УДК 519.6

# МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ЭКОНОМИКЕ

© 2014 г. *М.В. Маркина*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

markinamv6213@yandex.ru

*Поступила в редакцию 03.04.2014*

Демонстрируется численный метод решения двухкритериальных многоэкстремальных задач с ограничениями, который аппроксимирует множество Парето с заданной точностью. Метод основан на информационно-статистическом подходе к глобальной оптимизации. Обсуждаются ситуации, когда математическая модель экономической проблемы является задачей многокритериальной оптимизации.

*Ключевые слова:* многокритериальные задачи, оптимальность по Парето, информационно-статистический подход, аппроксимация множества Парето.

## Введение

Многокритериальные задачи возникают при множественности поставленных целей. В качестве критериев принимают степень достижения каждой цели. Рассмотрим некоторые примеры типичных постановок многокритериальных задач оптимизации в экономике.

- Определить необходимое количество ресурса (средств) и рациональный способ его использования. Примером такой постановки служит задача проектирования оборудования для изготовления товара, характеризуемого стоимостью производства (первый критерий) и максимальным сроком службы (второй критерий).
- Оценить эффективность сложной экономической системы, функционирующей в различных условиях. В этом случае частным критерием является эффективность системы, работающей при $i$-м варианте условия.
- Оценить эффективность экономической системы по нескольким показателям. При необходимости принятия решения по инвестиционному проекту его следует оценивать по всем показателям (NPV, IRR, рентабельности и др.).

В работе [1] рассматривается задача построения математической модели для оценки оптимальной стратегии развития субъекта экономики. Объектом исследования статьи являются инвестиционные проекты в регионе. Рассматривается ситуация, когда объявлен конкурс на создание новых предприятий на территории региона. Потенциальные инвесторы предлагают проекты, опираясь на собственные средства и возможные кредиты. Ставится задача выбора лучшего проекта с учетом следующих факторов: время реализации проекта, увеличение дохода региона, появление новых рабочих мест, изменение демографической ситуации и ситуации на рынке труда, возможные экологические последствия. Предложенная в [1] математическая модель является многокритериальной задачей с нелинейными критериями и линейными ограничениями.

- Оценить доходность инвестиционного портфеля и его риск. В этом случае математическая модель управления инвестиционным портфелем с учетом риска будет бикритериальной задачей оптимизации [2].
- Выбрать наилучший вариант организации поставок сырья, например, из нескольких доступных анализируемых вариантов. При этом в качестве частных критериев могут выступать следующие: минимизация ожидаемых годовых издержек, обусловливаемых соответствующими расстояниями и затратами на перевозки; минимизация ожидаемых годовых издержек, обусловливаемых форс-мажорными ситуациями у поставщика (учет влияния факторов надежности); минимизация оценки годовых издержек, обусловливаемых возможными срывами поставок из-за погодных условий и т.д. Данная задача является примером задачи логистики. В работе [3] рассматриваются различные постановки задач в логистике, решение которых сводится к решению многокритериальных задач оптимизации.

## Математическая модель бикритериальной задачи оптимизации

Рассмотрим одномерную задачу векторной оптимизации

$$(f_1(x), f_2(x)) \to \min_{x\in D}$$
$$D = \{x \in [a,b], g_j(x) \le 0, 1 \le j \le m\}. \quad (1)$$

Функции $f_i(x)$, $1 \le i \le 2$, $g_j(x)$, $1 \le j \le m$, должны удовлетворять условию Липшица и могут быть многоэкстремальными.

В качестве решения задачи принимается множество эффективных по Парето точек.

Допустимая точка $x^*$ является оптимальной по Парето, если среди всех точек, принадлежащих области допустимых решений $D$, нет ни одной точки $x$, которая доминировала бы над точкой $x^*$, т.е. для критериев выполняются неравенства

$$f_i(x^*) \le f_i(x),\ i=1,2,$$

и как минимум одно из неравенств является строгим.

Точки из множества Парето не могут сравниваться по векторному критерию эффективности. Для любых двух Парето-оптимальных точек $x^*$ и $x^{**}$ нельзя улучшить ни одного из частных скалярных критериев, не ухудшая значение хотя бы одного из оставшихся критериев.

Множество Парето является подмножеством множества слабо эффективных точек (множества Слейтера).

Допустимая точка $x^*$ является оптимальной по Слейтеру, если не существует решения $\hat{x} \in D$, такого, что

$$f_i(\hat{x}) < f_i(x^*),\ i = 1, 2.$$

Множество Парето, отображенное в пространство критериев эффективности, называется областью компромиссов.

Выбор единственного решения из множества Парето осуществляется лицом, принимающим решение (ЛПР). С точки зрения ЛПР возможны три подхода к решению многокритериальной задачи:

- соглашение о компромиссе принимается ЛПР до решения задачи (например, задание весовых коэффициентов свертки критериев);
- соглашение о компромиссе принимается ЛПР в процессе решения задачи (человеко-машинная процедура принятия решения) (например, задание уступок в методе последовательных уступок);
- соглашение о компромиссе принимается ЛПР после решения задачи. При таком подходе в процессе решения строится большое число точек Парето, как можно более равномерно распределенных в пространстве критериев эффективности. ЛПР выбирает одну из полученных Парето-точек, имея полную информацию.

Предлагается алгоритм решения многокритериальных задач, основанный на третьем подходе.

Известно, что задача (1) может быть заменена задачей

$$\min\{f_2(x) : x \in D; f_1(x) \le q\},\quad q \in [\min_{x\in D}\{f_1(x), +\infty). \tag{2}$$

В [4] приведено доказательство того, что решение задачи (2) при некотором фиксированном $q$ является слабо эффективным решением задачи (1). Для получения множества слабо эффективных решений необходимо решить задачи с различными значениями $q$. Традиционные методы для получения какой-либо Парето-точки каждый раз решают новую задачу.

В работе предлагается решать несколько различных задач вида (2) одновременно, используя информационно-статистический подход к решению многокритериальных задач оптимизации [5–8].

## Одномерный алгоритм оценки множества эффективных решений бикритериальных многоэкстремальных задач с невыпуклыми ограничениями

В представленном ниже алгоритме одновременно решается сразу несколько задач с разными параметрами $q$. Множество предельных точек алгоритма аппроксимирует множество Слейтера. Точность аппроксимации задаётся шагом $h$, который рекомендуется выбирать из условия $h < (f_1^{\max} - f_1^{\min})$, где $f_1^{\max}$ и $f_1^{\min}$ соответственно наибольшее и наименьшее значение 1-го критерия. Вариант формирования набора параметров $q$ может быть следующим:

$$q_i = q_{i-1} + h,\quad i = 1,2,...,\quad q_0 = f_1^{\min}. \tag{3}$$

Каждая итерация алгоритма включает определение индекса $1 \le \nu(x_i) \le m+1$ точки $x_i$, $1 \le i \le k$, равного номеру первого нарушенного ограничения. Если $\nu(x_i) < m+1$, то точке испытания $x_i$ соответствует значение $z_i = g_\nu(x_i)$. Если $\nu(x_i) = m+1$ (т.е. все ограничения вида $g_i(x) \le 0$ выполняются), то в точке испытания $x_i$ вычисляются значения критериев $z_{ji} = f_j(x_i)$, $1 \le j \le 2$.

Граничным точкам присваиваются нулевые индексы, значения функций в них не вычисляются. Выбор точки $x^{k+1}$, $k \ge 2$, любой следующей итерации определяется правилами:

1) точки $x^1,...,x^k$ предшествующих итераций перенумеровываются нижними индексами в порядке возрастания координаты, т.е.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_i < x_k < x_{k+1} = b\ ; \tag{4}$$

2) определяются множества

$$I_0 = \{0, k+1\},$$

$$I_\nu = \{i : 1 \le i \le k, \nu = \nu(x_i)\}, \tag{5}$$

содержащие номера всех точек, индекс которых равен $\nu$; множества

$$S_\nu = \{I_0 \cup \ldots \cup I_{\nu-1}\},\ 1 \le \nu \le m+1, \quad (6)$$

содержащие номера всех точек, индексы которых меньше $\nu$; множества

$$T_\nu = \{I_{\nu+1} \cup \ldots \cup I_{m+1}\},\ 1 \le \nu \le m+1, \quad (7)$$

содержащие номера всех точек, индексы которых больше $\nu$;

3) вычисляются максимальные абсолютные значения относительных первых разностей: если $I_{m+1} = 0$, то

$$\mu'_\nu = \max\{|z_i - z_p|/(x_i - x_p),\ i, p \in I_\nu,\ i > p\},\quad 1 \le \nu \le m; \quad (8)$$

если $I_{m+1} \ne 0$, то вычисляются как $\mu'_\nu$ так и $\mu_j$, где

$$\mu_j = \max\{|z_{ji} - z_{jp}|/(x_i - x_p),\ i, p \in I_{m+1},\ i > p\},\quad 1 \le j \le 2; \quad (9)$$

причём в случаях, когда $\operatorname{card} I_\nu < 2,\ 1 \le \nu \le m+1,$ или когда $\mu'_\nu$ $(\mu_j)$ оказываются равными нулю, то принимается, что $\mu'_\nu = 1$ $(\mu_j = 1)$;

4) для всех непустых множеств $I_\nu,\ 1 \le \nu \le m,$ определяются величины

$$z^*_\nu = \begin{cases} 0, & T_\nu \ne 0; \\ \min\{z_i : i \in I_\nu\}, & T_\nu = 0; \end{cases} \quad (10)$$

5) каждой точке $x_i,\ 1 \le i \le k$, индекс которой $\nu(x_i) > m,$ сопоставляется вектор $q^i = (q^i_1, q^i_2)$, где

$$q^i_j = E[(z_{ji} - z_{j\min})/h_j]h_j + z_{j\min},\ j = 1, \quad (11)$$
$$q^i_2 = \infty;$$

6) для каждого интервала $(x_{i-1}, x_i),\ 1 \le i \le k+1,$ вычисляется характеристика $R(i)$ ($r > 1$ – параметр метода), причём если $\max\{\nu(x_{i-1}),\ \nu(x_i)\} \le m$, то

$$R(i) = \begin{cases} (x_i - x_{i-1}) + \dfrac{(z_i - z_{i-1})^2}{(\mu'_\nu)^2 (x_i - x_{i-1})^2} - \\ - \dfrac{2(z_i + z_{i-1} - 2z^*_\nu)}{r\mu'_\nu},\ \nu(x_{i-1}) = \nu(x_i), \\ 2(x_i - x_{i-1}) - 4(z_i - z^*_\nu)/r\mu'_\nu, \\ \qquad \nu(x_{i-1}) < \nu(x_i), \\ 2(x_i - x_{i-1}) - 4(z_{i-1} - z^*_\nu)/r\mu'_\nu, \\ \qquad \nu(x_i) < \nu(x_{i-1}). \end{cases} \quad (12)$$

В противном случае

$$R(i) = \begin{cases} \max\left\{x_i - x_{i-1} + \dfrac{(z_{ji} - z_{ji-1})^2}{\mu_j^2 (x_i - x_{i-1})} - \right. \\ \left. - \dfrac{2(z_{ji} + z_{ji-1} - 2\max\{q_j, z'_{j\min}\})}{r\mu_j}\right\}, \\ \qquad 1 \le j \le 2,\ \nu(x_{i-1}) = \nu(x_i); \\ \max\left\{2(x_i - x_{i-1}) - \dfrac{4(z_{ji} - \max\{q_j, z'_{j\min}\})}{r\mu_j}\right\}, \\ \qquad 1 \le j \le 2,\ \nu(x_{i-1}) < \nu(x_i); \\ \max\left\{2(x_i - x_{i-1}) - \dfrac{4(z_{ji-1} - \max\{q_j, z'_{j\min}\})}{r\mu_j}\right\}, \\ \qquad 1 \le j \le 2,\ \nu(x_i) < \nu(x_{i-1}); \end{cases} \quad (13)$$

$$q_j = \min\{q^i_j, q^{i-1}_j\},$$

$$z'_{j\min} = \begin{cases} \min\{z_{1i} : 1 \le i \le k\},\ j = 1; \\ \min\{z_{2i} : z_{1i} \le q_1 + h,\ 1 \le i \le k\},\ j = 2; \end{cases} \quad (14)$$

7) определяется интервал $(x_{t-1}, x_t)$, имеющий максимальную характеристику, т.е.

$$R(t) = \max\{R(i) : 1 \le i \le k+1\}; \quad (15)$$

8) очередная итерация осуществляется в точке

$$x^{k+1} = \begin{cases} (x_t + x_{t-1})/2,\ \nu(x_{t-1}) \ne \nu(x_t); \\ (x_t + x_{t-1})/2 - (z_t - z_{t-1})/2r'_\nu\mu'_\nu, \\ \qquad \nu(x_{t-1}) = \nu(x_t) < m+1; \\ (x_t + x_{t-1})/2 - (z_{jt} - z_{jt-1})/2r_j\mu_j, \\ \qquad (\nu(x_{t-1}) = \nu(x_t) = m+1)\ \&\ (R(t) = R_j(t)), \end{cases} \quad (16)$$

где за $R_j(t)$ обозначена характеристика, использующая значения $j$-го критерия.

Алгоритм можно дополнить условием остановки (по заданной точности $\varepsilon > 0$), прекращающим итерации при выполнении неравенства

$$x_t - x_{t-1} \le \varepsilon. \quad (17)$$

## Достаточные условия сходимости алгоритма

**Теорема**. Пусть

1) множество $S(q)$ есть множество решений задачи (2) при некотором наборе параметров $q$;

2) функции $g_i(x), x \in [a_i, b_i],\ i = \overline{1, m},$ допускают липшицевые с соответствующими константами $K^g_i$ продолжения $G_i(x), x \in [a_i, b_i]$, т.е. $g_i(x) = G_i(x), x \in [a_i, b_i],\ 1 \le i \le m$;

3) $f_1(x), f_2(x)$, определенные в непустой допустимой области $D$, также допускают липшицевые с соответствующими константами $K_1$, $K_2$ продолжения $F_j(x)$, $x \in [a, b]$;

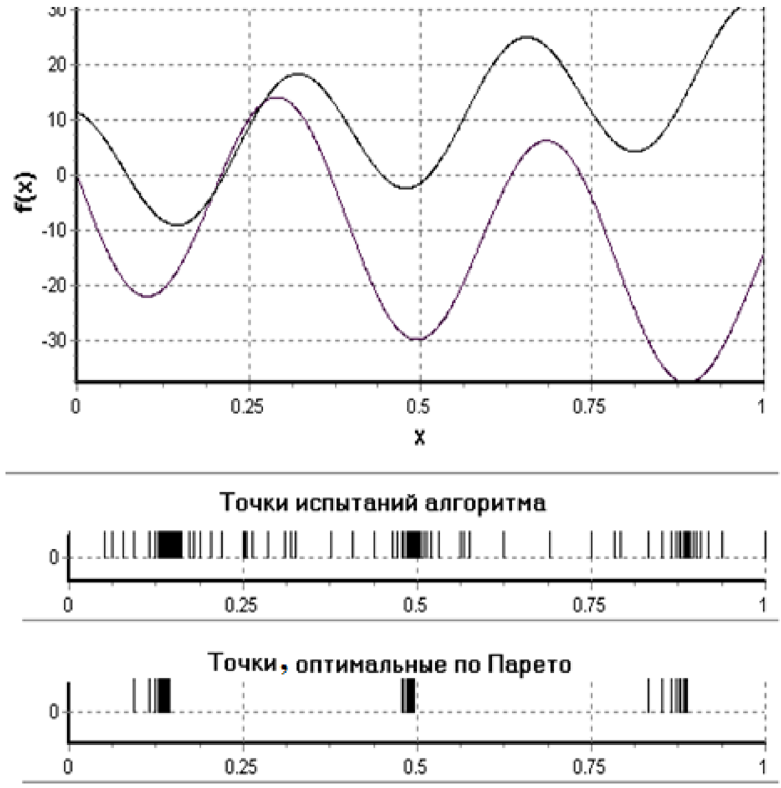


Рис. 1

4) начиная с некоторого шага для величин $\mu_\nu^j$, $\mu_j$ из (8) (9), параметра $r$ алгоритма и констант Липшица $K_i^g$, $K_j$, $1 \le j \le 2$, справедливо

$r\mu_\nu^i > 2K_i^g$, $1 \le i \le m$; $r\mu_j > 2K_j$, $1 \le j \le 2$. (18)

Тогда множество предельных точек последовательности $\{x^k\}$, порождаемой алгоритмом при точности ε=0 в условии остановки (17), содержит в себе множество $S_q$.

Доказательство теоремы приведено в [9].

### Тестовый пример работы одномерного алгоритма

Программная реализация метода выполнена на языке C++ в среде Microsoft Visual Studio.

Постановка задачи:

$(f_1(x), f_2(x)) \to \min$

$f_1(x) = $ -(20*$x$+12*sin(16*$x$)),

$f_2(x) = $ 20*$x$+12*sin(6*π*($x$+0.1)).

Шаг аппроксимации $h$=8; точность в условии остановки ε=0.0001.

На рис. 1 представлены графики функций, точки испытаний и отобранные из них эффективные по Парето точки. Общее число испытаний – 92. Число отобранных из них эффективных точек, оптимальных по Парето, – 31.

На рис. 2 представлено распределение паретовских точек в плоскости критериев.

### Редукция размерности пространства

Возможный подход к численному анализу многомерных задач вида (2) состоит в сведении их к эквивалентным задачам с помощью однозначных непрерывных отображений отрезка [0,1] вещественной оси на $n$-мерный гиперинтервал $D$. Подробное исследование свойств таких отображений и алгоритмов их построения содержится в [4].

Указанная схема редукции сопоставляет многомерной липшицевой с константой $L$ функции $f(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in D$, одномерную функцию $F(x) = f(y(x)), x \in [0,1]$, удовлетворяющую равномерному условию Гельдера

$$\left|F(x^1) - F(x^2)\right| \le K(\left|x^1 - x^2\right|)^{1/n},\ x^1, x^2 \in [0,1], \quad (19)$$

с коэффициентом $K \le 4Ln^{1/2}$.

### Тестовый пример работы многомерного алгоритма

Постановка задачи:

$$(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})) \to \min$$

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{4} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2^2}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2) = (x_2 - \frac{5.1}{4\pi}x_1 - 6)^2 + 10(1 - \frac{1}{8\pi})\cos(x_1) + 20,$$

$$-2.5 \le x_i \le 2.5,\ i = 1,2.$$

Шаг аппроксимации $h$=1.

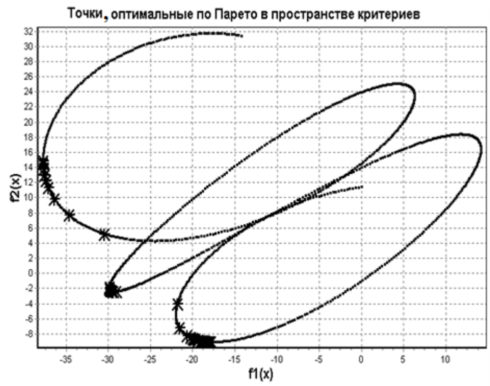


Рис. 2

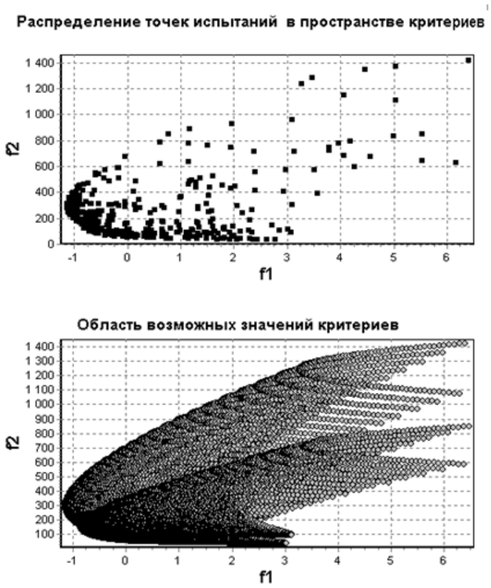


Рис. 3

На рис. 3 (верхний рисунок) представлены точки испытаний в пространстве критериев. Рисунок показывает сходимость метода к паретовской границе. Условие остановки выбрано по количеству испытаний. Количество испытаний – 300. Количество эффективных оптимальных по Парето точек – 32.

На рис. 3 (нижний рисунок) представлено множество возможных значений критериев (всё множество векторных оценок).

*Список литературы*

1. Жуков А.В. Модель многокритериальной оценки оптимальной стратегии развития субъекта экономики // Вестник ТвГУ. Серия прикладная математика. 2011. С. 105–124.

2. Мищенко А.В., Попов А.А. Двухкритериальная задача оптимизации инвестиционного портфеля в условиях ограничения на финансовые ресурсы // Менеджмент в России и за рубежом. 2001. Вып. 1.

3. Бродецкий Г.Л. Экономико-математические методы и модели в логистике. Процедуры оптимизации. М.: Академия, 2011. 272 с.

4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 155 с.

5. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: Наука, 1978.

6. Маркина М.В. Аппроксимация множества Парето в бикритериальных задачах оптимального проектирования механических конструкций // В межвуз. сб.: Проблемы прочности и пластичности. 2011. Вып. 73. С. 167–179.

7. Malkov V.P., Markina M.V. Step-by-step parametrical optimization. Manual. Nizhni Novgorod: Nizhni Novgorod University Press, 2001. 106 p.

8. Strongin R.G., Markin D.L., Markina M.V. Reduction of multi-extremum multi-criterion problems with constrants to unconstrained optimization problems: theory and algorithms // Computational and mathematical modeling. 1995. Vol. 6. № 4. P. 242–248. Plenum publishing corporation.

9. Маркина М.В. Решение бикритериальных задач многоэкстремальной многомерной условной оптимизации // Краевые задачи и математическое моделирование. Тематич. сб. научн. ст. в 3 т. Т. 2 / НФИ ГОУ ВПО «КемГУ». Под общ. ред. В.О. Каледина. Новокузнецк, 2010. С. 178–188.

## MULTICRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS IN ECONOMICS

***M.V. Markina***

The article demonstrates a numerical technique to solve two-criteria multiextremal problems with constraints which approximates a Pareto set with a given accuracy. The technique is based on the information-statistical approach to global optimization. Some cases are discussed when a mathematical model of an economic problem is the problem of multicriteria optimization.

*Keywords:* multicriteria problems, Pareto optimal solutions, information-statistical approach, Pareto set approximation.

*References*

1. Zhukov A.V. Model' mnogokriterial'noj ocenki optimal'noj strategii razvitiya sub"ekta ehkonomiki // Vestnik TvGU. Seriya prikladnaya matematika. 2011. S. 105–124.
2. Mishchenko A.V., Popov A.A. Dvuhkriterial'naya zadacha optimizacii investicionnogo portfelya v usloviyah ogranicheniya na finansovye resursy // Menedzhment v Rossii i za rubezhom. 2001. Vyp. 1.
3. Brodeckij G.L. Ehkonomiko-matematicheskie metody i modeli v logistike. Procedury optimizacii. M.: Akademiya, 2011. 272 s.
4. Podinovskij V.V., Nogin V.D. Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nyh zadach. M.: Nauka, 1982. 155 s.
5. Strongin R.G. Chislennye metody v mnogoehkstremal'nyh zadachah. M.: Nauka, 1978.
6. Markina M.V. Approksimaciya mnozhestva Pareto v bikriterial'nyh zadachah optimal'nogo proektirovaniya mekhanicheskih konstrukcij // V mezhvuz. sb.: Problemy prochnosti i plastichnosti. 2011. Vyp. 73. S. 167–179.
7. Malkov V.P., Markina M.V. Step-by-step parametrical optimization. Manual. Nizhni Novgorod: Nizhni Novgorod University Press, 2001. 106 p.
8. Strongin R.G., Markin D.L., Markina M.V. Reduction of multi-extremum multi-criterion problems with constrants to unconstrained optimization problems: theory and algorithms // Computational and mathematical modeling. 1995. Vol. 6. № 4.1995. R. 242–248. Plenum publishing corporation.
9. Markina M.V. Reshenie bikriterial'nyh zadach mnogoehkstremal'noj mnogomernoj uslovnoj optimizacii // Kraevye zadachi i matematicheskoe modelirovanie. Tematich. sb. nauchn. st. v 3 t. T. 2 / NFI GOU VPO «KemGU». Pod obshch. red. V.O. Kaledina. Novokuzneck, 2010. 235. S. 178–188.