не только задача построения квадратичной функции Ляпунова по ее первой производной (разности) [4–6], но и вопрос о построении квадратичных функций Ляпунова с некоторыми заданными свойствами, которые определяются особенностями исходной задачи, а именно: построение квадратичной функции Ляпунова, матрица которой имеет заданный спектр [7], построение квадратичной функции Ляпунова с матрицей, у которой отношение наибольшего и наименьшего собственных чисел минимально [8, 9], и т.д.

При решении прикладных динамических задач интерес представляет изучение нелокальных свойств траекторий динамических систем, а следовательно, возникает задача выделения в пространстве состояний областей с подобным, в соответствии с определенным признаком, поведением траекторий. В частности, представляет интерес задача построения областей притяжения, которые траектория в дальнейшем не покидает. Для решения этой задачи также может быть использован метод функций Ляпунова [4]. В приложениях становится важным учет не только качественных, но и количественных характеристик системы, и поэтому возникает необходимость использования ограничений на свойства функций Ляпунова, позволяющих получать нужные оценки с заданной точностью [4, с. 94; 10]. В частности, такая ситуация возникает при численно-аналитическом способе оценивания областей притяжения асимптотически устойчивых множеств [3, с. 45–47; 4, с. 89–90] с помощью определения знака первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова $V(x)$ на заданной поверхности уровня $V(x)=V_0$, а также в задаче нахождения момента окончания переходного процесса в системе, когда не только фиксируется момент попадания траектории в заданную окрестность равновесного состояния, но и гарантируется, что в дальнейшем она этой окрестности не покинет [11]. Известно, что в математических моделях реальных систем рассматриваемая окрестность может быть неограниченным множеством фазового пространства системы [11]. В этом случае существенным является такой выбор параметров квадратичной функции Ляпунова, при котором выполнение неравенства $\dot{V}(x) < 0$ ($\Delta V(x) < 0$) обеспечивается с заданным (в том числе и максимальным [12, 13]) запасом.

В работе [14] обсуждается возможность такого выбора параметров квадратичной функции Ляпунова $V(x)$, что выполнение неравенства $\dot{V}(x) < 0$ ($\Delta V(x) < 0$) обеспечивается с заданным (не обязательно максимальным) запасом для случая $x \in R^n$, $n \in N$, а также приводится доказательство того, что при $n = 2$ указанный выбор параметров $V(x)$ может быть осуществлен с помощью явных соотношений. В настоящей работе уточняется методика выбора параметров квадратичной функции Ляпунова $V(x)$ с помощью явных соотношений для случая $n = 2$ и предлагается методика выбора параметров при $n > 2$.

Построение квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей ограничению на ее первую производную, для линейных дифференциальных систем

Согласно [14], для непрерывных динамических систем имеет место

Теорема. Пусть для системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \quad (i = 1,2,...,n) \tag{1}$$

корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, имеют отрицательные действительные части. Тогда положительно определенная квадратичная форма

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j$$

$$(K_{ij} = K_{ji},\ i, j = 1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

является функцией Ляпунова, для которой максимальное значение первой производной

$$\dot{V}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} (\dot{x}_i x_j + x_i \dot{x}_j) \tag{3}$$

на заданной поверхности уровня $V(x_1, x_2, ..., x_n) = V_0$ равно δV_0 (где $2\max_i\{\operatorname{Re}\lambda_i\} \le \delta < 0$), если параметры функции Ляпунова удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \delta K_{11} & A_{12} - \delta K_{12} & \ldots & A_{1n} - \delta K_{1n} \\ A_{12} - \delta K_{12} & A_{22} - \delta K_{22} & \ldots & A_{2n} - \delta K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} - \delta K_{1n} & A_{2n} - \delta K_{2n} & \ldots & A_{nn} - \delta K_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

в котором

$$A_{km} = \sum_{i=1}^{n} (K_{ik} a_{im} + K_{ik} a_{im}),\ k, m = 1,2,...,n. \tag{5}$$

Для построения квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей ограничению $\max_{V=V_0}(\dot{V}/V) = \delta$ на ее первую производную, достаточно воспользоваться данными приведенной теоремы. Действительно:

1. Предположим, что все корни характеристического уравнения действительны и различны: $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$. В этом случае всегда существует линейное невырожденное преобразование координат [1, с. 121]

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \xi_i \quad (i = 1,2,...,n), \tag{6}$$

приводящее систему (1) к каноническому виду

$$\dot{\xi}_i = \lambda_i \xi_i \qquad (i = 1,2,...,n), \tag{7}$$

(столбцы матрицы B с элементами b_{ij} являются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$). При этом квадратичные формы $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\dot{V}(x_1, x_2, ..., x_n)$ перейдут соответственно в квадратичные формы $W(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ и $\dot{W}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, причем, согласно [13], $\max_{V=V_0}(\dot{V}/V) = \max_{W=W_0}(\dot{W}/W)$, $\min_{V=V_0}(\dot{V}/V) = \min_{W=W_0}(\dot{W}/W)$, то есть можно строить квадратичную функцию Ляпунова для канонической системы, для которой уравнения (5) суть

$$A_{km} = (\lambda_k + \lambda_m) K_{km}, \qquad k, m = 1,2,...,n, \tag{8}$$

а уравнение (4) имеет вид

$$\begin{vmatrix} (2\lambda_1 - \delta)K_{11} & (\lambda_1 + \lambda_2 - \delta)K_{12} & \ldots & (\lambda_1 + \lambda_n - \delta)K_{1n} \\ (\lambda_1 + \lambda_2 - \delta)K_{12} & (2\lambda_2 - \delta)K_{22} & \ldots & (\lambda_2 + \lambda_n - \delta)K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\lambda_1 + \lambda_n - \delta)K_{1n} & (\lambda_2 + \lambda_n - \delta)K_{2n} & \ldots & (2\lambda_n - \delta)K_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

Заметим, что при $n=2$, ввиду малой размерности, получается аналитическое решение задачи. Например, в случае действительных различных корней характеристического уравнения для канонической системы дифференциальных уравнений

$$\begin{vmatrix} (2\lambda_1-\delta)K_{11} & (\lambda_1+\lambda_2-\delta)K_{12} \\ (\lambda_1+\lambda_2-\delta)K_{12} & (2\lambda_2-\delta)K_{22} \end{vmatrix}=0, \quad (10)$$

а значит,

$$K_{12}^2=(1-R(\delta))K_{11}K_{22},$$

$$R(\delta)=(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_1+\lambda_2-\delta)^{-2} \ \ (2\lambda_2\le\delta\le 0). \quad (11)$$

При $K_{11}=1$ по заданному $K_{22}>0$ можно определить два значения K_{12} для функции с $\max\limits_{V=V_0}(\dot V/V)=\delta$. Можно также считать, что заданы $K_{11}=K_{22}>0$, тогда в силу (11) находятся два значения K_{12} для функции с $\max\limits_{V=V_0}(\dot V/V)=\delta$. При этом найденным параметрам функции Ляпунова будут отвечать два корня уравнения вида (10), соответствующие наибольшему и наименьшему значениям первой производной на линии уровня, причем $\delta_1+\delta_2=2(\lambda_1+\lambda_2)$, и если $\delta_{\min}=\delta$, то $\delta_{\max}=2(\lambda_1+\lambda_2)-\delta$.

При $n=3$ решение задачи о нахождении параметров квадратичной функции Ляпунова по уравнению (9) с заданным δ в общем случае становится намного более сложным [14]. В этом случае функцию $V(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ можно искать в виде

$$V(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=K_{11}\xi_1^2+K_{22}\xi_2^2+ \\ +2K_{23}\xi_2\xi_3+K_{33}\xi_3^2. \quad (12)$$

Уравнение вида (9) принимает вид (13), и, следовательно, для получения квадратичной функции Ляпунова с $\max\limits_{V=V_0}(\dot V/V)=\delta$ достаточно задать некоторое значение $K_{11}>0$ и по нему выбрать K_{22},K_{23},K_{33} в соответствии с условиями

$$K_{23}^2=(1-R(\delta))K_{33}K_{22}, \quad (14)$$

$$R(\delta)=(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_2+\lambda_3-\delta)^{-2} \ \ (2\lambda_3\le\delta\le 0),$$

как в случае $n=2$.

В общем случае при $n>2$ квадратичную функцию Ляпунова с $\max\limits_{V=V_0}(\dot V/V)=\delta$ для канонической системы можно искать в виде

$$V(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}K_{ij}\xi_i\xi_j + \\ +K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2+2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n+K_{nn}\xi_n^2 \\ (K_{ij}=K_{ji},\ i,j=1,2,\dots,n), \quad (15)$$

где

$$K_{n-1,n}^2=(1-R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn}, \quad (16)$$

$$R(\delta)=(\lambda_{n-1}-\lambda_n)^2(\lambda_{n-1}+\lambda_n-\delta)^{-2} \\ (2\lambda_{3n}\le\delta\le 0).$$

В частности, условию (16) будет удовлетворять функция

$$V(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=\sum_{i=1}^{n-2}K_{ii}\xi_i^2+ \\ +K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2+2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n+K_{nn}\xi_n^2. \quad (17)$$

2. Связь между параметрами $K_{11},K_{12},\ \dots,K_{nn}$ в случае существования комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения является более сложной. Так, при $n=2$, когда $\lambda_{1,2}=\mu\pm i\nu$ и система приведена к каноническому виду

$$\dot\xi_1=\mu\xi_1-\nu\xi_2, \qquad \dot\xi_2=\nu\xi_1+\mu\xi_2, \quad (18)$$

параметры функции Ляпунова, удовлетворяющей ограничению $\max\limits_{V=V_0}(\dot V/V)=\delta$, связаны соотношением

$$(K_{11}+K_{22})^2=C(\delta)(K_{11}K_{22}-K_{12}^2), \quad (19)$$

где

$$C(\delta)=(2\mu-\delta)^2\nu^{-2}+4 \ \ (2\mu\le\delta<0). \quad (20)$$

При $K_{11}=K_{22}>0$ для нахождения значений K_{12} получаем соотношение

$$((2\mu-\delta)^2\nu^{-2}+4)K_{12}^2=(2\mu-\delta)^2\nu^{-2}K_{22}^2. \quad (21)$$

При $n=3$ квадратичную функцию Ляпунова, удовлетворяющую заданному ограничению, можно искать в виде (12), где

$$(K_{33}+K_{22})^2=C(\delta)(K_{22}K_{33}-K_{23}^2), \quad (22)$$

а $\lambda_{2,3}=\mu\pm i\nu$.

При $n>2$ квадратичную функцию Ляпунова с $\max\limits_{V=V_0}(\dot V/V)=\delta$ для канонической системы целесообразно искать в виде

$$V(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}K_{ij}\xi_i\xi_j + \\ +K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2+2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n+K_{nn}\xi_n^2 \quad (23)$$

$$\begin{vmatrix} (2\lambda_1-\delta)K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & (2\lambda_2-\delta)K_{22} & (\lambda_2+\lambda_3-\delta)K_{23} \\ 0 & (\lambda_2+\lambda_3-\delta)K_{23} & (2\lambda_3-\delta)K_{33} \end{vmatrix}=0 \quad (13)$$

$$(K_{ij} = K_{ji},\ i,j = 1,2,\ldots,n),$$

где

$$(K_{nn} + K_{n-1,n-1})^2 = C(\delta)(K_{n-1,n-1}K_{nn} - K_{n-1,n}^2), \quad (24)$$

а $\lambda_{n-1,n} = \mu \pm i\nu$, и в виде (17), где $K_{i-1,i-1} = K_{ii}$, если переменные ξ_{i-1}, ξ_i соответствуют паре комплексно-сопряженных корней, для которых $\mathrm{Re}\,\lambda_{i-1,i} < \mathrm{Re}\,\lambda_{n-1,n}$.

Построение квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей ограничению на ее первую разность, для линейных точечных отображений

Согласно [14], для дискретных динамических систем имеет место следующая

Теорема. Пусть для точечного отображения вида

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \quad (i = 1,2,...,n) \qquad (25)$$

корни $z_1, z_2, ..., z_n$ характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, лежат внутри круга единичного радиуса. Тогда положительно определенная квадратичная форма

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j$$

$$(K_{ij} = K_{ji},\ i,j = 1,2,\ldots,n) \qquad (26)$$

является функцией Ляпунова, для которой максимальное значение первой разности

$$\Delta V(x_1, x_2, ..., x_n) = \\ = V(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) - V(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (27)$$

на заданной поверхности уровня $V(x_1, x_2, ..., x_n) = V_0$ равно δV_0 (где $\max_i\{|z_i|^2\} - 1 \le \delta < 0$), если параметры функции Ляпунова удовлетворяют уравнению (4), в котором

$$A_{km} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij} a_{ik} a_{im} - K_{km}, \quad k,m = 1,2,...,n. \quad (28)$$

Данными приведенной теоремы можно воспользоваться для построения квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей ограничению $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V / V) = \delta$ на ее первую разность. При этом, как и для непрерывных систем, следует рассмотреть случаи действительных и комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения.

1. Предположим, что все корни характеристического уравнения действительны и различны: $z_1 < z_2 < ... < z_n$. В этом случае всегда существует линейное невырожденное преобразование координат [15]

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \xi_i \quad (i = 1,2,...,n), \qquad (29)$$

приводящее систему (26) к каноническому виду

$$\bar{\xi}_i = z_i \xi_i \qquad (i = 1,2,...,n), \qquad (30)$$

и поэтому квадратичные формы $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\Delta V(x_1, x_2, ..., x_n)$ перейдут соответственно в квадратичные формы $W(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ и $\Delta W(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, причем, согласно [13], $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V / V) = \max\limits_{W=W_0}(\Delta W / W)$, $\min\limits_{V=V_0}(\Delta V / V) = \min\limits_{W=W_0}(\Delta W / W)$. Это позволяет построить квадратичную функцию Ляпунова для канонической системы, для которой уравнения (28) суть

$$A_{km} = (z_k z_m - 1)K_{km}, \qquad k,m = 1,2,...,n, \quad (31)$$

а уравнение (4) имеет вид (32).

При $n = 2$ получается аналитическое решение задачи. Так, в случае действительных различных корней характеристического уравнения для канонической системы дифференциальных уравнений

$$\begin{vmatrix} (z_1^2 - 1 - \delta)K_{11} & (z_1 z_2 - 1 - \delta)K_{12} \\ (z_1 z_2 - 1 - \delta)K_{12} & (z_2^2 - 1 - \delta)K_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (33)$$

а значит,

$$K_{12}^2 = (1 - R(\delta))K_{11}K_{22},$$
$$R(\delta) = (1 + \delta)(z_1 - z_2)^2 (z_1 z_2 - 1 - \delta)^{-2}$$
$$(z_2^2 - 1 \le \delta \le 0). \qquad (34)$$

Считая $K_{11} = 1$, по заданному $K_{22} > 0$ можно определить два значения K_{12} для функции с $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V / V) = \delta$. Можно также считать, что заданы $K_{11} = K_{22} > 0$, тогда в силу (11) находятся два значения K_{12} для функции с $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V / V) = \delta$. При этом найденным параметрам функции Ляпунова будут отвечать два корня уравнения вида (34), соответствующие наибольшему и наи-

$$\begin{vmatrix} (z_1^2 - 1 - \delta)K_{11} & (z_1 z_2 - 1 - \delta)K_{12} & ... & (z_1 z_n - 1 - \delta)K_{1n} \\ (z_1 z_2 - 1 - \delta)K_{12} & (z_2^2 - 1 - \delta)K_{22} & ... & (z_2 z_n - 1 - \delta)K_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ (z_1 z_n - 1 - \delta)K_{1n} & (z_2 z_n - 1 - \delta)K_{2n} & ... & (z_n^2 - 1 - \delta)K_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad (32)$$

$$\begin{vmatrix} (z_1^2-1-\delta)K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & (z_2^2-1-\delta)K_{22} & (z_2z_3-1-\delta)K_{23} \\ 0 & (z_2z_3-1-\delta)K_{23} & (z_3^2-1-\delta)K_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (35)$$

меньшему значениям первой производной на заданной линии уровня, причем $\delta_1+\delta_2 = = z_1^2+z_2^2-2$. Очевидно, что если $\delta_{\min}=\delta$, то $\delta_{\max} = z_1^2+z_2^2-2-\delta$.

При $n=3$ решение задачи о нахождении параметров квадратичной функции Ляпунова по уравнению (33) с заданным δ в общем случае становится намного более сложным [14]. Однако функцию $V(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ можно по-прежнему искать в виде (12). Уравнение вида (33) в этом случае принимает вид (35), а значит, для получения квадратичной функции Ляпунова с $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V/V)=\delta$ достаточно задать любое значение $K_{11}>0$ и выбрать по нему соответствующие K_{22}, K_{23}, K_{33}, удовлетворяющие условиям

$$K_{23}^2 = (1-R(\delta))K_{33}K_{22},$$
$$R(\delta) = (1+\delta)(z_3-z_2)^2(z_3z_2-1-\delta)^{-2}$$
$$(z_3^2-1\le\delta\le 0). \qquad (36)$$

В общем случае $n>2$ квадратичную функцию Ляпунова с $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V/V)=\delta$ для канонической системы можно искать в виде (15), где

$$K_{n-1,n}^2 = (1-R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn},$$
$$R(\delta) = (1+\delta)(z_n-z_{n-1})^2(z_nz_{n-1}-1-\delta)^{-2} \quad (37)$$
$$(z_n^2-1\le\delta\le 0).$$

В частности, этому условию будет удовлетворять функция (17).

2. Связь между параметрами $K_{11}, K_{12}, ..., K_{nn}$ в случае существования комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения является более сложной. Так, при $n=2$, когда $z_{1,2}=\mu\pm i\nu$ и точечное отображение приведено к каноническому виду

$$\overline{\xi}_1 = \mu\xi_1-\nu\xi_2, \qquad \overline{\xi}_2 = \nu\xi_1+\mu\xi_2, \qquad (38)$$

параметры функции Ляпунова, удовлетворяющей ограничению $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V/V)=\delta$, связаны соотношением (19), где

$$C(\delta) = (\mu^2+\nu^2-1-\delta)(1+\delta)^{-1}\nu^{-2}+4$$
$$(\mu^2+\nu^2-1\le\delta<0). \qquad (39)$$

При $K_{11}=K_{22}>0$ для нахождения значений K_{12} получаем соотношение

$$((\mu^2+\nu^2-1-\delta)(1+\delta)^{-1}\nu^{-2}+4)K_{12}^2 =$$
$$= (\mu^2+\nu^2-1-\delta)(1+\delta)^{-1}\nu^{-2}K_{22}^2. \qquad (40)$$

При $n=3$ квадратичную функцию Ляпунова, удовлетворяющую заданному ограничению, можно искать в виде (12), (39), где $z_{2,3}=\mu\pm i\nu$.

В общем случае $n>2$ квадратичную функцию Ляпунова с $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V/V)=\delta$ для канонической системы можно искать в виде (15), (39), где $z_{n-1,n}=\mu\pm i\nu$, и в виде (17), где $K_{i-1,i-1}=K_{ii}$, если переменные ξ_{i-1},ξ_i соответствуют паре комплексно-сопряженных корней, для которых $|z_{i-1,i}|<|z_{n-1,n}|$.

Заключение

Результаты, полученные в настоящей работе, позволяют осуществлять выбор параметров квадратичной функции Ляпунова для непрерывных (дискретных) динамических систем произвольной размерности при учете ограничения величины ее первой производной (первой разности) и могут быть использованы при построении условно-экстремальной функции Ляпунова [16].

Список литературы

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Изд-во техн.-теор. лит., 1950. 472 с.
2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. 3-е изд. М.: Физматгиз, 1966. 207 с.
3. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
4. Косякин А.А., Шамриков Б.М. Колебания в цифровых автоматических системах. М.: Наука, 1983. 334 с.
5. Smith R.A. // Journal of Differential Equations. 1966. V. 2. № 2. P. 208–217.
6. Muller P.S. // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. № 3. P. 682–687.
7. Сарыбеков Р.А. // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18. № 5. С. 1159–1167.
8. Хусаинов Д.Я., Юнькова Е.А. // Укр. мат. журн. 1984. Т. 36. № 4. С. 528–531.
9. Комаров Ю.А., Хусаинов Д.Я. // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35. № 6. С. 750–753.
10. Пропой А.И. // Автоматика и телемеханика. 2000. № 4. С. 51–60.

11. Антоновская О.Г., Горюнов В.И., Лобашов Н.И. // Динамика систем. Управление и оптимизация. Горький: Изд-во ГГУ, 1989. С. 59–72.
12. Антоновская О.Г. // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1562–1563.
13. Антоновская О.Г. // Изв. вузов. Математика. 2004. № 2(501). С. 19–23.
14. Антоновская О.Г. // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1220–1224.
15. Неймарк Ю.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1. № 1. С.41–66.
16. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2006. Вып. 3(32). С. 110–117.

ON THE CHOICE OF PARAMETERS OF A QUADRATIC LYAPUNOV FUNCTION FOR SOLVING DYNAMIC PROBLEMS

O.G. Antonovskaya, V.I. Goryunov

The article considers the choice of parameters of a quadratic Lyapunov function satisfying the boundedness condition of its first derivative (difference) for a given section.

Keywords: mathematical model, continuous (discrete) dynamical system, equilibrium state, stability, Lyapunov function method.

References

1. Lyapunov A.M. Obshchaya zadacha ob ustojchivosti dvizheniya. M.-L.: Izd-vo tekhn.-teor. lit., 1950. 472 s.
2. Chetaev N.G. Ustojchivost' dvizheniya. 3-e izd. M.: Fizmatgiz, 1966. 207 s.
3. Barbashin E.A. Funkcii Lyapunova. M.: Nauka, 1970. 240 s.
4. Kosyakin A.A., Shamrikov B.M. Kolebaniya v cifrovyh avtomaticheskih sistemah. M.: Nauka, 1983. 334 s.
5. Smith R.A. // Journal of Differential Equations. 1966. V. 2. № 2. P. 208–217.
6. Muller P.S. // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. № 3. P. 682–687.
7. Sarybekov R.A. // Sib. mat. zhurn. 1977. T. 18. № 5. S. 1159–1167.
8. Husainov D.Ya., Yun'kova E.A. // Ukr. mat. zhurn. 1984. T. 36. № 4. S. 528–531.
9. Komarov Yu.A., Husainov D.Ya. // Ukr. mat. zhurn. 1983. T. 35. № 6. S. 750–753.
10. Propoj A.I. // Avtomatika i telemekhanika. 2000. № 4. S. 51–60.
11. Antonovskaya O.G., Goryunov V.I., Lobashov N.I. // Dinamika sistem. Upravlenie i optimizaciya. Gor'kij: Izd-vo GGU, 1989. S. 59–72.
12. Antonovskaya O.G. // Differencial'nye uravneniya. 2003. T. 39. № 11. S. 1562–1563.
13. Antonovskaya O.G. // Izv. vuzov. Matematika. 2004. № 2(501). S. 19–23.
14. Antonovskaya O.G. // Differencial'nye uravneniya. 2013. T. 49. № 9. S. 1220–1224.
15. Nejmark Yu.I. // Izv. vuzov. Radiofizika. 1958. T. 1. № 1. S.41–66.
16. Antonovskaya O.G., Goryunov V.I. // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. 2006. Vyp. 3(32). S. 110–117.