УДК 519.21

ПОСТРОЕНИЕ КЛАССА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЯЮЩИХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

М.А. Федоткин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

fma5@rambler.ru

Поступила в редакцию 18.02.2014

В [1, 2] впервые предлагается статистический подход к выделению вероятностной модели $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ из заданного параметрического семейства $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_u(\cdot)): u \in U\}$. Выделенное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ в одних случаях будет адекватной моделью для данного статистически устойчивого эксперимента **Э** или управляющей системы [3–7]. В других случаях, когда по некоторому признаку требуется выполнить синтез управляющей системы **Э**, вероятностная модель $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ объявляется её целевой или оптимизационной моделью. В [1, 2] для семейства $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_u(\cdot)): u \in U\}$ из перестановочных распределений для построения $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ предлагается использовать класс перестановочных и квазиперестановочных стратегий принятия решений. В этой работе, которая является непосредственным продолжением исследований из [1, 2], изучаются свойства класса экстремальных стратегий.

Ключевые слова: управляющие системы, вероятностные модели, перестановочные распределения, перестановочные стратегии, квазиперестановочные стратегии, выборочные пространства, минимаксное значение функции риска.

Введение

Используя обозначения и выводы из [1, 2], приведем постановку проблемы и основные результаты из этих работ. Пусть при $m \geq 2$, $N = \{0, 1, \ldots\}$ и $\omega \in \Omega$ вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m$ является значением измерителя $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ эксперимента **Э**, где отображение $\xi(\omega)$: $\Omega \to N^m$. Если V есть множество высказываний v относительно неизвестного параметра $u \in U$ и $V = U = \{1, 2, \ldots, m\}$, то отображение $v = \zeta(\omega)$: $\Omega \to V$ определяет искомую модель $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_v(\cdot))$ из семейства $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_u(\cdot)): u \in U\}$. При заданном значении параметра u семейства $\{p_u(x) = \mathbf{P}_u(\{\omega: \xi(\omega) = x\}): x \in N^m\}$ и $\{g_u(v; x) = \mathbf{P}_u(\{\omega: \zeta(\omega) = v\} | \{\omega: \xi(\omega) = x\}): v \in V\}$ определяют соответственно распределение вероятностей для ξ на пространстве N^m и условное распределение для высказывания $\zeta(\omega)$ на пространстве V при фиксированном значении $x \in N^m$. Класс рандомизированных стратегий или решающих функций $s = g_u(v; x)$: $U \times V \times N^m \to [0, 1]$ обозначается через S и через S_c, если $s = g_u(v; x) \equiv g(v; x)$. Равенства $\mathbf{P}_u(\{\omega: \xi(\omega) = x, \zeta(\omega) = v\}) = p_u(x) g_u(v; x)$, $u \in U$, $x \in N^m$, $v \in V$, задают распределение случайного элемента $(\xi(\omega), \zeta(\omega))$ на множестве $N^m \times V$ из элементов $y = (x_1, x_2, \ldots, x_m, v)$. В [1] при фиксированных значениях $u \in U$ и $s \in S$ наряду с вектором $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \zeta)$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_u(\cdot))$ рассматривается случайный вектор $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \gamma)$ на выборочном вероятностном пространстве $(N^m \times V, 2^{N^m \times V}, P_{u,s}(\cdot))$, где $\gamma_1(y) = x_1$, $\gamma_2(y) = x_2$, $\ldots$, $\gamma_m(y) = x_m$, $\gamma(y) = v$ и $P_{u,s}(\{(x, v)\}) = p_u(x) g_u(v; x)$. Если функция потерь $l(u, v)$ равна нулю при $u \neq v$ и единице при $u = v$, то функция риска вида $H(u, s) = \mathrm{M}_{u,s}(l(u, \gamma)) = P_{u,s}(\{y: \gamma(y) \neq u\})$ определяет вероятность ошибочного выбора адекватной или целевой модели из класса $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_u(\cdot)): u \in U\}$. Выделение из данного класса $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_u(\cdot)): u \in U\}$ модели $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ с помощью стратегии $s^+ = g_u^+(v; x) \in S$, которая определяется из решения функционального уравнения оптимальности $\max\{P_{u,s^+}(\{y: \gamma(y) \neq u\}): u \in U\} = \inf\{\max\{P_{u,s}(\{y: \gamma(y) \neq u\}): u \in U\}: s \in S\}$, и есть основная изучаемая проблема в [1, 2] и в данной работе.

Множество квазиперестановочных минимаксных стратегий

Для любого вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m$ определим функцию $p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \max\{p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m): u \in U\}$ и множество $L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{u: p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m) = p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$. Рассмотрим попарно непересекающиеся множества $L_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{a(j, 1), a(j, 2), \ldots, a(j, c(j))\}$, $j = 1, 2, \ldots, e(x)$. Положим, что Π есть множество всех взаимно однозначных отображений вида $\pi(i)$: $\{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ и для некоторого $u \in L_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будет также $u \in L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Тогда $x_u = b_j$, и при любом $k = 1, 2, \ldots, c(j)$ в силу определения 1 из [1] имеем равенства $p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m) = p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m) = p_{\pi(a(j,k))}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = p_{a(j,k)}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, если только отображение $\pi(\cdot) \in \Pi$, $\pi(a(j, k)) = u$, $\pi(u) = a(j, k)$, $\pi(i) = i$ при $i \ne a(j, k)$, $i \ne u$. Отсюда следует, что $a(j, k) \in L$ при всех $k = 1, 2, \ldots, c(j)$. Итак, при $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m$ либо $L_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) \subset L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, либо имеет место соотношение $L_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) \bigcap L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \varnothing$. С другой стороны, множество

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_m) \subset \subset \bigcup_{j=1}^{e(x)} L_j(x_1, x_2, ..., x_m) = \{1, 2, ..., m\}.$$

Поэтому

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = L_{j(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \bigcup \bigcup L_{j(2)}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \bigcup \ldots \bigcup L_{j(r)}(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad (1)$$

где $\{j(1), j(2), \ldots, j(r)\} = \{j: j \in \{1, 2, \ldots, e(x)\}, L_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) \subset L(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$ и для определенности $j(1) < j(2) < \ldots < j(r)$.

Определение 1. Любой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m$ назовем информативным, если $p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m) > 0$. В противном случае вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будем называть неинформативным.

Теорема 1. Для того чтобы стационарная квазиперестановочная стратегия $s = g(v; x)$ была минимаксной относительно класса S' [2], необходимо и достаточно, чтобы на каждом информативном векторе $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m$ имело место соотношение

$$\sum_{v \in L(x_1, x_2, \ldots, x_m)} g(v; x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1. \quad (2)$$

Доказательство. *Достаточность.* Принимая во внимание для стационарной стратегии соотношения (8) и (15) из [2] и определение функции $p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, последовательно выводим:

$$H(s) = 1 - \frac{1}{m} \sum_{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m} |W(x_1, x_2, ..., x_m)| \times \times \sum_{j=1}^{e(x)} c(j) p_k(W_{k,j}(x)) g(k; W_{k,j}(x)) \ge$$

$$\ge 1 - \frac{1}{m} \sum_{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m} |W(x_1, x_2, ..., x_m)| \times \times p^*(x_1, x_2, ..., x_m) \sum_{j=1}^{e(x)} c(j) g(k; W_{k,j}(x)) =$$

$$= 1 - \frac{1}{m} \sum_{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m} |W(x_1, x_2, ..., x_m)| \, p^*(x_1, x_2, ..., x_m).$$

Итак, для любой стационарной квазиперестановочной или все равно для стационарной перестановочной стратегии $s = g(v; x)$ выполняются неравенства:

$$H(s) \ge 1 - \frac{1}{m} \sum_{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m} |W(x_1, x_2, ..., x_m)| \, p^*(x_1, x_2, ..., x_m),$$

$$H(s) \ge \inf\{\max\{P_{u,s}(\{y: \gamma(y) \ne u\}): u \in U\}: s \in S'\} = H_0(S'). \quad (3)$$

Напомним из [2], что величина $H_0(S')$ определяет относительно класса S' минимаксное значение функции риска $H(u, s)$.

Очевидно, что произвольная стационарная квазиперестановочная стратегия $s = g(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$, для которой выполняется условие (2), равна нулю при $v \notin L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и принимает неотрицательное значение при $v \in L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. С учетом этого, используя представление множества $L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ с помощью равенства (1), рассмотрим любое $v \in L_{j(l)}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{a(j(l), 1), a(j(l), 2), \ldots, a(j(l), c(j(l)))\}$ для некоторого фиксированного $l = 1, 2, \ldots, r$. Так как рассматриваемая стратегия $s = g(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ является стационарной и квазиперестановочной, то для всех $i = 1, 2, \ldots, c(j(l))$ с помощью равенства $x_{a(j(l),1)} = x_{a(j(l),i)} = b_{j(l)}$ легко устанавливается соотношение

$$g(a(j(l), 1); x_1, x_2, \ldots, x_{a(j(l),1)}, \ldots, x_{a(j(l),i)}, \ldots, x_m) = g(a(j(l), i); x_1, x_2, \ldots, x_{a(j(l),1)}, \ldots, x_{a(j(l),i)}, \ldots, x_m) = g(a(j(l), i); x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

если только отображение $\pi(\cdot) \in \Pi$, $a(j(l), 1) = \pi(a(j(l), i))$, $\pi(a(j(l), 1)) = a(j(l), i)$, $\pi(n) = n$ при $n \ne a(j(l), 1)$, $n \ne a(j(l), i)$. Поэтому стратегия $s = g(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$, которая удовлетворяет достаточным условиям теоремы, имеет следующий вид:

$$g(v; x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{cases} 0 \text{ при } v \notin L(x_1, x_2, ..., x_m); \\ g(a(j(l), 1); x_1, x_2, ..., x_m) \\ \quad \text{для всех } v \in L_{j(l)}(x_1, x_2, ..., x_m), \end{cases} \quad (4)$$

где $l = 1, 2, \ldots, r$. Формула (4) позволяет определить стратегию $s = g(v; x)$ для всех $v = 1, 2, \ldots, m$. В силу соотношения (8) из [2] и (4) для рассматриваемой здесь стратегии $s = g(v; x)$ выполняется равенство

$$\sum_{l=1}^{r} c(j(l)) g(a(j(l), 1); x_1, x_2, ..., x_m) = 1. \quad (5)$$

Принимая во внимание равенства $p_k(W_{k,j(l)}(x)) = p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $l \in \{1, 2, \ldots, r\}$, соотношения (4) и (5), непосредственно из (15) работы [2] для любой стационарной и квазиперестановочной стратегии $s = g(v;\ x)$, которая удовлетворяет условию (2), найдем:

$$H(s) = 1 - \frac{1}{m} \sum_{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m} \left| W(x_1, x_2, \ldots, x_m) \right| \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{e(x)} c(j) p_k (W_{k,j}(x)) g(k;\, W_{k,j}(x)) =$$

$$= 1 - \frac{1}{m} \sum_{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m} \left| W(x_1, x_2, \ldots, x_m) \right| \sum_{l=1}^{r} c(j(l)) \times$$

$$\times p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m) g(a(j(l), 1);\, x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= 1 - \frac{1}{m} \sum_{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m} \left| W(x_1, x_2, \ldots, x_m) \right| p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Учитывая это, соотношение (3), утверждения теорем 2, 3 и 4 из [2], получим: $H(s) = \inf\{\max\{P_{u,s}(\{y\colon\ \gamma(y) \ne u\})\colon\ u \in U\}\colon\ s \in S'\} = H_0(S')$. Поэтому любая стационарная и квазиперестановочная стратегия, которая удовлетворяет соотношению (2), является минимаксной относительно класса S'.

Необходимость. Предположим, что некоторая стационарная квазиперестановочная стратегия $s = g(v;\ x)$ является минимаксной относительно класса S', и значит,

$$H(s) = 1 - \frac{1}{m} \sum_{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m} \left| W(x_1, x_2, \ldots, x_m) \right| \times \qquad (6)$$

$$\times p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m) = H_0(S').$$

Однако для такой стратегии всё же существует информативный вектор $x' = (x_1',\ x_2', \ldots, x_m') \in N^m$, для которого при некотором элементе j_0 из множества $\{1, 2,\ \ldots,\ e(x')\}$ и при некотором элементе i_0 из множества $\{1, 2,\ \ldots,\ c(j_0)\}$ выполняются соотношения

$$g(a(j_0,\ i_0);\ x_1', x_2', \ldots, x_m') > 0,$$

$$a(j_0,\ i_0) \notin L(x_1', x_2', \ldots, x_m'),$$

$$a(j_0,\ i_0) \in L_{j_0}(x_1', x_2', \ldots, x_m') =$$

$$= \{a(j_0, 1),\ a(j_0, 2),\ \ldots,\ a(j_0, c(j_0))\}. \qquad (7)$$

Из (7) выводим, что необходимое условие (2) не выполняется. В этих обозначениях и предположениях из (15) работы [2] для стратегии $s = g(v;\ x)$ получаем:

$$H(s) = 1 - P_{k,s}(\{y\colon\ \gamma(y) = k\}) =$$

$$= 1 - m^{-1} \sum_{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m} \left| W(x_1, x_2, \ldots, x_m) \right| \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{e(x)} c(j) p_k (W_{k,j}(x)) g(k;\, W_{k,j}(x)) =$$

$$= 1 - m^{-1} \sum_{\substack{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m, \\ \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \ne \\ \ne \{x_1', x_2', \ldots, x_m'\}}} \left| W(x_1, x_2, \ldots, x_m) \right| \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{e(x)} c(j) p_k (W_{k,j}(x)) g(k; W_{k,j}(x)) -$$

$$- m^{-1} \left| W(x_1', x_2', \ldots, x_m') \right| \sum_{j=1}^{e(x')} c(j) \times \qquad (8)$$

$$\times p_k (W_{k,j}(x')) g(k; W_{k,j}(x')).$$

Так как $a(j_0, i_0) \notin L(x_1', x_2', \ldots, x_m')$, то $p_k(W_{k,j_0}(x')) - p^*(x_1', x_2', \ldots, x_m') < 0$. Стратегия $s = g(v;\ x)$ является квазиперестановочной. Поэтому выбор отображения $\beta(\cdot) \in \Pi$, $a(j_0,\ i_0) = \beta(k)$, $\beta(n) = n$ при $n \ne k$ и условие (7) позволяют установить, что

$$g(k; W_{k,j_0}(x')) =$$

$$= g(k, x_1', x_2', \ldots, x_{k-1}', x'_{a(j_0, i_0)}, x_{k+1}', \ldots, x_m') =$$

$$= g(a(j_0,\ i_0);\ x_1', x_2', \ldots, x_m') > 0.$$

Непосредственно отсюда имеем:

$$c(j_0) p_k (W_{k,j_0}(x')) g(k; W_{k,j_0}(x')) =$$

$$= (c(j_0) - 1) p_k (W_{k,j_0}(x')) g(k; W_{k,j_0}(x')) +$$

$$+ p_k (W_{k,j_0}(x')) g(k; W_{k,j_0}(x')) +$$

$$+ p^*(x_1', x_2', \ldots, x_m') g(k; W_{k,j_0}(x')) -$$

$$- p^*(x_1', x_2', \ldots, x_m') g(k; W_{k,j_0}(x')) =$$

$$= \{ (c(j_0) - 1) p_k (W_{k,j_0}(x')) g(k; W_{k,j_0}(x')) +$$

$$+ p^*(x_1', x_2', \ldots, x_m') g(k; W_{k,j_0}(x')) \} +$$

$$+ \{ (p_k (W_{k,j_0}(x')) - p^*(x_1', x_2', \ldots, x_m')) g(k; W_{k,j_0}(x')) \} \le$$

$$\le p^*(x_1', x_2', \ldots, x_m') c(j_0) g(k; W_{k,j_0}(x')) +$$

$$+ \{ (p_k (W_{k,j_0}(x')) - p^*(x_1', x_2', \ldots, x_m')) g(k; W_{k,j_0}(x')) \} <$$

$$< p^*(x_1', x_2', \ldots, x_m') c(j_0) g(k; W_{k,j_0}(x')). \qquad (9)$$

Учитывая (8) и (9), для минимаксной стратегии $s = g(v;\ x)$ относительно класса S' получаем соотношение:

$$H(s) = 1 - m^{-1} \sum_{\substack{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m, \\ \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \ne \\ \ne \{x_1', x_2', \ldots, x_m'\}}} \left| W(x_1, x_2, \ldots, x_m) \right| \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{e(x)} c(j) p_k (W_{k,j}(x)) g(k; W_{k,j}(x)) -$$

$$- m^{-1} \left| W(x_1', x_2', \ldots, x_m') \right| \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{e(x')} c(j) p_k (W_{k,j}(x')) g(k; W_{k,j}(x')) \ge$$

$$\ge 1 - m^{-1} \sum_{\substack{x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m, \\ \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \ne \\ \ne \{x_1', x_2', \ldots, x_m'\}}} \left| W(x_1, x_2, \ldots, x_m) \right| p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m) -$$

$$- m^{-1} \left| W(x_1', x_2', \ldots, x_m') \right| \times$$

$$\times \sum_{j=1, j\neq j_0}^{e(x')} c(j) p_k(W_{k,j}(x')) g(k; W_{k,j}(x')) -$$
$$- m^{-1} |W(x'_1, x'_2, ..., x'_m)| c(j_0) \times$$
$$\times p_k(W_{k,j_0}(x')) g(k; W_{k,j_0}(x')) >$$
$$> 1 - m^{-1} \sum_{\substack{x_1 \le x_2 \le ... \le x_m, \\ \{x_1, x_2, ..., x_m\} \neq \\ \neq \{x'_1, x'_2, ..., x'_m\}}} |W(x_1, x_2, ..., x_m)| p^*(x_1, x_2, ..., x_m) -$$
$$- m^{-1} |W(x'_1, x'_2, ..., x'_m)| \sum_{j=1, j\neq j_0}^{e(x')} c(j) \times$$
$$\times p^*(x'_1, x'_2, ..., x'_m) g(k; W_{k,j}(x')) -$$
$$- m^{-1} |W(x'_1, x'_2, ..., x'_m)| c(j_0) \times$$
$$\times p^*(x'_1, x'_2, ..., x'_m) g(k; W_{k,j_0}(x')) =$$
$$= 1 - m^{-1} \sum_{\substack{x_1 \le x_2 \le ... \le x_m, \\ \{x_1, x_2, ..., x_m\} \neq \\ \neq \{x'_1, x'_2, ..., x'_m\}}} |W(x_1, x_2, ..., x_m)| p^*(x_1, x_2, ..., x_m) -$$
$$- m^{-1} |W(x'_1, x'_2, ..., x'_m)| p^*(x'_1, x'_2, ..., x'_m) \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{e(x')} c(j) g(k; W_{k,j}(x')) =$$
$$= 1 - m^{-1} \sum_{\substack{x_1 \le x_2 \le ... \le x_m, \\ \{x_1, x_2, ..., x_m\} \neq \\ \neq \{x'_1, x'_2, ..., x'_m\}}} |W(x_1, x_2, ..., x_m)| p^*(x_1, x_2, ..., x_m) -$$
$$- m^{-1} |W(x'_1, x'_2, ..., x'_m)| p^*(x'_1, x'_2, ..., x'_m) =$$
$$= 1 - m^{-1} \sum_{x_1 \le x_2 \le ... \le x_m} |W(x_1, x_2, ..., x_m)| p^*(x_1, x_2, ..., x_m).$$

Итак,

$$H(s) > 1 -$$
$$- \frac{1}{m} \sum_{x_1 \le x_2 \le ... \le x_m} |W(x_1, x_2, ..., x_m)| p^*(x_1, x_2, ..., x_m).$$

Это неравенство противоречит (6), и необходимость условия (2) доказана от противного. Утверждение теоремы 1 установлено.

Множество стационарных минимаксных стратегий

Теорема 1 описывает подмножество минимаксных стратегий относительно класса S', которые являются элементами из множества всех стационарных и квазиперестановочных стратегий. Однако существуют минимаксные стационарные стратегии относительно класса S', которые не являются квазиперестановочными. Для установления этого факта рассмотрим простой пример. Пусть при каждом заданном значении параметра $u \in U = \{1, 2\}$ семейство $\{p_u(x_1, x_2)$: $(x_1, x_2) \in N^2\}$ распределений для вектора (ξ_1, ξ_2) определяется равенством вида

$$p_u(x_1, x_2) = \\ = \begin{cases} 1/6, \text{ если } x_1 = x_2 \text{ и } x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\}; \\ 1/4, \text{ если } x_1 + x_2 = 1; \\ 0 \text{ для остальных значений } x_1 \text{ и } x_2. \end{cases} \quad (10)$$

Семейство $\{p_u(x_1, x_2)$: $(x_1, x_2) \in N^2\}$ является перестановочным, так как оно не зависит от значений параметра u и выполняется условие симметрии из леммы 1 работы [1]. Легко установить, что $p^*(x_1, x_2) = p_u(x_1, x_2)$ для всех $u \in \{1, 2\}$. Поэтому $L(x_1, x_2) = \{1, 2\}$. Отсюда следует, что стратегия $s = g(v; x_1, x_2) = 1/2$ при $v \in \{1, 2\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, является минимаксной относительно класса S'. Для этой стратегии из соотношения (6) получим, что значение функции риска $H(s) = 1 - 2^{-1}(3/6 + 2\times 1/4) = 1/2$. Рассмотрим теперь другую стационарную стратегию $s^\wedge = g^\wedge(v; x_1, x_2)$:

$$g^\wedge(1; x_1, x_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } x_1 = x_2; \\ 0, \text{ если } x_1 \neq x_2, \end{cases}$$

и

$$g^\wedge(2; x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_1 = x_2; \\ 1, \text{ если } x_1 \neq x_2. \end{cases} \quad (11)$$

Для отображения $\pi(1) = 2$ и $\pi(2) = 1$ имеем: $g^\wedge(\pi(1),0,0) \neq g^\wedge(1;0,0)$. Поэтому стратегия $s^\wedge = g^\wedge(v; x_1, x_2)$ не является квазиперестановочной. С другой стороны,

$$H(u, s^\wedge) = 1 - P_{u,s^\wedge}(\{y : \gamma(y) = u\}) = \\ = \sum_{(x_1, x_2) \in N^2} p_u(x_1, x_2) g^\wedge(u; x_1, x_2).$$

Тогда из (10) и (11) получаем, что $H(1, s^\wedge) = \sum_{x_1 = x_2} p_u(x_1, x_2) = 1/2$ и $H(2, s^\wedge) = \sum_{x_1 \neq x_2} p_u(x_1, x_2) = 1/2$. Значит, $H(s^\wedge) = \max\{H(u, s^\wedge)$: $u = 1, 2\} = 1/2$, и на основании теоремы 4 из [2] стратегия $s^\wedge = g^\wedge(v; x_1, x_2)$ является минимаксной относительно класса S'. Итак, показано существование стационарной минимаксной стратегии относительно класса S', которая не является квазиперестановочной. В связи с этим установим фундаментальное свойство такого рода минимаксных стратегий.

Теорема 2. Если стационарная стратегия $s = g(v; x)$ является минимаксной относительно класса S', то на любом информативном векторе $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m$ имеет место (2).

Доказательство. По теореме 4 из [2] существует такая не зависящая от значения u неизвестного параметра квазиперестановочная стратегия

$$s^{(0)} = g^{(0)}(v; x) =$$

$$= (m!)^{-1} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha(i) \in \Pi(k,v)} g(k; x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, ..., x_{\alpha(m)}), \quad (12)$$

для которой $H(s) \geq H(s_0)$. Так как стратегия $s = g(v;\, x)$ является минимаксной относительно класса S', то стратегия $s^{(0)} = g^{(0)}(v;\, x)$ также будет минимаксной относительно класса S'. Для стационарной, квазиперестановочной и минимаксной стратегии $s^{(0)} = g^{(0)}(v;\, x)$ относительно класса S' по теореме 1 выполняются равенства $s^{(0)} = g^{(0)}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$, $v \notin L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, на каждом информативном векторе $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m$. Используя теперь равенство (12), легко найдем:

$$0 = \sum_{v \notin L(x_1, x_2, \ldots, x_m)} g^{(0)}(v; x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m) =$$

$$= \sum_{v \notin L(x_1, x_2, ..., x_m)} (m!)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha(i) \in \Pi(k,v)} g(k; x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, ..., x_{\alpha(m)}) =$$

$$= \sum_{v \notin L(x_1, x_2, ..., x_m)} (m!)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{k=1, k \neq v}^{m} \sum_{\alpha(i) \in \Pi(k,v)} g(k; x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, ..., x_{\alpha(m)}) +$$

$$+ \sum_{v \notin L(x_1, x_2, ..., x_m)} (m!)^{-1} \sum_{\alpha(i) \in \Pi(v,v)} g(k; x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, ..., x_{\alpha(m)}) \geq$$

$$\geq (m!)^{-1} \sum_{v \notin L(x_1, x_2, ..., x_m)} g(v; x_1, x_2, ..., x_m) \geq 0.$$

Непосредственно отсюда легко получаем, что

$$\sum_{v \notin L(x_1, x_2, ..., x_m)} g(v; x_1, x_2, ..., x_m) = 0$$

и

$$\sum_{v \in L(x_1, x_2, ..., x_m)} g(v; x_1, x_2, ..., x_m) = 1,$$

так как $\sum_{v=1}^{m} g(v; x_1, x_2, ..., x_m) = 1$. Значит, условие (2) выполняется, и это условие одновременно является необходимым.

Экстремальные стратегии и их свойства

В этом разделе рассмотрим два типа специальных стационарных стратегий. Особый интерес к этим стратегиям объясняется рядом причин. Во-первых, такого рода стратегии часто используют при решении практических задач. Во-вторых, эти стратегии очень просты в вычислительном отношении. В-третьих, они являются минимаксными для целого класса $\{p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m)\colon (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m\}$ распределений вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$. Наконец, эти стратегии обладают свойством адаптивности к изменениям распределения $\{p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m)\colon (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m\}$. Первый тип стратегии будем обозначать через $s^\nabla = g^\nabla(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$, её конструкция учитывает экстремальные свойства распределения вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$.

Лемма 1. Пусть стратегия $s^\nabla = g^\nabla(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ задается равенством

$$g^\nabla(v; x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{cases} 0 \text{ при } v \notin L(x_1, x_2, ..., x_m); \\ |L(x_1, x_2, ..., x_m)|^{-1} \\ \quad \text{для всех } v \in L(x_1, x_2, ..., x_m), \end{cases} \quad (13)$$

где $|L(x_1, x_2, \ldots, x_m)|$ есть число элементов множества $L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Тогда стационарная стратегия $s^\nabla = g^\nabla(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$, которая определяется формулой (13), является квазиперестановочной и минимаксной относительно класса S'.

Доказательство. Для любого отображения $\pi(\cdot) \in \Pi$ выполняются равенства $p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \max\{p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m)\colon u \in U\} = \max\{p_{\pi(u)}(x_1, x_2, \ldots, x_m)\colon u \in U\}$. Так как $p^*(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = \max\{p_u(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})\colon u \in U\}$ и имеет место соотношение $p_{\pi(u)}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = p_u(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})$, то $p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m) = p^*(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})$. Пусть $L(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = \{u\colon p_u(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = p^*(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}),\ u \in U\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_t\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, тогда $L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{u\colon p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m) = p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m),\ u \in U\} = \{\pi(u_1), \pi(u_2), \ldots, \pi(u_t)\}$. Действительно, если $u \in \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$, то $p_u(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = p^*(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})$ или $p_{\pi(u)}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, т.е. $\pi(u) \in \{\pi(u_1), \pi(u_2), \ldots, \pi(u_t)\}$. Наоборот, если $\pi(u) \in \{\pi(u_1), \pi(u_2), \ldots, \pi(u_t)\}$, то $p_{\pi(u)}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ или $p_u(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = p^*(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})$, т.е. $u \in \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$. Следовательно, $|L(x_1, x_2, \ldots, x_m)| = |L(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})| = t$. Из формулы (13) получим:

$$g^\nabla(v; x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{cases} 0 \text{ при } v \notin \{\pi(u_1), \pi(u_2), ..., \pi(u_t)\}; \\ t^{-1} \text{ для всех } v \in \{\pi(u_1), \pi(u_2), ..., \pi(u_t)\}, \end{cases} \quad (14)$$

$$g^\nabla(v; x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, ..., x_{\pi(m)}) = \begin{cases} 0 \text{ при } v \notin \{u_1, u_2, ..., u_t\}; \\ t^{-1} \text{ для всех } v \in \{u_1, u_2, ..., u_t\}. \end{cases} \quad (15)$$

Из (14) при $v = \pi(u) \in \{\pi(u_1), \pi(u_2), \ldots, \pi(u_t)\}$ получаем $g^\nabla(\pi(u); x_1, x_2, \ldots, x_m) = t^{-1}$, а из (15) при $v = u \in \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ находим $g^\nabla(u; x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = t^{-1}$. Сравнивая эти результаты, выводим, что $g^{\nabla}(\pi(u); x_1, x_2, \ldots, x_m) = g^{\nabla}(u; x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = t^{-1}$ при $u \in \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$. Аналогично показываем, что $g^{\nabla}(\pi(u); x_1, x_2, \ldots, x_m) = g^{\nabla}(u; x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})$ при $u \notin \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$. Итак, стационарная стратегия $s^{\nabla} = g^{\nabla}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ является квазиперестановочной. Из (13) следует, что для этой стратегии имеет место соотношение (2). Отсюда по теореме 1 экстремальная стратегия $s^{\nabla} = g^{\nabla}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будет минимаксной относительно класса S'. Лемма 1 доказана.

Изучим теперь свойства второго типа экстремальной стационарной стратегии, которую ниже будем обозначать через $s^{\vee} = g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Алгоритм построения этой стратегии основан на экстремальных свойствах числовых значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ измерителей $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. Пусть множество $L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{k\colon x_k = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}, k = 1, 2, \ldots, m\}$ для любого вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m$.

Теорема 3. Для того чтобы стационарная стратегия

$$g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } v \notin L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ |L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m)|^{-1} \\ \quad \text{для всех } v \in L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{cases} \quad (16)$$

была минимаксной относительно класса S', необходимо и достаточно, чтобы для каждого вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m$ выполнялось соотношение

$$L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \subset L(x_1, x_2, \ldots, x_m). \quad (17)$$

Доказательство. *Необходимость.* Сначала найдем множества $L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $L^{\vee}(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})$ для любого фиксированного отображения $\pi(\cdot) \in \Pi$. Пусть величина $x^{\vee} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Из определения отображения $\pi(\cdot)$ следует, что $\max\{x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}\} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Поэтому $x^{\vee} = \max\{x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}\}$. Если теперь $L^{\vee}(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = \{v\colon x_{\pi(v)} = x^{\vee}, v = 1, 2, \ldots, m\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, то $L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{v\colon x_v = x^{\vee}, v = 1, 2, \ldots, m\} = \{\pi(v_1), \pi(v_2), \ldots, \pi(v_r)\}$. В самом деле, если $v \in \ \in L^{\vee}(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})$, то $x_{\pi(v)} = x^{\vee}$, и поэтому $\pi(v) \in L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{\pi(v_1), \pi(v_2), \ldots, \pi(v_r)\}$. Иначе, если $\pi(v) \in \{\pi(v_1), \pi(v_2), \ldots, \pi(v_r)\} = \ = L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то $x_{\pi(v)} = x^{\vee}$, и в силу определения $L^{\vee}(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})$ получаем, что $v \in \in L^{\vee}(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$. Суммируя все эти результаты, выводим, что $|L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m)| = |L^{\vee}(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})| = r$. Принимая теперь во внимание определение стратегии $s^{\vee}$ с помощью равенства (16), найдем, что

$$g^{\vee}(v; x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } v \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}, \\ r^{-1} \ \text{ для всех } v \in \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}; \end{cases} \quad (18)$$

$$g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } v \notin \{\pi(v_1), \pi(v_2), \ldots, \pi(v_r)\}, \\ r^{-1} \ \text{ для всех } v \in \{\pi(v_1), \pi(v_2), \ldots, \pi(v_r)\}. \end{cases} \quad (19)$$

Из (18) при $v = u \in \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ имеем $g^{\vee}(u; x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = r^{-1}$, а из (19) при $v = \pi(u) \in \in \{\pi(v_1), \pi(v_2), \ldots, \pi(v_r)\}$ получаем $g^{\vee}(\pi(u); x_1, x_2, \ldots, x_m) = t^{-1}$. Отсюда выводим, что $g^{\vee}(\pi(u); x_1, x_2, \ldots, x_m) = g^{\vee}(u; x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = r^{-1}$ при $u \in \in \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$. Совершенно так же установим следующее равенство: $g^{\vee}(\pi(u); x_1, x_2, \ldots, x_m) = g^{\vee}(u; x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = 0$ при $u \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$. Следовательно, стационарная стратегия $s^{\vee} = g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ является квазиперестановочной.

Для завершения доказательства этой части теоремы предположим сначала, что вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ является существенным. Тогда для квазиперестановочной и минимаксной стратегии $s^{\vee} = g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ относительно класса S', которая является стационарной, по теореме 1 выполняется равенство (2). Используя это и (16), легко найдём:

$$\sum_{v \in L(x_1, x_2, \ldots, x_m)} g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{v \in L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m)} g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1.$$

Предположим теперь, что существует $v_0 \in \in L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $v_0 \notin L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Так как стратегия $s^{\vee} = g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m) = r^{-1} > 0$ при $v \in L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то $g^{\vee}(v_0; x_1, x_2, \ldots, x_m) > 0$. Поэтому получаем противоречие

$$\sum_{v \in L(x_1, x_2, \ldots, x_m)} g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m) + g^{\vee}(v_0; x_1, x_2, \ldots, x_m) > 1.$$

Значит, необходимое условие (17) выполняется, если вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ является существенным. Остаётся допустить, что вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будет несущественным. Отсюда множество $L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{1, 2, \ldots, m\}$, и соотношение $L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \subset L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{1, 2, \ldots, m\}$, естественно, имеет место.

Достаточность. Для стационарной квазиперестановочной стратегии $s^{\vee} = g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ справедливо равенство

$$\sum_{v \in L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m)} g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1.$$

Теперь из соотношения (17) получаем, что $\sum_{v \in L(x_1, x_2, \ldots, x_m)} g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$. Поэтому по теореме 1 стратегия $s^{\vee} = g^{\vee}(v;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ будет минимаксной относительно класса S'. Теорема 3 установлена.

Приведем несколько примеров, в которых условие (17) имеет место, и также рассмотрим пример, когда условие (17) не выполняется.

Пример 1. Пусть числа $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ определяют распределение $w(n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ на N и распределение $p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \dfrac{\mu^{x_1+x_2+\ldots+x_m}}{x_1!\times x_2!\times\ldots\times x_m!}e^{-m\mu}$ на N^m. Если произвольное отображение $\pi(\cdot) \in \in\Pi$, то компоненты вектора $(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)})$ получаются путем перестановки компонент вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Поэтому $x_{\pi(1)} + x_{\pi(2)} + \ldots + +x_{\pi(m)} = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, $(x_{\pi(1)})! \times (x_{\pi(2)})! \times \ldots \times \times (x_{\pi(m)})! = (x_1)! \times (x_2)! \times\ldots \times x_m!$ и $p(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(m)}) = \dfrac{\mu^{x_{\pi(1)}+x_{\pi(21)}+\ldots+x_{\pi(m)}}}{(x_{\pi(1)})!\times(x_{\pi(2)})!\times\ldots\times(x_{\pi(m)})!}e^{-m\mu} = p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, и, значит, распределение $\{p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$: $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m\}$ будет симметричным. Тогда на основании содержания и доказательства леммы 1 из [1] выводим, что распределение

$$p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= \sum_{x'=0}^{x_u} w(x')p(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_u - x',\ \ldots,\ x_m) =$$

$$= e^{-(\lambda+m\mu)}\prod_{i=1}^{m}\frac{\mu^{x_i}}{x_i!}\sum_{x'=0}^{x_u}(\lambda\mu^{-1})^{x'}\frac{(x_u)!}{(x')!(x_u-x')!} =$$

$$= (1+(\lambda\mu^{-1}))^{x_u}e^{-(\lambda+m\mu)}\prod_{i=1}^{m}\frac{\mu^{x_i}}{x_i!},$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m,$$

для вектора $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m)$ является перестановочным. Более того, из окончательной формулы для $p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ непосредственно получаем, что для любого вектора $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)\in N^m$ множество $\{u\colon x_u = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\},\ u = 1, 2, \ldots, m\} = \{u\colon p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m) = p^*(x_1, x_2, \ldots, x_m)\}$, т.е. $L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Поэтому стратегия $s^{\vee} = g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ для этой задачи будет минимаксной относительно класса S'.

Пример 2. Пусть $p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (1-a)^m \times \times a^{x_1+x_2+\ldots+x_m}$, $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m) \in N^m$, $0 < a < 1$, и $w(n) = (1-b)b^n$, $n \in N$, $0 \le b < 1$, задают распределение на N^m и, соответственно, на N. Используя метод, который был предложен для решения вопросов примера 1, легко показать, что распределение

$$p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= \sum_{x'=0}^{x_u} w(x')p(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_u - x',\ \ldots,\ x_m) =$$

$$= \begin{cases} (x_u+1)(1-a)^{m+1}a^{x_1++x_2+\ldots+x_m} \text{ при } a = b, \\ (1-b)(1-a)^m a^{x_1++x_2+\ldots+x_m}\dfrac{1-(b/a)^{x_u+1}}{1-(b/a)} \\ \qquad\qquad \text{при } a \ne b \end{cases} \tag{20}$$

будет перестановочным. Из (20) следует, что $L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Итак, стратегия $s^{\vee} = g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ для этой задачи будет также минимаксной относительно класса S'.

Пример 3. Пусть целое число $c \ge 0$ определяет распределение $w(n)$ на N, которое равно единице при $n = c$ и нулю при $n \ne c$. Пусть $w_2 = \{w_2(n) : n \in N\}$ – некоторое распределение на N, $w_2(n)>0$ при всех $n\in N$, и функция $w_2(z-c)/w_2(z)$ при $z \ge c$ монотонно не убывает по z. Симметричное распределение $p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на N^m в этом примере будем задавать соотношением $p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = w_2(x_1) \times w_2(x_2) \times \times\ldots\times w_2(x_m)$. Если $p_u(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m) = \sum_{x'=0}^{x_u} w(x')\times \times p(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_u - x',\ \ldots,\ x_m)$, то

$$p_u(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m) = \begin{cases} 0 \text{ при } x_u < c, \\ \dfrac{w_2(x_u-c)}{w_2(x_u)}\displaystyle\prod_{i=1}^{m} w_2(x_i) \\ \qquad\qquad \text{при } x_u \ge c. \end{cases} \tag{21}$$

По лемме 1 из [1] распределение (21) будет перестановочным. Легко видеть, что при $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} < c$ будет $p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ для каждого $u \in U$. Поэтому имеем $L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{1, 2, \ldots, m\}$, $L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \subset L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Так как функция $w_2(z-c)/w_2(z)$ при $z \ge c$ монотонно не убывает по z и $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \ge c$, то непосредственно из (21) снова имеем $L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \subset L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Для этой задачи по теореме 3 стратегия $s^{\vee} = g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будет опять минимаксной относительно класса S'.

Рассмотрим теперь простой пример, когда соотношение (17) не имеет места.

Пример 4. Пусть $m = 2$, а распределение $\{w(n)\colon n \in N\}$ на N и распределение $\{p(x_1, x_2)\colon (x_1, x_2) \in N^2\}$ на N^2 удовлетворяют ограничениям $w(1) > 0$, $p(1, 0) = p(1, 1) = 0$, $p(0, 2) > 0$. Тогда в соответствии с условиями и формулами леммы 1 из [1] легко найдем, что

$$p_1(x_1, x_2) = \sum_{x'=0}^{x_1} w(x')p(x_1 - x', x_2),$$

$$p_2(x_1, x_2) = \sum_{x'=0}^{x_2} w(x')p(x_1, x_2 - x'),$$

$$p_1(x_1,x_2)=\sum_{x'=0}^{x_1} w(x')p(x_1-x',x_2),$$

$$p_2(x_1,x_2)=\sum_{x'=0}^{x_2} w(x')p(x_1,x_2-x').$$

Отсюда с учётом принятых ограничений непосредственно получим, что

$$p_1(1,2)=w(0)p(1,2)+w(1)p(0,2),$$
$$p_2(1,2)=w(0)p(1,2)+w(1)p(1,1)+$$
$$+w(2)p(1,0)=w(0)p(1,2),\ p_1(1,2)>p_2(1,2).$$

Поэтому, принимая во внимание определение множеств $L^{\vee}(x_1, x_2)$ и $L(x_1, x_2)$, выводим, что $L^{\vee}(1, 2) = \{2\}$ и $L(1, 2) = \{1\}$. Следовательно, соотношение (17) не выполняется. Поэтому экстремальная стратегия вида $s^{\vee} = g^{\vee}(v; x_1, x_2)$ для этого примера может не быть минимаксной относительно класса S'.

Стандартные семейства вероятностных моделей

Рассмотрим теперь стандартные семейства вероятностных моделей управляющих систем, которые представляют практический интерес.

Теорема 4. Пусть функция $\sum_{x'=0}^{n} w(x')\times$ $\times w_2(n-x')w_2(n)^{-1}$ монотонно не убывает по $n \in N$, где $\{w(n): n \in N\}$ и $\{w_2(n): n \in N\}$ – некоторые распределения на N и $w_2(n) > 0$ для любого $n \in N$. Тогда при каждом фиксированном $u \in U$ множество вида $\{p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m): (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m\}$, где

$$p_u(x_1,x_2,\ldots,x_m)=$$
$$=(w_2(x_u))^{-1}\sum_{x'=0}^{x_u} w(x')\,w_2(x_u-x')\prod_{k=1}^{m} w_2(x_k), \tag{22}$$

является перестановочным распределением для вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, и стратегия $s^{\vee} = g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будет минимаксной относительно класса S'.

Доказательство. Из формулы (22) для $p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ выводим, что функция $p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geq 0$, и, кроме того, выполняются следующие равенства:

$$\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in N^m} p_u(x_1,x_2,\ldots,x_m)=$$
$$=\sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in N^m}(w_2(x_u))^{-1}\sum_{x'=0}^{x_u} w(x')\times$$
$$\times w_2(x_u-x')\prod_{k=1}^{m} w_2(x_k)=1,$$
$$u=1, 2, \ldots, m.$$

Следовательно, семейство $\{p_u(x_1, x_2, \ldots, x_m): (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m\}$ при каждом фиксированном $u \in U$ является распределением для вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$. Из соотношения (22) при любом отображении $\pi(\cdot) \in \Pi$ получаем, что

$$p_{\pi(u)}(x_1,x_2,\ldots,x_m)=$$
$$=\sum_{x'=0}^{x_{\pi(u)}} w(x')w_2(x_{\pi(u)}-x')\prod_{k=1}^{m} w_2(x_k)/w_2(x_{\pi(u)}), \tag{23}$$

$$p_u(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\ldots,x_{\pi(m)})=$$
$$=\sum_{x'=0}^{x_{\pi(u)}} w(x')w_2(x_{\pi(u)}-x')\prod_{k=1}^{m} w_2(x_k)/w_2(x_{\pi(u)}). \tag{24}$$

Из равенств (23) и (24) получаем, что $p_{\pi(u)}(x_1,x_2,\ldots,x_m) = p_u(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\ldots,x_{\pi(m)})$ для каждого отображения $\pi(\cdot) \in \Pi$. Итак, соотношение (22) определяет перестановочное распределение для вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$. Затем, так как функция $\sum_{x'=0}^{n} w(n)w_2(n-x')/w_2(n)$ монотонно не убывает по $n \in N$, то из (22) для любого $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in N^m$ множество $L^{\vee}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{v: x_v = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}, v = 1, 2, \ldots, m\} \subset L(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. По теореме 3 стратегия $s^{\vee} = g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будет минимаксной относительно класса S'. Утверждение теоремы 4 доказано.

Теорема 5. Пусть при любом фиксированном $u \in U$ выполняются равенства

$$P_{u,s^{\vee}}(\{y:\gamma_1(y)=x_1,$$
$$\gamma_2(y)=x_2,\ldots,\gamma_m(y)=x_m,\gamma(y)=v\})=$$
$$=\sum_{x'=0}^{x_u} w(x')w_2(x_u-x')\prod_{k\neq u} w_2(x_k)\times \tag{25}$$
$$\times g^{\vee}(v; x_1, x_2, \ldots, x_m),$$
$$v \in V,\ (x_1, x_2, \ldots, x_m)\in N^m,$$

где $\{w(n): n \in N\}$ и $\{w_2(n): n \in N\}$ – некоторые распределения на N. Тогда случайные величины $\gamma_1(y), \gamma_2(y), \ldots, \gamma_m(y)$ независимы на выборочном вероятностном пространстве $(N^m \times V, 2^{N^m\times V}, P_{u,s^{\vee}}(\cdot))$, и экстремальная функция риска

$$H(s^{\vee})=1-\sum_{x'=0}^{\infty} w(x')\sum_{n=x'}^{\infty} w_2(n-x')\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C_{m-1}^{k}}{k+1}w_2^{\,k}(n)q_1^{\,m-1-k}(n-1), \tag{26}$$

где $q_1(-1) = 0$ и $q_1(n) = q_1(n-1) + w_2(n)$ для всех $n \in N$. В случае если $w_2(n) > 0$ для любого $n \in N$, то

$$H(s^{\vee})=1-\frac{1}{m}\sum_{x'=0}^{\infty} w(x')\sum_{n=x'}^{\infty}\frac{w_2(n-x')}{w_2(n)}\times$$
$$\times[q_1^{\,m}(n)-q_1^{\,m}(n-1)]. \tag{27}$$

Доказательство. Из равенства (25) получим, что для всех $i \neq u$ имеет место:

$$P_{u,s^\vee}(\{y:\gamma_i(y)=x_i\})=$$

$$=\sum_{(z_1,z_2,\ldots,z_m)\in N^m,\ z_i=x_i}\ \sum_{v=1}^{m}\sum_{x'=0}^{z_u}w(x')w_2(z_u-x')\times \tag{28}$$

$$\times\prod_{k\neq u}w_2(z_k)g^\vee(v,z_1,z_2,\ldots,z_m)=w_2(x_i),$$

$$P_{u,s^\vee}(\{y:\gamma_1(y)=x_1,\gamma_2(y)=x_2,\ldots,\gamma_m(y)=x_m\})=$$

$$=\sum_{v=1}^{m}\sum_{x'=0}^{x_u}w(x')w_2(x_u-x')\times$$

$$\times\prod_{k\neq u}w_2(x_k)g^\vee(v,x_1,x_2,\ldots,x_m)=$$

$$=\sum_{x'=0}^{x_u}w(x')w_2(x_u-x')\prod_{k\neq u}w_2(x_k), \tag{29}$$

$$P_{u,s^\vee}(\{y:\gamma_u(y)=x_u\})=$$

$$=\sum_{(z_1,z_2,\ldots,z_m)\in N^m,\ z_u=x_u}\ \sum_{v=1}^{m}\sum_{x'=0}^{z_u}w(x')w_2(z_u-x')\times$$

$$\times\prod_{k\neq u}w_2(z_k)g^\vee(v,z_1,z_2,\ldots,z_m)=$$

$$=\sum_{x'=0}^{x_u}w(x')w_2(x_u-x'). \tag{30}$$

Учитывая (29), (28) и (30), получаем соотношение следующего вида:

$$P_{u,s^\vee}(\{y:\gamma_1(y)=x_1,\gamma_2(y)=x_2,\ldots,\gamma_m(y)=x_m\})=$$

$$=\sum_{x'=0}^{x_u}w(x')w_2(x_u-x')\prod_{k\neq u}w_2(x_k)$$

$$=P_{u,s^\vee}(\{y:\gamma_u(y)=x_u\})\prod_{i\neq u}P_{u,s^\vee}(\{y:\gamma_i(y)=x_i\}).$$

Отсюда выводим, что случайные величины $\gamma_1(y)$, $\gamma_2(y)$, …, $\gamma_m(y)$ независимы на выборочном вероятностном пространстве ($N^m\times V$, $2^{N^m\times V}$, $P_{u,s^\vee}(\cdot)$).

Перейдём к доказательству равенства (26). Рассмотрим события из $2^{N^m\times V}$:

$$A_u=\{y:\gamma(y)=u\},\ B_u=\{y:\max\{\gamma_1(y),\gamma_2(y),\ldots,\gamma_m(y)\}=\gamma_u(y)\},$$

$$\overline{B}_u=(X\times V)\setminus B_u, \tag{31}$$

$$B_{u;0}=\{y:\gamma_u(y)>\gamma_i(y),\ 1\le i\le m,\ i\neq u\},$$

$$B_{u;i(1)}=\{y:\gamma_u(y)=\gamma_{i(1)}(y)>\gamma_i(y),$$

$$i\in U\setminus\{u,i(1)\}\},\ i(1)\in U,\ i(1)\neq u\ \ldots,$$

$$B_{u;i(1),i(2),\ldots,i(k)}=\{y:\gamma_u(y)=\gamma_{i(1)}(y)=\gamma_{i(2)}(y)=$$

$$=\ldots=\gamma_{i(k)}(y)>\gamma_i(y),$$

$$i\in U\setminus\{u,i(1),i(2),\ldots,i(k)\}\},\ 1\le k\le m-2,$$

$$i(1)\in U,\ i(2)\in U,\ \ldots,\ i(k)\in U,$$

$$i(1)\neq u,\ i(2)\neq u,\ \ldots,\ i(k)\neq u,$$

$$i(1)<i(2)<\ldots<i(k),$$

$$B_{u;i(1),i(2),\ldots,i(m-1)}=\{y:\gamma_u(y)=\gamma_{i(1)}(y)=\gamma_{i(2)}(y)=$$

$$=\ldots=\gamma_{i(m-1)}(y)\},$$

$$i(1)\in U\setminus\{u\},\ i(2)\in U\setminus\{u\},\ \ldots,\ i(m-1)\in$$

$$\in U\setminus\{u\},\ i(1)<i(2)<\ldots<i(m-1).$$

Из определения стратегии $s^\vee=g^\vee(v;x_1,x_2,\ldots,x_m)$ по формуле (16) и соотношений (31) найдём вероятность

$$P_{u,s^\vee}(A_u\cap\overline{B}_u)=P_{u,s^\vee}(\{y:\gamma(y)=u,\ \max\{\gamma_1(y),$$

$$\gamma_2(y),\ldots,\gamma_m(y)\}\neq\gamma_u(y)\})=0.$$

Отсюда $P_{u,s^\vee}(\{y:\gamma(y)=u\})=P_{u,s^\vee}(A_u\cap B_u)$. Поэтому

$$H(s^\vee)=1-P_{u,s^\vee}(\{y:\gamma(y)=u\})=$$

$$=1-P_{u,s^\vee}(B_u\cap A_u). \tag{32}$$

События вида $B_{u;0}$, $B_{u;i(1),i(2),\ldots,i(k)}$, где $1\le k\le$ $\le m-1$, $i(1)\in U$, $i(2)\in U$, …, $i(k)\in U$, $i(1)\neq u$, $i(2)\neq u$, …, $i(k)\neq u$ и $i(1)<i(2)<\ldots<i(k)$, образуют разбиение события B_u. Тогда

$$(B_u\cap A_u)=(B_{u;0}\cap A_u)\cup$$

$$\cup\left(\bigcup_{k=1}^{m-1}\ \bigcup_{i(1)<i(2)<\ldots<i(k)}(B_{u;i(1),i(2),\ldots,i(k)}\cap A_u)\right).$$

Учитывая теперь теоремы сложения, умножения и формулу (16), получим

$$P_{u,s^\vee}(B_u\cap A_u)=P_{u,s^\vee}(B_{u;0})+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k+1}\sum_{i(1)<i(2)<\ldots<i(k)}P_{u,s^\vee}(B_{u;i(1),i(2),\ldots,i(k)}). \tag{33}$$

Принимая во внимание соотношения (28), (29) и (30) и определение всех событий вида $B_{u;0}$, $B_{u;i(1),i(2),\ldots,i(k)}$, найдем:

$$P_{u,s^\vee}(B_{u;0})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{x'=0}^{n}w(x')w_2(n-x')q_1^{m-1}(n-1),$$

$$P_{u,s^\vee}(B_{u;i(1),i(2),\ldots,i(k)})=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{x'=0}^{n}w(x')w_2(n-x')w_2^{\,k}(n)q_1^{m-1-k}(n-1),$$

$$1\le k\le m-2,$$

$$P_{u,s^\vee}(B_{u;i(1),i(2),\ldots,i(m-1)})=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{x'=0}^{n}w(x')w_2(n-x')w_2^{\,m-1}(n).$$

Используя эти равенства в соотношении (33), получим, что

$$P_{u,s^\vee}(B_u\cap A_u)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C_{m-1}^k}{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{x'=0}^{n}w(x')\times$$

$$\times w_2(n-x')w_2^{\,k}(n)q_1^{m-1-k}(n-1). \tag{34}$$

Учитывая равенство (34) в соотношении (32) и меняя порядок суммирования по n и по x', установим равенство (26).

Наконец, покажем равенство (27), если дополнительно $w_2(n)>0$ для $n\in N$.

Действительно, выполним при $w_2(n)>0$, $n\in N$, следующие преобразования:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C_{m-1}^{k}}{k+1}w_2{}^{k}(n)q_1{}^{m-1-k}(n-1)=$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C_{m}^{k+1}}{k+1}w_2{}^{k}(n)q_1{}^{m-1-k}(n-1)=$$

$$=\frac{1}{mq(n)}\sum_{k=1}^{m}C_m^k w_2{}^{k}(n)q_1{}^{m-k}(n-1)=$$

$$=\frac{q_1{}^{m}(n)-q_1{}^{m}(n-1)}{mw_2(n)}.$$

Подставляя это выражение в (26), получим (27). Теорема 5 доказана.

Формулы (26) и (27) для вычисления экстремальной функции риска являются достаточно общими и, естественно, громоздкими. Однако в конкретных случаях, которые представляют практический интерес, выражение для $H(s^{\vee})$ можно значительно упростить. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 5. Пусть c есть некоторое целое неотрицательное число и $0 < b < 1$. Пусть также $w(n)$ равно единице при $n = c$ и нулю при $n \neq c$, а $w_2(n) = (1-b)b^n$. Отсюда легко находим, что $q_1(n) = \sum_{x'=0}^{n}(1-b)b^{x'} = 1-b^{n+1}$. Принимая это во внимание, из (27) последовательно найдём:

$$H(s^{\vee}) = 1-\frac{1}{m}b^{-c}\sum_{n=c}^{\infty}[(1-b^{n+1})^m-(1-b^n)^m] = 1-$$

$$-\frac{1}{m}b^{-c}\sum_{n=c}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{m}C_m^k(-1)^k b^{(n+1)k}-\sum_{k=0}^{m}C_m^k(-1)^k b^{nk}\right]=$$

$$=1-\frac{1}{m}b^{-c}\sum_{n=c}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}C_m^k(-1)^k b^{nk}(b^k-1)=$$

$$=1-\frac{1}{m}b^{-c}\sum_{n=c}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}C_m^k(-1)^k b^{nk}(b^k-1)=$$

$$=1-\frac{1}{m}b^{-c}\sum_{k=1}^{m}C_m^k(-1)^k(b^k-1)\sum_{n=c}^{\infty}b^{nk}=$$

$$=1-\frac{1}{m}b^{-c}\sum_{k=1}^{m}C_m^k(-1)^k(b^k-1)\frac{b^{ck}}{1-b^k}=$$

$$=1+\frac{1}{m}b^{-c}\left(\sum_{k=1}^{m}C_m^k(-1)^k b^{ck}+1-1\right)=$$

$$=1-\frac{1}{m}b^{-c}[1-(1-b^c)^m]. \qquad (35)$$

Список литературы

1. Федоткин М.А. Задача оптимизации для перестановочного семейства вероятностных моделей систем с управлением // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 5(2). С. 222–227.
2. Федоткин М.А. Свойства перестановочных и квазиперестановочных стратегий управляющих дискретных систем // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 2 (1). С. 191–198.
3. Zorine A.V., Fedotkin M.A. Optimization of Control of Doubly Stochastic Nonordinary Flows in Time-Sharing Systems // Automation and Remote Control. 2005. V. 66. № 7. P. 1115–1124.
4. Пройдакова Е.В., Федоткин М.А. Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками // Автоматика и телемеханика. РАН. 2008. № 6. С. 96–106.
5. Федоткин М.А., Федоткин А.М. Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко–Коваленко // Автоматика и телемеханика. РАН. 2009. № 12. С. 92–108.
6. Fedotkin M.A. Construction and analysis of probability models for controlled evolutionary systems // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2012. V. 85. P. 133–147.
7. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. М.: Наука–Физматлит, 2012. 608 с.

BUILDING A CLASS OF EXTREME STRATEGIES OF DISCRETE CONTROL SYSTEMS

M.A. Fedotkin

A statistical approach to separate the probability model $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ from the given parametric family $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_u(\cdot))$: $u \in U\}$ has first been proposed in [1, 2]. In some cases, the separated probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ will be an adequate model for the given statistically stable experiment **Э** or controlling system [3–7]. In other cases, where it is required to synthesize the controlling system **Э** by some criterion, the probabilistic model $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ is declared to be its target or optimization model. It has been proposed in [1, 2] to use a class of permutation and quasi-permutation solution strategies for the construction of $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ from the family $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_u(\cdot))$: $u \in U\}$ of permutation distributions. This work is a direct extension of studies [1, 2] and it considers the properties of a class of extreme strategies.

Keywords: control systems, probabilistic models, permutation distributions, permutation strategies, quasi-permutation strategies, sample spaces, minimax value of the risk function.

References

1. Fedotkin M.A. Zadacha optimizacii dlya perestanovochnogo semejstva veroyatnostnyh modelej sistem s upravleniem // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. 2012. № 5(2). S. 222–227.
2. Fedotkin M.A. Svojstva perestanovochnyh i kvaziperestanovochnyh strategij upravlyayushchih diskretnyh sistem // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. 2014. № 2 (1). S. 191–198.
3. Zorine A.V., Fedotkin M.A. Optimization of Control of Doubly Stochastic Nonordinary Flows in Time-Sharing Systems // Automation and Remote Control. 2005. V. 66. № 7. P. 1115–1124.
4. Projdakova E.V., Fedotkin M.A. Upravlenie vyhodnymi potokami v sisteme s ciklicheskim obsluzhivaniem i perenaladkami // Avtomatika i telemekhanika. RAN. 2008. № 6. S. 96–106.
5. Fedotkin M.A., Fedotkin A.M. Analiz i optimizaciya vyhodnyh processov pri ciklicheskom upravlenii konfliktnymi transportnymi potokami Gnedenko–Kovalenko // Avtomatika i telemekhanika. RAN. 2009. № 12. S. 92–108.
6. Fedotkin M.A. Construction and analysis of probability models for controlled evolutionary systems // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2012. V. 85. P. 133–147.
7. Fedotkin M.A. Modeli v teorii veroyatnostej. M.: Nauka–Fizmatlit, 2012. 608 s.