УДК 519.21

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ЦЕЛЬЮ ПРИМЕНЕНИЯ В ОБУЧЕНИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

М.А. Федоткин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

fma5@rambler.ru

Поступила в редакцию 19.11.2014

В учебно-методической разработке изложен анализ проблем различных подходов в обучении фундаментальным и прикладным основам современной теории вероятностей. Эта разработка содержит только необходимые сведения из теории вероятностей, которые обеспечивают доступность и необходимую математическую строгость изложения этого материала. Характерной особенностью работы является наличие большого числа задач с подробными решениями и замечаниями с целью развития навыков применения методов теории вероятностей с использованием компьютерных технологий.

Ключевые слова: вероятностное моделирование, элементарное случайное событие, вероятностное пространство, измерители элементарных исходов, случайная величина.

1. Введение

Большая часть математических представлений о мире и экспериментах носит детерминированный и полудетерминированный характер. В этом случае при проведении эксперимента практически в одних и тех же условиях можно точно предсказать его исход. Так, например, функциональная зависимость $U = a + bP$ температуры U идеального газа от давления P есть суммарный результат соударений всех частиц о стенки резервуара. Здесь a и b некоторые постоянные, зависящие от вида газа. При этом число таких частиц и их скорости, очевидно, носят стохастический характер. Это приводит к очень малым отклонениям приведенной функциональной зависимости. Эти отклонения пока не регистрируются современными приборами, которыми измеряют давление и температуру. Однако природа в большей степени является стохастической, когда при каждом повторении эксперимента в одних и тех же условиях, он может давать различные, но вполне определённые результаты. Такой эксперимент, опыт (испытание, система, наблюдение, процесс) будем называть случайным или стохастическим. Исход случайного эксперимента предсказать невозможно. Например, результатом непреднамеренного подбрасывания симметричной монеты на гладкую поверхность стола может быть герб (орёл) или цифра (решка). Детерминированные модели полезны, однако стохастические или вероятностные модели более адекватны. Широкий и всевозрастающий за последнее десятилетие интерес к теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и к применению вероятностно-статистических методов в самых разнообразных областях науки, техники, производства и экономики объясняется двумя причинами.

1. Увеличением чувствительности современных измерительных, приёмных и управляющих устройств. Вследствие чего случайные отклонения количественных характеристик таких устройств от их средних значений играют всё более существенную роль. Отказ от изучения роли стохастических отклонений и случайных механизмов часто приводит к авариям атомных реакторов, разрушению мостов, плотин, промышленных сооружений и гражданских зданий, поломкам самолётов и кораблей, транспортным катастрофам, выпуску некачественной и ненадёжной продукции, экономическим и природным катаклизмам и т. п.

2. Развитием современных средств микропроцессорной техники, когда появилась реальная возможность хранения, поиска и обработки больших массивов вероятностно-статистической информации о реальных объектах. Например, в теории ошибок разного рода измерений, в молекулярной и статистической физике, в биологии, в рыночной экономике, в телетрафике и системах обслуживания, в процессах адаптивного управления и принятия статистических решений, в управлении конфликтными

транспортными потоками на магистралях городов и т. д.

На основании такого краткого введения можно сформулировать основной предмет теории вероятностей и математической статистики. Теория вероятностей и математическая статистика, во-первых, предлагают методы построения адекватных моделей реальных статистически устойчивых экспериментов, во-вторых, средствами математики изучают эти модели и тем самым открывают новые фундаментальные закономерности реального мира. Методы построения и изучения вероятностных моделей реальных процессов должны быть отнесены к числу основных общеобразовательных дисциплин, которые определяют современный профессиональный уровень выпускников вузов по различным специальностям.

В настоящее время при подготовке общих курсов, учебников и задачников по теории вероятностей различными коллективами в учебных заведениях нашей страны и за рубежом существуют три противоположных подхода.

Первый подход [1–4] основан на интуитивных представлениях о случайном эксперименте и на интерпретации основных положений теории вероятностей. При таком подходе используется большое число простых модельных экспериментов (бросание монет и игральных костей, игры в карты, выборки шаров из урн, схема независимых испытаний, бросание точек на отрезок, задачи лотерей и рулеток, задачи стрельб и т. д.). В этом случае часто полагаются на интуицию, которая сильно зависит от исследователя и может быть неодинаковой. На этом строятся различные парадоксы в теории вероятностей, которые порождают сомнения в объективности результатов этой теории.

Второй и наиболее распространенный подход [5–7], который называется теоретико-множественным, заключается в широком использовании абстрактной теории вероятностей, теории меры и функционального анализа. При таком подходе формулируются и решаются только такие проблемы и задачи, в которых имеется неоправданная математическая формализация и почти отсутствуют способы построения вероятностных моделей. Студенты, усвоившие такой курс, как правило, совершенно беспомощны в решении конкретных практических задач.

На кафедре прикладной теории вероятностей Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского накоплен богатый опыт апробирования третьего подхода в преподавании трёхсеместрового общего курса по основам вероятностного моделирования, теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов [8, 9]. Для построения и изучения свойств вероятностных моделей реальных процессов и явлений стохастического характера в этом подходе минимально и по необходимости используются результаты и приёмы абстрактной теории вероятностей, теории меры и функционального анализа. Наряду с вынужденной математической строгостью в программе первой части трёхсеместрового курса предусмотрено решение значительного числа прикладных задач на непосредственное построение и изучение вероятностных моделей, которые пробуждают и развивают интуицию вероятностно-статистического мировоззрения. Этот подход становится особенно актуальным в наше время, когда эффективное планирование деятельности государственных предприятий, прогнозирование ситуаций частных компаний на финансовых и товарных рынках, проведение избирательных кампаний в условиях жёсткой конкуренции требует вероятностно-статистического анализа данных, надёжных и обоснованных выводов и прогнозов. Всё это предъявляет новые требования к методам и уровню подготовки специалистов в области вероятностного моделирования, прикладной теории вероятностей и математической статистики. При этом основное внимание уделяется: проблеме задания и классификации реальных экспериментов, интуитивным понятиям допустимых, элементарных и наблюдаемых исходов, качественным и количественным признакам статистически устойчивых экспериментов, вопросу статистической зависимости и её математической формализации, методам построения и анализа адекватных стохастических моделей реальных процессов и явлений.

2. Классический подход в обучении основам теории вероятностей

В любой науке имеется ряд основных интуитивных понятий [1, 4]. Эти понятия не только не имеют точного определения, но и для каждого человека усовершенствуются в течение всей его жизни. Так, например, в геометрии основными неопределяемыми (интуитивными) понятиями являются точка, прямая. В механике – сила, масса, путь. Основным неопределяемым понятием в теории вероятностей при классическом подходе являются: *случайное событие*, *достоверное событие*, *невозможное событие*, *противоположные случайные события*, *несовместные случайные события*, *полная группа событий*, *благоприятные события данному событию*, *равновозможные события*, *частота* *случайного события, вероятность события, практически невозможное событие, практически достоверное случайное событие, практически невозможное случайное событие, независимые случайные события*. К сожалению, при таком подходе список интуитивных понятий непосредственно связан с некоторым множеством конкретных случайных экспериментов. Однако распространение этого списка понятий на другой класс случайных экспериментов приводит к различным парадоксам. Такая ситуация значительно тормозила дальнейшее развитие и применение теории вероятностей. Чтобы избежать такого рода парадоксов, последователи такого подхода начинают вводить разного рода аксиомы, определения и доказывают различные утверждения. Приведем примеры такого рода определений: 1) случайным событием называется факт, который может произойти либо не произойти; 2) два события называются несовместимыми, если они не могут произойти оба вместе; 3) случайное событие A называется независимым от события B, если появление события A не зависит от того, произошло событие B или нет; 4) случайной величиной называется величина, которая может принять то или иное значение.

Рассмотрим следующий вопрос. Будет ли дождь 9 мая 2016 года в Нижнем Новгороде? С точки зрения определения 1) такой факт является случайным событием. Однако этот вопрос не является предметом изучения в современной теории вероятностей, так как этот опыт является единичным и его нельзя повторить.

Парадокс Мизеса. Приведем теперь парадокс Мизеса, который использует определение 2). Некий теннисист может поехать на турнир либо в Москву, либо в Лондон. Причем турниры там происходят одновременно. Вероятность того, что он займет первое место в Москве, равна $p = 1/2$, а – в Лондоне $q = 0{,}3$. Вычислить вероятность того, что он займет где-то первое место. По условию эксперимента событие, которое заключается в том, что теннисист будет играть в Москве, и событие, которое состоит в том, что теннисист поедет в Лондон, являются несовместимыми. По теореме сложения искомая вероятность равна $0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$. Абсурдность такого решения становится очевидной, если взять численные значения для $p = 0{,}75$ и $q = 0{,}85$. Тогда имеем $p + q = 1{,}6 > 1$. В этом и заключается парадокс Мизеса. Решение этого забавного парадокса дано в учебнике [9, с. 162].

При классическом подходе часто полагаются на интуицию. Однако интуиция сильно зависит от субъекта. Приведем для пояснения этого утверждения несколько примеров.

Парадокс независимости. Бросаются две монеты. Обозначим через A и B выпадение герба на первой и на второй монете соответственно. Пусть С означает появление только одного герба. Независимость A и B интуиция принимает, но независимость A и C, B и C отвергает. В этой задаче для симметричных монет интуиция грубо ошибается.

Приведем еще забавный пример на удивительную ошибку интуиции исследователей. На одной карточке с обеих сторон написана буква A. На второй карточке с обеих сторон написана буква B. На третьей карточке с одной стороны написана буква A, а с другой – B. Выбирается наудачу карточка и кладется на стол. На видимой стороне выбранной карточки нарисована буква A. Найти вероятность, что на другой стороне будет тоже написана буква A. Интуиция всегда голосует за вероятность, которая ошибочно считается равной 1/2. Однако эта вероятность равна 2/3, так как случайно выбирается как карточка, так и её сторона. Поэтому получаем четыре не равновозможных простейших исхода.

Задача Даламбера. Наудачу симметричная монета бросается два раза. Найти вероятность того, что хотя бы раз появится герб (ожидаемое событие A).

По одной из легенд, Даламбер и его последователи решали эту задачу и рассуждали следующим образом. Герб появится либо при первом бросании, и в этом случае второе бросание не нужно, либо только при втором, либо герб совсем не выпадает. Всех элементарных случаев три. Из них благоприятствуют ожидаемому событию A только два. Следовательно, искомая вероятность равна 2/3. Но практика показывала другой результат. А именно: из 100 проведённых такого рода опытов приблизительно в 75 случаях появлялось событие A. Только в более позднее время стали подозревать, что такое решение является неверным.

Парадокс любовницы. Некоторый мужчина приходит на остановку такси и бросает симметричную монету. Если к моменту чисто случайного прибытия такси появляется впервые комбинация «00», то он навещает мать, если появляется впервые комбинация «01», то он навещает любовницу. В противном случае он едет домой. Интуиция говорит о том, что он одинаково часто будет навещать мать или любовницу. На самом деле он существенно чаще навещает любовницу.

Задача Де Мере (1607–1648). Наудачу бросается игральная кость два раза. Найти вероятность появления: 1) суммы очков 9; 2) суммы очков 10. Сумма очков девять может быть получена двумя различными способами: 1) при первом броске выпадает четыре очка, а при втором – пять очков; 2) при первом броске выпадает три очка, а при втором – шесть очков. Сумма очков десять может быть получена также двумя различными способами: 1) при первом броске выпадает четыре очка, а при втором – шесть очков; 2) при первом и втором бросках выпадает пять очков. Равенство числа указанных способов, при которых выпадает сумма очков девять или сумма очков десять, для многих игроков на интуитивном уровне означает, что шансы выигрыша игроков одинаковы. В этой задаче интуиция снова ошибается. В учебнике [9, с. 89] приводится подробное решение как указанных, так и большого числа аналогичных задач.

Исследователи при классическом подходе, имея одни и те же данные, приходят к совершенно разным результатам. Типичным примером такой ситуации является следующая задача Бертрана.

Парадокс Бертрана. Наудачу выбирается хорда в круге радиуса R. Найти вероятность того, что ее длина превосходит длину стороны вписанного в этот круг равностороннего треугольника. В этом примере для разных исследователей искомая вероятность равна: или 1/2 (рис. *а*)), или 1/3 (рис. *б*)), или 1/4 (рис. *в*)). В данной задаче интуиция различных исследователей может по-разному реагировать на слова «взятая наудачу хорда». В случае, показанном на рис. *а*), считаем, что хорды, взятые наудачу, всегда параллельны. В этом случае искомая вероятность равна 1/2. В случае, изображенном на рис. *б*), все хорды имеют одну общую точку, лежащую на окружности; тогда искомая вероятность будет равна 1/3. Если же точки пересечения каждой хорды с окружностью выбираются непреднамеренно, как в случае на рис. *в*), т. е. середина хорды будет произвольной точкой внутри окружности, то в этом случае искомая вероятность равна 1/4. Подробное исследование парадокса Бертрана приведено в учебнике [9, с. 106] при решении задачи о гончарном круге.

Классический подход развивает интуицию вероятностно-статистического мировоззрения. Однако требуется большая осторожность при изложении основ теории вероятностей. Нельзя допускать преподавателя к чтению лекции по теории вероятностей и математической статистике, используя только классический способ, если он не освоил аксиоматический подход Колмогорова.

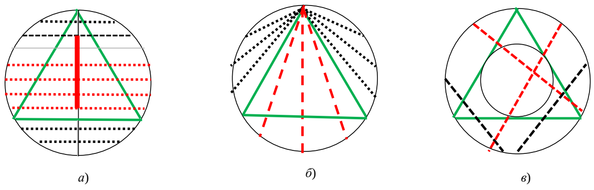

Рис.

3. Аксиоматический подход Колмогорова в обучении основам теории вероятностей и математической статистики

Существенные недостатки классического подхода привели к созданию совершенно нового подхода в первой половине двадцатого столетия. При таком подходе вероятности событий должны определяться исключительно с помощью аксиом и теорем безотносительно к тому, проводится или не проводится так называемый априорный эксперимент. Таким образом, мы приходим к построению абстрактной теории вероятностей, которая должна быть адекватной к произвольным изучаемым реальным явлениям случайного типа. Приводится небольшое число аксиом и определений. Все утверждения строго доказываются.

Основным математическим объектом является упорядоченная тройка вида $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$, которая называется основным вероятностным пространством. Здесь Ω есть некоторое множество элементов ω, $\mathcal{F}$ есть σ-алгебра подмножеств из Ω и, наконец, неотрицательная, нормированная и счетно-аддитивная функция $\mathbf{P}(\cdot)$ определена на $\mathcal{F}$. Далее рассматриваются произвольное измеримое пространство вида $(X, \mathfrak{R})$ и измеримое отображение $\xi(\omega)$: $\Omega \to X$. Функция $\xi(\omega)$ называется случайным элементом. Рассматривают такие случайные элементы, как случайная величина, случайный вектор, случайный процесс. Проблемами теории вероятностей являются: 1) изучение фундаментальных свойств функции $\mathbf{P}(\cdot)$: $\mathcal{F} \to [0, \infty)$; 2) вычисление неизвестных вероятностей некоторых событий через известные вероятности других событий; 3) формализация независимости событий и случайных элементов; 4) вычисление распределения случайных элементов и изучение свойств их распределений; 5) изучение таких зависимостей, как статистическая, корреляционная, функциональная между случайными элементами; 6) предельные теоремы и аппроксимация случайных элементов; 7) изучение свойств семейств вероятностных пространств и семейств случайных элементов; 8) задачи математической статистики, теории случайных процессов, теории информации и т. д.

Основными недостатками аксиоматического подхода являются: 1) потеря интуиции о шансах наступления событий; 2) невозможность вычисления значений вероятностей событий конкретного случайного эксперимента, так как задается только вероятность $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ достоверного события Ω и вероятность $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$ невозможного события $\varnothing$; 3) применение этого подхода главным образом связано с интерпретацией фундаментальных свойств пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$.

4. Подход на основе построения и изучения адекватных вероятностных моделей реальных случайных экспериментов и явлений

Подход на основе фундаментального понятия статистически устойчивого эксперимента E включает этапы: 1) построение теоретико-множественной модели статистически устойчивых экспериментов; 2) построение общей вероятностной модели; 3) строгое изложение математических основ курса с минимальным использованием аксиоматического подхода Колмогорова, теории меры и функционального анализа; 4) содержательная интерпретация основных положений с целью развития вероятностной интуиции у слушателей на основе подробного решения большого числа конкретных задач. Основными интуитивными понятиями при построении теоретико-множественной модели статистически устойчивых экспериментов являются: 1) эксперимент E, множество $\Sigma = \{u_1, u_2, ...\}$ условий u_1, u_2, ... его проведения и множество $\Im = \{A, B, C, A_1, A_2, \ldots\}$ всех его исходов $A, B, C, A_1, A_2, \ldots$; 2) статистически устойчивый эксперимент; 3) элементарный (тестовый, атомарный) исход; 4) пространство $\Im'$ всех элементарных исходов A'.

При построении теоретико-множественной модели статистически устойчивых экспериментов принимаются три аксиомы выбора элементарных исходов и дается описание результатов статистически устойчивого эксперимента. На основе этого строго определяются такие математические объекты: 1) элементарное случайное событие $\{\omega\}$, для которого выбрано описание или кодировка в виде символа ω; 2) пространство Ω описаний или кодировок всех элементарных исходов; 3) случайное событие $A \subset \Omega$, невозможное событие $\varnothing$ и достоверное событие Ω.

Между этими математическими объектами введены логические и функциональные связи, для которых приведена соответствующая интерпретация в терминах допустимых исходов эксперимента. Функциональные связи реализованы в виде теоретико-множественных операций над случайными событиями, которые удовлетворяют переместительному (коммутативному), сочетательному (ассоциативному), распределительному (дистрибутивному) законам и закону Де Моргана. Среди множества $\Im$ допустимых событий выделяется замкнутый относительно теоретико-множественных операций класс или σ-алгебра $\mathcal{F} \subset \Im$ так называемых наблюдаемых исходов или случайных событий. Каждому статистически устойчивому эксперименту E поставлена в соответствие упорядоченная пара $(\Omega, \mathcal{F})$ или теоретико-множественная модель. Эта модель изучает свойства эксперимента E с качественной точки зрения и позволяет решить такие важные проблемы, как: 1) указать допустимые исходы эксперимента E; 2) выбрать элементарные исходы и определить пространство Ω описаний каждого элементарного исхода; 3) представить каждый допустимый исход A в виде множества из описаний $\omega \in \Omega$, и тем самым A называть случайным событием; 4) определять равные события, соотношения между событиями и находить им интерпретацию через известные исходы эксперимента E; 5) выполнять теоретико-множественные операции над случайными событиями из множества $\Im$, порождать новые события и выяснять, как одни исходы с помощью теоретико-множественных операций выражаются через другие; 6) выделить множество $\mathcal{F}$ наблюдаемых исходов эксперимента E, замкнутое относительно теоретико-множественных операций над случайными событиями A.

Эта методика построения теоретико-множественной модели $(\Omega, \mathcal{F})$ для статистически устойчивого эксперимента E позволяет количественно измерить интуитивное представление субъекта о возможном наступлении некоторого случайного события A. В подобных случаях вероятности наблюдаемых случайных событий вычисляются исключительно из структуры самого априори заданного эксперимента E и с помощью аксиом и математических утверждений. Как правило, методика вычисления вероятностей рассматривает различные классы экспериментов, которые выделяются с помощью тех или иных ограничений**.** Итак, вероятность любого события $A \in \mathcal{F}$ вводится с помощью определения.

***Определение* 1.** Вероятностью любого события $A \in \mathcal{F}$ называется некоторое *неотрицательное число* $\mathbf{P}(A)$, которое для любой последовательности A_1, A_2, ... попарно непересекающихся случайных событий из $\mathcal{F}$ удовлетворяет *аксиоме счётной аддитивности* вида

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$$

и *аксиоме нормировки* $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

В этом определении указаны две аксиомы Колмогорова, и приводится также его первая аксиома неотрицательности вероятностной функции $\mathbf{P}(A)$, $A \in \mathcal{F}$. Основным математическим объектом, как и при втором подходе, является упорядоченная тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$. Однако при третьем подходе обязательно требуется построение теоретико-множественной модели $(\Omega, \mathcal{F})$. При этом элементарный результат $\{\omega\}$ характеризует эксперимент E с качественной точки зрения. Вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\})$ определяет шанс наступления элементарного исхода $\{\omega\}$.

При анализе того или иного случайного явления перед исследователем возникает трудный вопрос: как на возможность осуществления события A влияет дополнительное условие о том, что произошло некоторое событие $B \in \mathcal{F}$? Другими словами, очень важно установить связь между случайными наблюдаемыми исходами эксперимента E. В простейшем варианте между двумя событиями может быть причинно-следственная связь, когда наступление одного из событий ведёт к обязательному наблюдению другого или же, наоборот, когда наступление одного события исключает осуществление другого. В более сложном случае, когда такая причинно-следственная зависимость отсутствует, некоторая связь между событиями всё же имеется. Чтобы пояснить сказанное, приведём такой пример. Наудачу выбирается одна из двух урн, а затем из выбранной урны вытаскивается непреднамеренно один шар. В первой урне содержится 100 чёрных и 2 белых шара. Во второй урне имеется 100 белых и 2 чёрных шара. Пусть событие A означает выбор второй урны, а событие B состоит в том, что вынут белый шар. В этом примере было бы неверно утверждать, что одно из этих событий влечёт за собой другое или что, наоборот, одно из них исключает другое. С другой стороны, почти для всех очевидно, что между событиями A и B имеется какая-то зависимость. В самом деле, при отсутствии предварительной информации о цвете выбранного шара шанс наступления события A оценивается числом 1/2. Если же считать наступившим событие B, то, вероятнее всего, шар вынут из второй урны, т. е. шанс наступления события A при этом условии значительно повышается. Итак, возникает проблема определения характеристики зависимости одних случайных событий от других. Для решения этой проблемы необходимо дать определение.

***Определение* 2.** Условной (апостериорной, послеопытной) вероятностью осуществления события $A \in \mathcal{F}$ при наблюдении события B, для которого $\mathbf{P}(B) \neq 0$, называется число $\mathbf{P}(A \bigcap B)/\ \mathbf{P}(B)$, которое будем обозначать символом $\mathbf{P}(A \mid B)$.

При вычислении условной вероятности случайного события $A \in \mathcal{F}$ по формуле

$$\mathbf{P}(A \bigcap B)/\ \mathbf{P}(B)$$

необходимо, во-первых, очень чётко на содержательном уровне представлять событие B, во-вторых, уметь выражать событие B через множество описаний ω всех тех элементарных исходов из $\Im'$, которые одновременно могут происходить с B. Далее, нельзя заменять событие B некоторым событием $C \supset B$, хотя в этом случае событие C также произошло. В противном случае могут возникать ошибки и парадоксы. Для подтверждения этого приведём пример.

***Пример* 1**. Для социологического исследования случайным образом выбирается семья. В семье имеется двое детей. Трубку телефона, по которому социолог позвонил в эту семью, взял случайно мальчик. Найти вероятность того, что в семье оба мальчика, т. е. и другой ребёнок будет мальчик.

Очень часто (см., например, Lipschuz S. Theory and Problems of Probability. New York: McGraw-Hill Book Corp. 1968) эту задачу по существу решают следующим образом. В качестве пространства Ω описаний всех элементарных исходов выбирают множество {(м, м), (м, д), (д, м), (д, д)}. Здесь одноточечные множества {(м, м)}, {(м, д)}, {(д, м)} и, наконец, множество {(д, д)} соответственно означают, что в семье старший ребёнок и младший мальчики, старший мальчик и младшая девочка, старшая девочка и младший мальчик и, наконец, старшая и младшая девочки. Пусть событие B состоит в том, что трубку взял мальчик. Обозначим через A событие вида {(м, м)} и через C событие, которое заключается в том, что в семье есть мальчик, т. е. C = {(м, м), (м, д), (д, м)}. Ясно, что $C \supset B$, более того, многие ошибочно считают эти события равными. Тогда, по их мнению, условная вероятность вида $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A \mid C) = \mathbf{P}(A \bigcap C)/\mathbf{P}(\mathbf{C}) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(C) = (1/4) : (3/4) = 1/3$. Этот ответ противоречит нашей интуиции о том, что появление мальчика или девочки в качестве другого ребёнка, который не брал трубку телефона, имеет одну и ту же вероятность, равную 1/2.

Правильное решение этого примера можно дать, если использовать третий подход обучения основам теории вероятностей и математической статистики. Прежде всего необходимо понимать все условия проведения этого эксперимента, а именно в нашем эксперименте действуют два случайных механизма. Первый состоит в том, что некто случайным образом выбирает семью из двух детей, а второй – в том, что один из детей (старший или младший) случайно взял трубку телефона. В качестве пространства описаний всех элементарных исходов из $\Im'$ выберем множество Ω = {(м, м, 1), (м, м, 2), (м, д, 1), (м, д, 2), (д, м, 1), (д, м, 2), (д, д, 1), (д, д, 2)}. Здесь первые два элемента в каждой упорядоченной тройке представляют пол детей в последовательности их рождения, а третий элемент характеризует старшинство ребёнка, взявшего телефонную трубку. Третий элемент равен единице, если телефонную трубку снял старший ребёнок, и равен двойке в противном случае. При таком подходе A = {(м, м, 1), (м, м, 2)}, B = {(м, м, 1), (м, м, 2), (м, д, 1), (д, м, 2)}, C = {(м, м, 1), (м, м, 2), (м, д, 1), (м, д, 2), (д, м, 1), (д, м, 2)} и, значит, $C \supset B$, $C \neq B$, $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(B) = (2/8):(4/8) = 1/2$, $\mathbf{P}(A \mid C) = \mathbf{P}(A \cap C)/\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(C) = (2/8):(6/8) = 1/3$, что соответствует нашей интуиции. Заметим, что при первом решении не удается представить событие B через элементы множества Ω = {(м, м), (м, д), (д, м), (д, д)}.

Однако каждому элементарному случайному событию опыта можно дать и количественную характеристику. В этом случае можно говорить, что эксперимент E характеризуется с количественной точки зрения. С этой целью, как правило, над элементарными исходами статистически устойчивых экспериментов с помощью приборов (инструментов) проводят различные измерения. Результатом этих измерений обычно являются некоторые числа. Приведём следующие примеры.

***Пример* 2**. Опыт состоит в наблюдении процесса распада некоторого количества радиоактивного вещества. Например, химический элемент радий (Ra) превращается в химический элемент радон (Rn) и при этом излучается альфа-частица – ядро атома гелия (He). С помощью счётчика Гейгера – Мюллера в течение десятиминутного интервала фиксируется число распавшихся атомов. Это число — количественная характеристика наблюдаемого элементарного результата данного эксперимента. Возможными значениями числа распавшихся атомов за каждые десять минут могут быть все неотрицательные целые числа.

***Пример* 3**. Эксперимент заключается в испытании некоторого узла космического корабля в течение двухсот часов непрерывной работы. Определяется время работы узла до возникновения отказа. В этом эксперименте количественная характеристика результата измерения его элементарных исходов может принимать значения в отрезке [0, 200] .

В силу этого измеримое отображение $\xi(\omega)$: $\Omega \to X$, например случайная величина $\xi(\omega)$ при третьем подходе преподавания теории вероятностей, рассматривается как математическая модель измерителя (прибора, инструмента). Основная проблема заключается в изучении как вероятностных свойств измерителей, так и их зависимостей.

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Академия, 2003.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М.: Академия, 2003.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2005.
4. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
5. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: ФАЗИС, 1998.
6. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
7. Ширяев А.Н. Вероятность – 1, 2. М.: МЦНМО, 2004.
8. Федоткин М.А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики. М.: Высшая школа, 2006.
9. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. М.: Наука – Физматлит, 2012. 608 с.

ANALYSIS OF THE METHODS FOR TEACHING PROBABILITY THEORY

M.A. Fedotkin

We present an analysis of various approaches to teaching fundamental and applied basics of the modern probability theory. This work contains only the necessary information from the probability theory, which ensures apprehensibility and necessary mathematical rigor in the presentation of the material. A large number of problems with their detailed solutions and comments contribute to the development of skills in applying the probability theory methods with the use of computer technologies.

Keywords: probabilistic modeling, random elementary event, probability space, measures for elementary outcomes, random variable.

References

1. Venttsel' E.S. Teoriia veroiatnostei. M.: Akademiia, 2003.
2. Venttsel' E.S., Ovcharov L.A. Zadachi i uprazhneniia po teorii veroiatnostei. M.: Akademiia, 2003.
3. Gnedenko B.V. Kurs teorii veroiatnostei. M.: Editorial URSS, 2005.
4. Sevast'ianov B.A. Kurs teorii veroiatnostei i matematicheskoi statistiki. M. – Izhevsk: Institut komp'iuternykh issledovanii, 2004.
5. Kolmogorov A.N. Osnovnye poniatiia teorii veroiatnostei. M.: FAZIS, 1998.
6. Borovkov A.A. Teoriia veroiatnostei. M.: Editorial URSS, 1999.
7. Shiriaev A.N. Veroiatnost' – 1, 2. M.: MTsN-MO, 2004.
8. Fedotkin M.A. Osnovy prikladnoi teorii veroiatnostei i statistiki. M.: Vysshaia shkola, 2006.
9. Fedotkin M.A. Modeli v teorii veroiatnostei. M.: Nauka – Fizmatlit, 2012. 608 s.