УДК 512.554.31

Дифференцирования классических алгебр Ли над полем характеристики 2

Д. С. Пермяков

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

В работе описаны дифференцирования классических алгебр Ли над полем характеристики 2. Под классической алгеброй Ли над полем характеристики $p>0$ мы понимаем алгебру Ли, полученную редукцией по модулю p порядка Шевалле комплексной простой алгебры Ли, либо ее фактор-алгебру по центру. Основной результат работы следующий: найдены размерности пространств внешних дифференцирований всех рассматриваемых алгебр[1].

1. Введение

Пусть $L_{\mathbb{C}}$ – классическая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ ранга l, H – ее подалгебра Картана, R – система корней алгебры $L_{\mathbb{C}}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ – простые корни, $W(R)$ – группа Вейля. Тогда $L_{\mathbb{C}} = H \bigoplus\limits_{\alpha\in R} L_\alpha$. Через $<\alpha,\beta>$ для α, β из R будем обозначать число Картана $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$. Пусть $L_{\mathbb{Z}}$ – целочисленная линейная оболочка базиса Шевалле $h_i,\ i=\overline{1,l},\ e_\alpha,\ \alpha\in R$. Определим классическую алгебру Ли L над полем F характеристики 2: $L = L_{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}} F$. Если алгебра $L_{\mathbb{C}}$ имеет тип $A_l,\ l\equiv 1(mod\ 2),\ B_l,\ C_l,\ D_l,\ E_7$, то алгебра L имеет нетривиальный центр, который в дальнейшем будем обозначать $Z(L)$. Под классической алгеброй Ли над F будем также понимать фактор-алгебру $\overline{L} = L/Z(L)$. Система корней R и группа $W(R)$ относятся как к алгебрам Ли L, так и к их факторалгебрам $\overline{L} = L/Z(L)$. Алгебра $\overline{L}$ раскладывается в прямую сумму $\overline{L} = \overline{H} \bigoplus\limits_{\alpha\in R} \overline{L_\alpha}$, где $\overline{L_\alpha}$ – образы соответствующих подпространств при проекции $\pi: L\to\overline{L}$.

Для $\alpha,\beta\in R$ число Картана $<\alpha,\beta>$ может быть вычислено как в поле $\mathbb{R}$, так и в поле F. Если не оговорено противное, то все соотношения между числами Картана выполняются в поле F. В описании систем корней и нумерации корней в схеме Дынкина будем следовать [1]. Через $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_l$ обозначим ортонормированный базис пространства R^l.

Пространство внешних дифференцирований отождествляется с первой группой когомологий $H^1(L,L) = Z^1(L,L)/B^1(L,L)$, где $Z^1(L,L)$ – пространство

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты №№ 02-01-00725, 05-01-00580.

коциклов, $B^1(L,L)$ – пространство кограниц, и раскладывается в прямую сумму: $H^1(L,L)=\bigoplus\limits_{\mu} H^1_{\mu}(L,L)$, где $H^1_{\mu}(L,L)$ – пространство внешних дифференцирований веса μ относительно максимального тора соответствующей группы Шевалле (см. [5]). Для вычисления когомологий используется схема, разработанная в [3]. Из тривиальности действия алгебры Ли L на $H^1(L,L)$ следует, что все веса содержатся во множестве $\Lambda(R)=\{\mu\in Q(R)\mid \forall\ \gamma\in R$ $<\mu,\gamma>\equiv 0(2),\ \exists\ \alpha,\beta\in\{R\cup 0\},\ \mu=\alpha+\beta\}$. Описание множества $\Lambda(R)$ для рассматриваемых систем корней содержится в предложении 2.1. пункта 2. Пункт 3 содержит описание дифференцирований нулевого веса. В пункте 4 рассматриваются дифференцирования веса $\pm 2\varepsilon_i,\ i=\overline{1,l}$ алгебр Ли типа C_l и D_l. В пункте 5 описаны дифференцирования веса $2\delta,\ \delta\in R$. Наконец, пункт 6 содержит описание дифференцирований алгебры Ли типа G_2, а также в нем сформулированы без доказательства остальные полученные результаты.

Размерности всех пространств внешних дифференцирований приведены в таблице 1.

Таблица 1

Тип системы R	l	$\dim H^1(L,L)$	$\dim H^1(\overline{L},\overline{L})$
$A_l,\ l\geq 1$	1	4	4
	3	1	7
	$l>3,\ l\equiv 1(2)$	1	1
	$l\equiv 0(2)$	0	0
$B_l,\ l\geq 2$	2	5	6
	3	1	16
	$l>3$	1	$2l+2$
$C_l,\ l\geq 3$		$2l+1$	1
$D_l,\ l\geq 4$	4	2	26
	$l>4,\ l\equiv 0(2)$	2	$2l+2$
	$l\equiv 1(2)$	1	$2l+1$
$E_6,\ E_8,\ F_4$		0	0
E_7		1	1
G_2		7	7

2. Веса группы $H^1(L,L)$

Для описания множества $\Lambda(R)$ используем лемму, доказательство которой приводится в [1].

Лемма 2.1. *Пусть $\alpha,\beta\in R$. Тогда $S=<\alpha,\beta>_{\mathbb{R}}\cap R$ является системой корней в $<\alpha,\beta>_{\mathbb{R}}$ ранга $r\leq 2$. Кроме того, в системе R можно выбрать базис $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_l$, содержащий базис системы S.*

П р е д л о ж е н и е 2.1.
a) Пусть R *– система корней одного из типов* $A_l,\ l\neq 3,\ B_l,\ l>4,\ E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4$. *Тогда* $\Lambda(R)=\{0\}\cup\{2\delta,\ \delta\in R\}$.
b) Пусть R *– система корней типа* A_3.
Тогда $\Lambda(R)=\{0\}\cup\{2\delta,\ \delta\in R\}\cup\{\pm\alpha_1\pm\alpha_3,\pm(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)\}$.
c) Пусть R *– система корней типа* B_2.
Тогда $\Lambda(R)=\{0\}\cup\{2\delta,\ \delta\in R\}\cup\{\pm\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\}$.
d) Пусть R *– система корней типа* B_3.
Тогда $\Lambda(R)=\{0\}\cup\{2\delta,\ \delta\in R\}\cup\{\pm\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\}$.
e) Пусть R *– система корней типа* B_4.
Тогда $\Lambda(R)=\{0\}\cup\{2\delta,\ \delta\in R\}\cup\{\pm\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4\}$.
f) Пусть R *– система корней типа* $C_l,\ l\geq 3$ *или* $D_l,\ l>4$.
Тогда $\Lambda(R)=\{0\}\cup\{2\delta,\ \delta\in R\}\cup\{\pm 2\varepsilon_i,\ i=\overline{1,l}\}$.
g) Пусть R *– система корней типа* D_4.
Тогда $\Lambda(R)=\{0\}\cup\{2\delta,\ \delta\in R\}\cup\{\pm 2\varepsilon_i,\ i=\overline{1,4}\}\cup\{\pm\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4\}$.

Доказательство. Пусть $\mu=\alpha+\beta\in\Lambda(R)$. Согласно лемме 2.1., $S=<\alpha,\beta>_{\mathbb{R}}\cap R$ является системой корней в $<\alpha,\beta>_{\mathbb{R}}$ ранга $r\leq 2$ и $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_l$ – базис системы R, содержащий базис системы S.

1) Если S – система типа A_1, то $\alpha=\pm\beta$, поэтому $\mu=0$ или $\mu=2\beta$. Пусть S – система корней типа A_2, δ_1,δ_2 – базис в S. Тогда $\mu=\alpha+\beta=n_1\delta_1+n_2\delta_2$. Так как $<\mu,\delta_1>=<\mu,\delta_2>=0$, то $n_1\equiv n_2\equiv 0(2)$. Последнее сравнение в системе типа A_2 возможно только тогда, когда $\alpha=\pm\beta$. Поэтому S не может быть системой типа A_2. Осталось рассмотреть варианты, когда S – система типа $A_1\times A_1$ или B_2.

2) Пусть R – однородная система корней (все корни имеют одинаковую длину). Тогда S – система типа $A_1\times A_1$: $S=\{\pm\delta_1,\pm\delta_2\}$, $<\delta_1,\delta_2>=0$ (в $\mathbb{R}$). Следовательно, $\mu=\alpha+\beta=\pm\delta_1\pm\delta_2$. Так как для любого δ из R $<\mu,\delta>=0$, то для любого k корень δ_k одновременно связан или не связан с обоими корнями δ_1,δ_2. Это возможно только в системах типа A_3 или D_l. Все корни α,β в A_3, для которых $<\alpha,\beta>=0$, следующие: $\alpha=\varepsilon_i-\varepsilon_j,\beta=\varepsilon_k-\varepsilon_s,\ i\neq j\neq k\neq s$. Тогда $\mu=\varepsilon_i-\varepsilon_j+\varepsilon_k-\varepsilon_s,\ i\neq j\neq k\neq s$. В системе типа D_l возможны следующие варианты:

$\alpha=\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j),\beta=\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_j),\ i<j$, тогда $\mu=\pm 2\varepsilon_k,\ k\in\{i,j\}$;

$\alpha=\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j,\beta=\pm\varepsilon_k\pm\varepsilon_s,\ i\neq j\neq k\neq s$, тогда $\mu=\alpha+\beta=\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j\pm\varepsilon_k\pm\varepsilon_s$. Если $l>4$, то можно подобрать корень δ такой, что $<\mu,\delta>\neq 0$. Остается случай $l=4,\ \mu=\pm\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4$.

3) Пусть R – система корней типа B_l, S – система типа B_2: $\{\delta_1,\delta_2\}$ – базис S, $<\delta_1,\delta_2>=-2,\ <\delta_2,\delta_1>=-1$. Тогда $\mu=\alpha+\beta=n_1\delta_1+n_2\delta_2$. Так как $<\mu,\delta_1>=<\mu,\delta_2>=0$, то $n_2\equiv 0(2)$. Все возможные случаи следующие:

$\alpha=\pm(\delta_1+2\delta_2),\ \beta=\pm\delta_1\ \Rightarrow\mu=\alpha+\beta=2\delta,\ \delta\in R$;

$\alpha = \pm(\delta_1 + \delta_2)$, $\beta = \pm\delta_2$. Из условий $< \delta_1, \delta_2 >= -2$, $< \delta_2, \delta_1 >= -1$ получим $\delta_2 = \mp\varepsilon_i$, $\delta_1 = \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $i \neq j$. Тогда $\mu = \pm\varepsilon_j \pm \varepsilon_i$, $i \neq j$. Если $l = 2$, то $\mu = \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \in \Lambda(R)$. Пусть $l > 2$. Тогда существует корень δ_k из подсистемы типа A_{l-1}, связанный с δ_1. Отсюда $< \mu, \delta_k >=< \delta_1, \delta_k >= 1$, что противоречит выбору μ.

4) Пусть R – система корней типа B_l, S – система корней типа $A_1 \times A_1$: $S = \{\pm\delta_1, \pm\delta_2\}, < \delta_1, \delta_2 >= 0$ (в $\mathbb{R}$). δ_1, δ_2 не связаны в схеме Дынкина, поэтому $l \geq 3$. Так как $\alpha \neq \pm\beta$, то $\mu = \alpha + \beta = \pm\delta_1 \pm \delta_2$.

Если $l = 3$, то расположение δ_1, δ_2 на схеме Дынкина следующее:

$$\overset{\delta_1}{\bullet} \;--\; \overset{\delta_3}{\bullet} \;\Rightarrow\; \overset{\delta_2}{\bullet}$$

Тогда $< \delta_1, \delta_2 >= 0$, $< \delta_1, \delta_3 >=< \delta_3, \delta_1 >= -1$, $< \delta_2, \delta_3 >= -1$, $< \delta_3, \delta_2 >= -2$. Из этих соотношений следует, что $\delta_1 = \pm\varepsilon_s \pm \varepsilon_t$, $\delta_2 = \pm\varepsilon_i$, $i \neq s \neq t$. Следовательно, $\mu = \pm\delta_1 \pm \delta_2 = \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3$. Легко проверить, что $\mu = \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \in \Lambda(R)$.

Если $l = 4$, то единственный вариант расположения δ_1, δ_2 в схеме Дынкина, при котором μ может принадлежать $\Lambda(R)$, следующий:

$$B_4 \quad \overset{\delta_1}{\bullet} \;--\; \overset{\delta_3}{\bullet} \;--\; \overset{\delta_2}{\bullet} \;\Rightarrow\; \overset{\delta_4}{\bullet}$$

Из соотношений $< \delta_2, \delta_4 >= -2$, $< \delta_4, \delta_2 >= -1$, $< \delta_1, \delta_3 >= < \delta_3, \delta_1 >= -1$, $< \delta_2, \delta_3 >=< \delta_3, \delta_2 >= -1$, $< \delta_1, \delta_4 >= 0$ получим $\delta_2 = \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $\delta_1 = \pm\varepsilon_s \pm \varepsilon_t, i \neq j \neq s \neq t$. Следовательно, $\mu = \pm\delta_1 \pm \delta_2 = \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$. Легко проверить, что $\mu = \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4 \in \Lambda(R)$.

Пусть $l > 4$. Для определенности будем считать, что δ_1 принадлежит подсистеме типа A_{l-1}. Тогда существует корень δ_k из подсистемы типа A_{l-1}, связанный с δ_1 и не связанный с δ_2. В этом случае $< \mu, \delta_k >= < \pm\delta_1 \pm \delta_2, \delta_k >= 1$, а это противоречит тому, что $\mu \in \Lambda(R)$. Таким образом, при $l > 4$ S не может быть системой типа $A_1 \times A_1$.

5) Пусть R – система корней типа F_4, δ_1, δ_2 – базис в S. Если S – система типа $A_1 \times A_1$, то при любом из возможных вариантов расположения δ_1, δ_2 в схеме Дынкина найдется корень δ_k, для которого $< \mu, \delta_k >=< \pm\delta_1 \pm \delta_2, \delta_k >= 1$:

$$\overset{\delta_1}{\bullet} \;--\; \bullet \;\Rightarrow\; \overset{\delta_2}{\bullet} \;--\; \overset{\delta_k}{\bullet}$$

$$\overset{\delta_k}{\bullet} \;--\; \overset{\delta_1}{\bullet} \;\Rightarrow\; \bullet \;--\; \overset{\delta_2}{\bullet}$$

$$\overset{\delta_1}{\bullet} \;--\; \overset{\delta_k}{\bullet} \;\Rightarrow\; \bullet \;--\; \overset{\delta_2}{\bullet}$$

Пусть S – система типа B_2. Тогда $\mu = \alpha + \beta = n_1\delta_1 + n_2\delta_2$. Так как $< \mu, \delta_3 >=< \mu, \delta_4 >= 0$, то $n_1 \equiv n_2 \equiv 0(2)$. Это возможно только тогда, когда $\mu = 2\delta$, $\delta \in R$.

$$\overset{\delta_3}{\bullet} \;--\; \overset{\delta_1}{\bullet} \;\Rightarrow\; \overset{\delta_2}{\bullet} \;--\; \overset{\delta_4}{\bullet}$$

6) Пусть R – система корней типа C_l, $l \geq 3$, S – система корней типа $A_1 \times A_1$: $S = \{\pm\delta_1, \pm\delta_2\}$, $< \delta_1, \delta_2 >= 0$ (в $\mathbb{R}$). Так как $\alpha \neq \pm\beta$, то $\mu = \alpha + \beta = \pm\delta_1 \pm \delta_2$.

Пусть только один из корней $\delta_1,\ \delta_2$ (для определенности δ_1) расположен в подсистеме типа A_{l-1} . Так как $l \geq 3$, то для некоторого s корень δ_s связан с δ_1 . Для любого $i = \overline{1,l}$ имеем $< \delta_2, \delta_i >= 0$ (в F). Тогда $< \mu, \delta_s >=< \pm\delta_1 \pm \delta_2, \delta_s >= 1$. Это противоречит тому, что $\mu \in \Lambda(R)$.

Пусть оба корня $\delta_1,\ \delta_2$ расположены в подсистеме типа A_{l-1} . Если $l > 4$, то в A_{l-1} найдется корень δ_k , связанный ровно с одним из корней $\delta_1,\ \delta_2$. Тогда $< \mu, \delta_k >=< \pm\delta_1 \pm \delta_2, \delta_k >= 1$. Если $l = 4$, то расположение корней может быть только следующее:

$$C_4 \quad \overset{\delta_1}{\bullet} \;--\; \bullet \;--\; \overset{\delta_2}{\bullet} \;\Leftarrow\; \overset{\delta_4}{\bullet}$$

Тогда $< \mu, \delta_4 >=< \pm\delta_1 \pm \delta_2, \delta_4 >= 1$. Таким образом, S не может быть системой типа $A_1 \times A_1$.

7) Пусть R – система корней типа $C_l,\ l \geq 3,\ S$ – система корней типа $C_2 :\ \{\delta_1, \delta_2,\}$ – базис в S , $< \delta_1, \delta_2 >= -1,\ < \delta_2, \delta_1 >= -2$. Тогда $\mu = \alpha + \beta = n_1\delta_1 + n_2\delta_2$. Так как $< \mu, \delta_1 >=< \mu, \delta_2 >= 0$, то $n_1 \equiv 0(2)$. Все возможные случаи следующие:

$\alpha = \pm(2\delta_1 + \delta_2),\ \beta = \pm\delta_2\ \Rightarrow \mu = \alpha + \beta = 2\delta,\ \delta \in R$;

$\alpha = \pm(\delta_1 + \delta_2),\ \beta = \pm\delta_1$. Из условий $< \delta_1, \delta_2 >= -1,\ < \delta_2, \delta_1 >= -2$ получим $\delta_1 = \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j,\ \delta_2 = \mp 2\varepsilon_i,\ i \neq j$. Следовательно, $\mu = \pm 2\varepsilon_k$, $k \in \{i, j\}$. Легко убедиться, что для любого $i = \overline{1,l}$ $\mu = \pm 2\varepsilon_i \in \Lambda(R)$. $\square$

3. Дифференцирования нулевого веса

Пусть L – классическая алгебра Ли над полем F характеристики 2. Очевидно, $B_0^1(L,L) = adH \cong H/H \cap Z(L)$. Кроме того, $Z(L) \subset H$, поэтому $B_0^1(L,L) \cong H/Z(L),\ \dim B_0^1(L,L) = l - \dim Z(L)$. Для всех алгебр с ненулевым центром его строение приведено в таблице 1 (доказательство можно найти в [6]).

Таблица 2

Тип R	$\dim Z(L)$	Базис $Z(L)$
$A_l,\ l \equiv 1(2)$	1	$h_1 + h_3 + \cdots + h_l$
B_l	1	h_l
C_l	1	$h_1 + h_3 + \cdots + h_{2k-1}$
$D_l,\ L \equiv 1(2)$	1	$h_{l-1} + h_l$
$D_l,\ L \equiv 0(2)$	2	$h_1 + h_3 + \cdots + h_{l-1},\ h_{l-1} + h_l$
E_7	1	$h_2 + h_5 + h_7$

Лемма 3.1. *Пусть* $\varphi \in Z_0^1(L,L)$. *Тогда* $\varphi|_H = 0$.

Доказательство. Легко показать, что $\varphi(h_i) \in Z(L)$ для любого $i = \overline{1,l}$. С другой стороны, $\varphi(h_i) = (C_{\alpha_i} + C_{-\alpha_i})h_i$. Если $C_{\alpha_i} + C_{-\alpha_i} \neq 0$, то $h_i \in Z(L)$. Это возможно только тогда, когда L – алгебра типа B_l, $i = l$. Однако и в этом случае можно показать, что $\varphi(h_l) = 0$. Следовательно, $\varphi|_H = 0$. □

Определим значения φ на базисе алгебры L: $\varphi(e_\alpha) = C_\alpha e_\alpha$, $\alpha \in R$.

Лемма 3.2. *$h_\alpha \neq 0$ для любого α из R.*

Доказательство. $h_\alpha = 0$ (в L) $\Leftrightarrow h_\alpha = 2\sum\limits_{i=1}^{l} a_i h_i$, $a_i \in Z$ (в $L_{\mathbb{C}}$). Так как для любого α из R выполняется $\alpha = w\alpha_j$, где $w \in W(R)$, то $h_\alpha = wh_j = 2\sum\limits_{i=1}^{l} a_i h_i$. Следовательно, $h_j = w^{-1}(2\sum\limits_{i=1}^{l} a_i h_i) = 2\sum\limits_{i=1}^{l} a_i w^{-1}(h_i) = 2\sum\limits_{i=1}^{l} b_i h_i$, $b_i \in Z$. Но, очевидно, $h_j \neq 2\sum\limits_{i=1}^{l} b_i h_i$, поэтому $h_\alpha \neq 0$. □

Лемма 3.3. *$C_\alpha = C_{-\alpha}$ для любого α из R.*

Доказательство. $0 = \varphi(h_\alpha) = \varphi([e_\alpha, e_{-\alpha}]) = (C_\alpha + C_{-\alpha})h_\alpha$. Из леммы 3.2. $h_\alpha \neq 0$, поэтому $C_\alpha = C_{-\alpha}$. □

Для алгебры $\overline{L}$ остается справедливой лемма 3.1., а леммы 3.2., 3.3. нуждаются в уточнении. Мы доказали, что если $C_\alpha + C_{-\alpha} \neq 0$, то $h_\alpha = 0$ (в $\overline{L}$). Следовательно, $h_\alpha \in Z(L)$. Это возможно только тогда, когда L – алгебра типа B_l, $\alpha = \pm\varepsilon_i$, $i = \overline{1,l}$. Для всех остальных алгебр $C_\alpha = C_{-\alpha}$ для любого корня α.

Нам понадобятся также следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3.4. *Существует гомоморфизм $F : H^1(L,L) \to H^1(\overline{L},\overline{L})$ Если $[L,L] = L$, то этот гомоморфизм инъективный.* □

Для всех рассматриваемых алгебр, кроме алгебры типа C_l, $[L,L] = L$, поэтому к ним применима лемма 3.4.

Лемма 3.5. *Пусть μ, $\nu \in \Lambda(R)$ сопряжены под действием группы Вейля. Тогда $H^1_\mu(L,L) \cong H^1_\nu(L,L)$.* □

Далее, так как для любых α, β из R имеем $\varphi([e_\alpha, e_\beta]) = [\varphi(e_\alpha), e_\beta] + [e_\alpha, \varphi(e_\beta)]$, то достаточно задать φ на образующих алгебры L. Согласно [2], в $L_{\mathbb{C}}$ в качестве образующих можно выбрать элементы e_{α_i}, $e_{-\alpha_i}$, h_i, $i = \overline{1,l}$. Если $L_{\mathbb{C}}$ – алгебра с однородной системой корней, то эти элементы будут являться образующими и в алгебре L. Используя леммы 3.1., 3.3., получим, что φ однозначно определяется своими значениями на элементах e_{α_i}, $i=\overline{1,l}$. Таким образом, для алгебр с однородной системой корней $\dim Z_0^1(L,L)=l$, $\dim H_0^1(L,L)=\dim Z(L)$. Аналогично, $\dim Z_0^1(\overline{L},\overline{L})=l$, $\dim H_0^1(\overline{L},\overline{L})=\dim Z(L)$.

В случае, когда система корней неоднородна, используем следующий метод. Для любых α,β из R выполняется $\varphi([e_\alpha,e_\beta])=(C_\alpha+C_\beta)[e_\alpha,e_\beta]$. Если $\alpha+\beta\in R$, то $[e_\alpha,e_\beta]=(r+1)e_{\alpha+\beta}$, где $\beta-r\alpha,\ldots,\beta+q\alpha$ – α-серия, содержащая β. Согласно [1], во всех классических алгебрах, кроме G_2, длина серий корней не больше 2, поэтому если $\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha\in R$, то $r=1$ и $[e_\alpha,e_\beta]=0$. Таким образом, осталось рассмотреть все $\alpha,\beta\in R$, для которых $\beta+\alpha\in R,\ \beta-\alpha\notin R$. Для таких пар выполнены соотношения $C_{\alpha+\beta}=C_\alpha+C_\beta$. Решив эту систему линейных уравнений относительно коэффициентов $C_\alpha,\ \alpha\in R$, мы найдем $\dim Z_0^1(L,L)$.

1) Пусть M – алгебра типа B_l. Согласно [1], положительные корни в системе корней типа B_l можно описать следующим образом:

$\varepsilon_i=\sum\limits_{i\le k\le l}\alpha_k,\ 1\le i\le l$;

$\varepsilon_i-\varepsilon_j=\sum\limits_{i\le k<j}\alpha_k,\ 1\le i<j\le l$;

$\varepsilon_i+\varepsilon_j=\sum\limits_{i\le k<j}\alpha_k+2\sum\limits_{j\le k\le l}\alpha_k,\ 1\le i<j\le l$.

Пусть $\varphi\in H_0^1(M,M):\ \varphi(e_\alpha)=C_\alpha e_\alpha,\ \alpha\in R$. Учитывая, что для любого α $C_\alpha=C_{-\alpha}$, получим следующую систему уравнений:

$C_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=C_{\varepsilon_i}+C_{\varepsilon_j},\ 1\le i<j\le l$;

$C_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=C_{\varepsilon_i}+C_{\varepsilon_j},\ 1\le i<j\le l$;

$C_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=C_{\varepsilon_i-\varepsilon_k}+C_{\varepsilon_k-\varepsilon_j},\ 1\le i<k<j\le l$;

$C_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=C_{\varepsilon_i-\varepsilon_k}+C_{\varepsilon_k+\varepsilon_j},\ 1\le i<k<j\le l$.

Решение системы выглядит следующим образом: независимыми переменными являются $C_{\varepsilon_i}=c_i,\ i=\overline{1,l}$, а остальные выражаются через них: $C_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=C_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=c_i+c_j,\ i\ne j$. Мы получили, что $\dim Z_0^1(M,M)=l$. Следовательно, $\dim H_0^1(M,M)=\dim Z_0^1(M,M)+\dim Z(M)-l=1$. Пусть $c_i=0,\ i=\overline{1,l-1},\ c_l=1$. Мы построили $\varphi_0\in Z_0^1(M,M):\ \varphi_0(e_\alpha)=e_\alpha$ для всех корней α, в которые входит ε_l. Легко показать, что
$\varphi_0\notin B_0^1(M,M)$, поэтому $H_0^1(M,M)=<\varphi_0>_F$.

2) Пусть M – фактор-алгебра алгебры типа B_l по центру,
$\varphi\in H_0^1(M,M):\ \varphi(e_\alpha)=C_\alpha e_\alpha,\ \alpha\in R$. Из леммы 3.1. $\varphi|_H=0$. Кроме того, если $\alpha\ne\pm\varepsilon_i,\ i=\overline{1,l}$, то $C_\alpha=C_{-\alpha}$. Пусть $C_{\varepsilon_i}=a_i,\ C_{-\varepsilon_i}=b_i,\ i=\overline{1,l}$. Далее, для всех $\alpha,\beta\in R$, для которых $\beta+\alpha\in R,\ \beta-\alpha\notin R$, выполнены соотношения $C_{\alpha+\beta}=C_\alpha+C_\beta$. Учитывая, что если $\alpha=\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j,\ i\ne j$, то $C_\alpha=C_{-\alpha}$, получим следующую систему:

$C_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=a_i+b_j=a_j+b_i,\ 1\le i<j\le l$;

$C_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=a_i+a_j=b_i+b_j,\ 1\le i<j\le l$;

$C_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=C_{\varepsilon_i-\varepsilon_k}+C_{\varepsilon_k-\varepsilon_j},\ 1\le i<k<j\le l$;

$C_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=C_{\varepsilon_i-\varepsilon_k}+C_{\varepsilon_k+\varepsilon_j},\ 1\le i<k<j\le l$.

Решение системы выглядит следующим образом: независимыми переменными являются $a_i,\ i=\overline{1,l}$, и b_1, а остальные выражаются через них: $C_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=a_i+a_j,\ C_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=a_1+b_1+a_i+a_j,\ i\neq j,\ b_i=a_1+b_1+a_i,\ i=\overline{1,l}$. Таким образом, $\dim Z_0^1(M,M)=l+1$. Следовательно, $\dim H_0^1(M,M)=2$.

Пусть $b_1=a_1=a_2=\cdots=a_{l-1}=0,\ a_l=1$: $\varphi_0(e_\alpha)=e_\alpha$ для всех корней α, в которые входит ε_l. По лемме 3.4. $\varphi_0\in H_0^1(M,M)$.

Далее, пусть $a_1=a_2=\cdots=a_{l-1}=a_l=0,\ b_1=1$. Получим $\varphi_1\in Z_0^1(M,M)$: $\varphi_1(e_{\varepsilon_i})=0,\ \varphi_1(e_{-\varepsilon_i})=e_{-\varepsilon_i},\ i=\overline{1,l},\ \varphi_1(e_{\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_j)})=e_{\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_j)},\ \varphi_1(e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j})=0,\ i\neq j,\ \varphi_1|_H=0$. Легко показать, что
$\varphi_1\notin B_0^1(M,M),\ \varphi_0-\varphi_1\notin B_0^1(M,M)$. Поэтому $H_0^1(M,M)=<\varphi_0,\varphi_1>_F$.

3) Пусть M – алгебра типа C_l или ее фактор-алгебра по центру. Согласно [1], положительные корни в системе корней типа C_l можно описать следующим образом:

$2\varepsilon_i=2\sum\limits_{i\le k<l}\alpha_k+\alpha_l,\ 1\le i\le l$;

$\varepsilon_i-\varepsilon_j=\sum\limits_{i\le k<j}\alpha_k,\ 1\le i<j\le l$;

$\varepsilon_i+\varepsilon_j=\sum\limits_{i\le k<j}\alpha_k+2\sum\limits_{j\le k<l}\alpha_k+\alpha_l,\ 1\le i<j\le l$.

Пусть $\varphi\in H_0^1(M,M)$: $\varphi(e_\alpha)=C_\alpha e_\alpha,\ \alpha\in R$. Учитывая, что для любого α $C_\alpha=C_{-\alpha}$, получим следующую систему уравнений:

$C_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=C_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}+C_{2\varepsilon_j},\ 1\le i<j\le l$;
$C_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=C_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}+C_{2\varepsilon_i},\ 1\le i<j\le l$;
$C_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=C_{\varepsilon_i-\varepsilon_k}+C_{\varepsilon_k-\varepsilon_j},\ 1\le i<k<j\le l$;
$C_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=C_{\varepsilon_i-\varepsilon_k}+C_{\varepsilon_k+\varepsilon_j},\ 1\le i<k<j\le l$.

Отсюда следует, что $C_{2\varepsilon_i}=C_{2\varepsilon_j}=A$ для любых $i,j=\overline{1,l}$. Решение системы выглядит следующим образом: независимыми переменными являются A и $C_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}=c_i,\ i=\overline{1,l-1}$, а остальные выражаются через них: $C_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=\sum\limits_{i\le k<j}c_k,\ C_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=\sum\limits_{i\le k<j}c_k+A$. Мы получили, что $\dim Z_0^1(M,M)=l$. Следовательно, $\dim H_0^1(M,M)=1$. Пусть
$A=1,\ c_i=0,\ i=\overline{1,l-1},$. Мы построили $\varphi_0\in Z_0^1(M,M)$: $\varphi_0(e_{\pm2\varepsilon_i})=e_{\pm2\varepsilon_i},i=\overline{1,l},\ \varphi_0(e_{\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j)})=0,\ \varphi_0(e_{\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_j)})=e_{\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_j)},\ i\neq j$. Очевидно, $\varphi_0\notin B_0^1(M,M)$. Поэтому $H_0^1(M,M)=<\varphi_0>_F$.

4. Дифференцирования веса $\pm2\varepsilon_i,\ i=\overline{1,l}$

1) Пусть M – алгебра типа D_l либо ее фактор-алгебра по центру. Так как все веса $\pm2\varepsilon_i$ сопряжены под действием $W(R)$, то по лемме 3.5. достаточно рассмотреть $\mu=2\varepsilon_i$. Пусть $\varphi\in H_{2\varepsilon_i}^1(M,M)$. Если $\varphi(M_\alpha)\neq0$, то $\alpha+2\varepsilon_i\in R$. Все возможные случаи следующие: $\alpha=\pm\varepsilon_j-\varepsilon_i,\ j\neq i$. Пусть $\varphi(e_{\varepsilon_j-\varepsilon_i})=$

$b_j e_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}$, $\varphi(e_{-\varepsilon_j-\varepsilon_i}) = c_j e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$. Так как $l \geq 4$, то существует индекс k такой, что i, j, k попарно различны. Тогда $c_k e_{\varepsilon_i-\varepsilon_k} = \varphi(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_k}) = \varphi([e_{-\varepsilon_i+\varepsilon_j}, e_{-\varepsilon_j-\varepsilon_k}]) = b_j e_{\varepsilon_i-\varepsilon_k}$. Следовательно, $b_j = c_k = a$. Таким образом, если $\varphi \in H^1_{2\varepsilon_i}(M,M)$, то выполнены следующие условия: $\varphi(e_{\pm\varepsilon_j-\varepsilon_i}) = ae_{\pm\varepsilon_j+\varepsilon_i}$, $j \neq i$, на остальных базисных векторах $\varphi = 0$.

Далее, $0 = \varphi([e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}, e_{-\varepsilon_i+\varepsilon_j}]) = a(h_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} + h_{\varepsilon_i+\varepsilon_j})$. Можно показать, что $h_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}+h_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = h_{l-1}+h_l$. Если M – алгебра типа D_l, то $0 = a(h_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}+h_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}) = a(h_{l-1} + h_l) \Rightarrow a = 0$, $\varphi = 0$, $H^1_{2\varepsilon_i}(M,M) = 0$.

Пусть M – фактор-алгебра алгебры типа D_l по центру. Тогда $h_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} + h_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = h_{l-1} + h_l = 0$. Таким образом, $Z^1_{2\varepsilon_i}(M,M) =< \varphi_i >_F$: $\varphi_i(e_{\pm\varepsilon_j-\varepsilon_i}) = e_{\pm\varepsilon_j+\varepsilon_i}$, на остальных базисных векторах $\varphi_i = 0$. Очевидно, $\varphi_i \notin B^1_{2\varepsilon_i}(M,M)$, поэтому $H^1_{2\varepsilon_i}(M,M) =< \varphi_i >_F$.

2) Пусть M – алгебра типа C_l, $l \geq 3$, либо ее фактор-алгебра по центру, $\varphi \in H^1_{2\varepsilon_i}(M,M)$. Если $\varphi(M_\alpha) \neq 0$, то $\alpha + 2\varepsilon_i \in R$ или $\alpha + 2\varepsilon_i = 0$. Все возможные случаи следующие: $\alpha = -2\varepsilon_i$, $\alpha = \pm\varepsilon_j - \varepsilon_i$, $j \neq i$. Пусть $\varphi(e_{-2\varepsilon_i}) = h \in H$, $\varphi(e_{\varepsilon_j-\varepsilon_i}) = b_j e_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}$, $\varphi(e_{-\varepsilon_j-\varepsilon_i}) = c_j e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$, $\varphi(h_j) = a_j e_{2\varepsilon_i}$.

Для любого $j = \overline{1,l}$ $\varphi([h_j, e_{-2\varepsilon_i}]) = [\varphi(h_j), e_{-2\varepsilon_i}] + [h_j, \varphi(e_{-2\varepsilon_i})] \Rightarrow 0 = a_j h_{2\varepsilon_i}$, $a_j = 0$, $\varphi|_H = 0$. Далее, существует индекс k такой, что i, j, k попарно различны. Тогда $c_j e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = \varphi(e_{-\varepsilon_j-\varepsilon_i}) = \varphi([e_{-\varepsilon_j-\varepsilon_k}, e_{\varepsilon_k-\varepsilon_i}]) = b_k e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$. Поэтому $b_k = c_j = b$. Кроме того, $\varphi([e_{-2\varepsilon_i}, e_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j}]) = [\varphi(e_{-2\varepsilon_i}), e_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j}] + [e_{-2\varepsilon_i}, \varphi(e_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j})] \Rightarrow [h, e_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j}] = be_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j}$, $j \neq i$. Пусть $h = \sum\limits_{k=1}^{l} a_k h_k \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{l} a_k < \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \alpha_k >= b$. Решая эту систему относительно коэффициентов a_k, $k = \overline{1,l}$, получим: $z = a(h_1+h_3+\cdots+h_{2k-1})+b(h_i+h_{i+1}+\cdots+h_l) = ah_0+bh_{2\varepsilon_i}$, где a, b – свободные неизвестные. Если $a = 0$, $b = 1$, то, очевидно, $\varphi = ade_{2\varepsilon_i}$. Пусть $b = 0$, $a = 1$: $\varphi_i(e_{-2\varepsilon_i}) = h_0$, на остальных базисных векторах $\varphi_i = 0$.

Если M – фактор-алгебра алгебры типа C_l по центру, то
$\varphi = 0$, $H^1_{2\varepsilon_i}(M,M) = 0$. Если M – алгебра типа C_l, то можно показать, что $\varphi_i \notin B^1_{2\varepsilon_i}(L,L)$, поэтому $H^1_{2\varepsilon_i}(M,M) =< \varphi_i >_F$.

5. Дифференцирования веса 2δ, $\delta \in R$

Из предложения 2.1. следует, что в любой системе корней $\mu = 2\delta \in \Lambda(R)$ для любого δ из R.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если $H^1_{2\delta}(M,M) \neq 0$, то $M = L/Z(L)$, где L – алгебра Ли типа B_l, $\delta = \pm\varepsilon_i$, $i = \overline{1,l}$. В этом случае $\dim H^1_{2\delta}(M,M) = 1$. Для остальных рассматриваемых алгебр $H^1_{2\delta}(M,M) = 0$ для любого δ из R.*

Доказательство.

1) Пусть M – алгебра с однородной системой корней или ее фактор-алгебра по центру, $\varphi \in H^1_{2\delta}(M,M)$, $\delta \in R$. Тогда для любого α из R $\varphi(M_\alpha) \subset M_{\alpha+2\delta}$.

Если $\varphi(L_\alpha) \neq 0$, то $\alpha + 2\delta \in R$. Пусть $\alpha \neq -\delta$. Так как δ-серия, содержащая α, не прерывается, то $\alpha, \alpha+\delta, \alpha+2\delta \in R$. Но в однородной системе корней длина серии не превосходит 1. Таким образом, $\varphi(e_{-\delta}) = ce_\delta$, на остальных базисных векторах $\varphi = 0$. Кроме того, существует корень γ такой, что $<\delta, \gamma>= 1$. Следовательно, $\delta - \gamma \in R,\ \delta + \gamma \notin R$. Тогда $0 = \varphi([e_{-\delta}, e_{-\gamma}]) = [\varphi(e_{-\delta}), e_{-\gamma}] + [e_{-\delta}, \varphi(e_{-\gamma})] = ce_{\delta-\gamma} \Rightarrow c = 0,\ \varphi = 0$. Таким образом, $H^1_{2\delta}(M, M) = 0$.

2) Пусть M – алгебра типа $C_l,\ l \geq 3$, или ее фактор-алгебра по центру, $\varphi \in H^1_{2\delta}(M, M),\ \delta \in R$.

Пусть $\delta = \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j,\ i \neq j$. Все корни вида $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ сопряжены под действием $W(R)$, поэтому по лемме 3.5. достаточно рассмотреть случай $\delta = \varepsilon_i + \varepsilon_j$. Все корни α, для которых $\alpha + 2\delta \in R$, следующие: $\alpha = -\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ \alpha = -2\varepsilon_i,\ \alpha = -2\varepsilon_j$. Пусть $\varphi(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}) = ae_{\varepsilon_i+\varepsilon_j},\ \varphi(e_{-2\varepsilon_i}) = be_{2\varepsilon_j},\ \varphi(e_{-2\varepsilon_j}) = ce_{2\varepsilon_i}$. Тогда $0 = \varphi([e_{-2\varepsilon_i}, e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}]) = [\varphi(e_{-2\varepsilon_i}), e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}] + [e_{-2\varepsilon_i}, \varphi(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j})] = (a + b)e_{-\varepsilon_i+\varepsilon_j} \Rightarrow a = b$. Аналогично, $b = c$. Так как $l \geq 3$, то существует индекс k такой, что i, j, k попарно различны. Тогда $ae_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = \varphi(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}) = \varphi([e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_k}, e_{\varepsilon_k-\varepsilon_j}]) = [\varphi(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_k}), e_{\varepsilon_k-\varepsilon_j}] + [e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_k}, \varphi(e_{\varepsilon_k-\varepsilon_j})] = 0$. Следовательно, $a = 0,\ \varphi = 0,\ H^1_{2\delta}(M, M) = 0$.

Пусть $\delta = 2\varepsilon_i,\ i = \overline{1,l}$. Если $\varphi(L_\alpha) \neq 0$, то $\alpha + 4\varepsilon_i \in R$. Это возможно только тогда, когда $\alpha = -2\varepsilon_i$: $\varphi(e_{-2\varepsilon_i}) = ae_{2\varepsilon_i}$. Пусть $j \neq i$, тогда $0 = \varphi([e_{-2\varepsilon_i}, e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}]) = [\varphi(e_{-2\varepsilon_i}), e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}] + [e_{-2\varepsilon_i}, \varphi(e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j})] = ae_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$. Следовательно, $a = 0,\ \varphi = 0$. Таким образом, $H^1_{2\delta}(M, M) = 0$ для любого δ из R.

3) Пусть M – алгебра типа B_l или ее фактор-алгебра по центру, $\varphi \in H^1_{2\delta}(M, M),\ \delta \in R$. Если $\delta = \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j,\ i \neq j$, то, как и для алгебры типа C_l, доказывается, что $H^1_{2\delta}(M, M) = 0$. Пусть $\delta = \pm\varepsilon_i,\ i = \overline{1,l}$. Корни вида $\pm\varepsilon_i$ сопряжены под действием $W(R)$, поэтому по лемме 3.5. достаточно рассмотреть случай $\delta = \varepsilon_i$. Все корни α, для которых $\alpha + 2\varepsilon_i \in R$, следующие: $\alpha = -\varepsilon_i,\ \alpha = \pm\varepsilon_j - \varepsilon_i,\ j \neq i$. Пусть $\varphi(e_{-\varepsilon_i}) = ae_{\varepsilon_i},\ \varphi(e_{\varepsilon_j-\varepsilon_i}) = b_je_{\varepsilon_i+\varepsilon_j},\ \varphi(e_{-\varepsilon_j-\varepsilon_i}) = c_je_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$. Тогда $0 = \varphi([e_{\varepsilon_j-\varepsilon_i}, e_{-\varepsilon_i}]) = (b_j + a)e_{\varepsilon_j}$. Следовательно, $b_j = a$ для любого j. Аналогично, $c_j = a$. Таким образом, $\dim H^1_{2\varepsilon_i}(M, M) \leq 1$.

Предположим, что M – алгебра типа B_l. Тогда $0 = \varphi([e_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j}, e_{-\varepsilon_i+\varepsilon_j}]) = a(h_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} + h_{\varepsilon_i+\varepsilon_j})$. Можно показать, что для любых i, j таких, что $i \neq j$, имеет место $h_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} + h_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = h_l$. Следовательно, $a = 0,\ \varphi = 0, H^1_{2\varepsilon_i}(M, M) = 0$.

Пусть M – фактор-алгебра алгебры типа B_l по центру. В этом случае $h_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} + h_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = h_l = 0$. Определим φ_i на базисе алгебры M: $\varphi_i(e_{-\varepsilon_i}) = e_{\varepsilon_i},\ \varphi_i(e_{\pm\varepsilon_j-\varepsilon_i}) = e_{\pm\varepsilon_j+\varepsilon_i},\ j \neq i$, на остальных базисных векторах $\varphi_i = 0$. Мы получили, что $Z^1_{2\varepsilon_i}(M, M) =< \varphi_i >_F$. Очевидно, $\varphi_i \notin B^1_{2\varepsilon_i}(M, M)$. Следовательно, $H^1_{2\varepsilon_i}(M, M) =< \varphi_i >_F$.

4) Пусть L – алгебра типа $F_4,\ \varphi \in H^1_{2\delta}(L, L),\ \delta \in R$. Если $\delta = \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j,\ i \neq j$, то аналогично рассуждениям для алгебры типа C_l получим, что $H^1_{2\varepsilon_i}(L, L) = 0$. Далее, все корни вида $\pm\varepsilon_i,\ i = \overline{1,4}$ и $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$ сопряжены между

собой под действием $W(R)$. Поэтому по лемме 3.5. достаточно рассмотреть случай $\delta = \varepsilon_i$. Все корни α, для которых $\alpha + 2\varepsilon_i \in R$, следующие: $\alpha = -\varepsilon_i,\ \alpha = \pm\varepsilon_j - \varepsilon_i,\ j \neq i$. Пусть $\varphi(e_{-\varepsilon_i}) = ae_{\varepsilon_i},\ \varphi(e_{\varepsilon_j - \varepsilon_i}) = b_j e_{\varepsilon_i + \varepsilon_j},\ \varphi(e_{-\varepsilon_j - \varepsilon_i}) = c_j e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$. Как и для алгебры типа B_l получим, что $b_j = c_j = a$ для любого $j \neq i$. Далее, $0 = \varphi([e_{-\varepsilon_i - \varepsilon_j}, e_{-\varepsilon_i + \varepsilon_j}]) = a(h_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} + h_{\varepsilon_i + \varepsilon_j})$. Пусть $\alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$. Тогда $0 = a[h_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} + h_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}, e_\alpha] = a(< \alpha, \varepsilon_i - \varepsilon_j > + < \alpha, \varepsilon_i + \varepsilon_j >)e_\alpha = 2a(\varepsilon_i, \alpha)e_\alpha = ae_\alpha$. Следовательно, $a = 0,\ \varphi = 0, H^1_{2\varepsilon_i}(L, L) = 0$. $\square$

6. Дифференцирования алгебры Ли типа G_2

Пусть α, β – простые корни в системе корней типа G_2, L – алгебра типа G_2 над полем F характеристики 2, M – фактор-алгебра алгебры типа A_3 по центру. Построим отображение $\varphi : M \to L$ следующим образом: $\varphi(e_{\alpha_1}) = e_\beta,\ \varphi(e_{\alpha_2}) = e_\alpha,\ \varphi(e_{\alpha_3}) = e_{2\alpha+\beta}$. Далее φ легко продолжается до изоморфизма алгебр Ли. Поэтому $\dim H^1(L, L) = \dim H^1(M, M) = 7$.

Наконец, сформулируем оставшиеся результаты. Доказательство их получается методами, аналогичными рассмотренным, либо с использованием компьютерных алгоритмов.

1) Пусть R – система типа A_3. Осталось рассмотреть когомологии "исключительных"весов $\mu = \pm(\alpha_1 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 - \alpha_3), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)$. Если M – алгебра типа A_3, то соответствующие пространства когомологий $H^1_\mu(M, M)$ нулевые. Если M – фактор-алгебра алгебры типа A_3 по центру, то $\dim H^1_\mu(M, M) = 1$.

2) Пусть R – система типа B_2. Тогда $\Lambda(R) = \{0\} \cup \{2\delta,\ \delta \in R\} \cup \{\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2\}$. Если M – алгебра типа B_2, то для весов $\mu = \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$ $\dim H^1_\mu(M, M) = 1$. Если M – фактор-алгебра алгебры типа B_2 по центру, то $H^1_\mu(M, M) = 0$.

3) Пусть R – система типа B_3. Тогда $\Lambda(R) = \{0\} \cup \{2\delta,\ \delta \in R\} \cup \{\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3\}$. Если M – алгебра типа B_3, то для $\mu = \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3$ пространства когомологий $H^1_\mu(M, M)$ нулевые. Если M – фактор-алгебра алгебры типа B_3 по центру, то $\dim H^1_\mu(M, M) = 1$.

4) Пусть R – система типа B_4. Тогда $\Lambda(R) = \{0\} \cup \{2\delta,\ \delta \in R\} \cup \{\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4\}$. Если M – алгебра типа B_4 либо ее фактор-алгебра по центру, то $H^1_\mu(M, M) = 0$ для всех весов вида $\mu = \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$.

5) Пусть R – система типа D_4. Осталось рассмотреть когомологии "исключительных"весов $\mu = \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$. Если M – алгебра типа D_4, то соответствующие пространства когомологий $H^1_\mu(M, M)$ нулевые. Если M – фактор-алгебра алгебры типа D_4 по центру, то $\dim H^1_\mu(M, M) = 1$.

6) Пусть M – алгебра типа F_4. Тогда $H^1_0(M, M) = 0$.

Список литературы

[1] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл.IV – VI. – М.: Мир, 1972. – 334 с.

[2] Джекобсон Н. Алгебры Ли. – М.: Мир, 1964. – 355 с.

[3] Кузнецов М.И., Чебочко Н.Г. Деформации классических алгебр Ли // Математический сборник. 2000. Т.191. N8. С.69 – 88.

[4] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. – М.: Мир, 1975. – 262 с.

[5] Фукс Д.Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. – М.: Наука, 1984. – 272 с.

[6] Hogeweij G.M.D. Almost classical Lie algebras: I, II //Indag. Math. 44 (1982). P.441-452, 453-460.

UDC 512.554.31

Derivations of classical Lie algebras over the field of characteristic 2

D. S. Permiakov

Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky

In this paper derivations of classical Lie algebras over the field of characteristic 2 are described. By classical Lie algebra over the field of characteristic $p > 0$ we mean Lie algebra obtained from simple Lie algebra over $\mathbb{C}$ by reduction of Chevalley order modulo p. As a result for all concerned algebras dimensions of spaces of outer derivations are found.

Поступила 8 февраля 2005 г.