

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ НА VBA В EXCEL

Козинова А. Т., Тарасов В. Л.

Метод динамического программирования разработан для оптимизации многошаговых процессов. Решение задачи этим методом состоит из двух этапов. На первом этапе строятся условные оптимальные управления. На втором этапе ищется безусловное оптимальное управление. Условные оптимальные управления строятся по принципу оптимальности Беллмана: каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбирать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным.

Пусть имеется запас ресурсов K , который нужно распределить между m предприятиями $P_1, P_2, \dots, P_m$. Каждое из предприятий P_i при вложении в него средств x приносит доход $\varphi_i(x)$. Следует так распределить средства K между предприятиями, чтобы получить наибольший доход.

Будем считать первым шагом процесса вложение средств в P_1 , вторым – в P_2 и т. д.

Управляемая система в данном случае – средства, которые распределяются. Состояние системы перед каждым шагом характеризуется одним числом S – наличным запасом еще не вложенных средств. Шаговыми управлениями являются средства $x_1, x_2, \dots, x_m$, выделяемые предприятиям. Требуется найти оптимальное управление, т. е. совокупность чисел $x_1, x_2, \dots, x_m$, при которой суммарный доход максимален

$$W = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x_i) \Rightarrow \max. \quad (3)$$

Найдем для каждого i -го шага условный оптимальный выигрыш (от этого шага и до конца), если в начале i -го шага был запас средств S . Обозначим условный оптимальный выигрыш $W_i(S)$, а соответствующее ему условное оптимальное управление – средства, вкладываемые в i -е предприятие $x_i(S)$.

На последнем m -м шаге

$$x_m(S) = S,$$

т. е. все оставшиеся нераспределенными средства вкладываются в последнее предприятие. Условный оптимальный выигрыш равен прибыли, получаемой последним предприятием

$$W_m(S) = \varphi_m(S).$$

Перейдем к предпоследнему, $(m-1)$ -му шагу. Пусть мы подошли к нему с запасом средств S . Обозначим $W_{m-1}(S)$ условный оптимальный выигрыш на двух последних шагах: $(m-1)$ -м и m -м. Если на $(m-1)$ -м шаге $(m-1)$ -му предприятию

будут выделены средства x , то на последний шаг останется $S-x$. Выигрыш на двух последних шагах составит

$$\varphi_{m-1}(x) + W_m(S-x).$$

Нужно найти такое x , при котором этот выигрыш максимален

$$W_{m-1}(S) = \max_{x \leq S} \{ \varphi_{m-1}(x) + W_m(S-x) \}. \quad (4)$$

Далее оптимизируем $(m-2)$ -й, $(m-3)$ -й и т. д. шаги. Для любого i -го шага будем находить условный оптимальный выигрыш за все шаги с этого шага и до конца по формуле

$$W_i(S) = \max_{x \leq S} \{ \varphi_i(x) + W_{i+1}(S-x) \} \quad (5)$$

и соответствующее ему оптимальное управление $x_i(S)$ — то значение x , при котором этот максимум достигается.

Продолжая анализ шагов таким образом, дойдем до первого предприятия Π_1 . Здесь нам не нужно варьировать значения S , эта величина задана и равна K . Оптимальный выигрыш составит

$$W^* = W_1(K) = \max_{x \leq K} \{ \varphi_1(x) + W_2(K-x) \} \quad (6)$$

То значение x , при котором достигается максимум (6), и есть оптимальное управление x_1^* на первом шаге. После вложения средств x_1^* в первое предприятие их останется $K - x_1^*$. Находим

$$x_2^* = x_2(K - x_1^*)$$

и т. д.

Пусть исходный запас средств $K=5$ и требуется его распределить между четырьмя предприятиями ($m=4$). В каждое предприятие можно вложить только целое число средств, объем средств, вкладываемых в каждое предприятие не должен превышать 5 единиц. Функции дохода заданы табл. 1.

Таблица 1

x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
1	0.1	0.6	0.3	1.0
2	0.5	1.1	0.6	1.2
3	1.2	1.2	1.3	1.3
4	1.8	1.4	1.4	1.3
5	2.5	1.6	1.5	1.3

Покажем, сначала, как задача может быть решена «вручную». Это решение будет являться в то же время и описанием алгоритма решения. Условную оптимизацию начнем с последнего 4-го шага. Надо рассмотреть все возможные значения S и найти соответствующие $x_4(S)$ и $W_4(S)$. Весь остаток средств S выделяется четвертому предприятию, поэтому

$$x_4(S)=S, W_4(S)=\varphi_4(S),$$

то есть условный оптимальный выигрыш на 4-м шаге равен доходу 4-го предприятия от вложенных в него средств.

Рассмотрим третий шаг. Для построения условного оптимального решения следует рассмотреть все возможные значения $S=0, 1, \dots, 5$. Пример для нахождения условного оптимального управления для $S=5$ приведен в табл. 2.

Таблица 2

S	x	$S-x$	$\varphi_3(x)$	$W_4(S-x)$	$\varphi_3(x)+W_4(S-x)$	Условно оптимальное решение	
						$x_3(S)$	$W_3(S)$
1	2	3	4	5	6	7	8
5	0	5	0	1.3	1.3	3	2.5
	1	4	0.3	1.3	1.6		
	2	3	0.6	1.3	1.9		
	<u>3</u>	2	1.3	1.2	<u>2.5</u>		
	4	1	1.4	1.0	2.4		
	5	0	1.5	0	1.5		

Поиск условно оптимальных решений состоит в нахождении максимального значения в столбце 6 табл. 2. При построении условного оптимального управления на первом шаге рассматриваем только один случай $S=K=5$, так как все средства еще в наличии. Решение представлено табл. 3.

Таблица 3

x	$K-x$	$\varphi_1(x)$	$W_2(K-x)$	$\varphi_1(x)+W_2(K-x)$	Оптимальное решение	
					x_1^*	W^*
0	5	0	2.9	2.9	0	2.9
1	4	0.1	2.4	2.5		
2	3	0.5	2.1	2.6		
3	2	1.2	1.6	2.8		
4	1	1.8	1.0	2.8		
<u>5</u>	0	2.5	0	<u>2.5</u>		

Результаты оптимизации по всем шагам сведем в табл. 4

Таблица 4

S	$I=4$		$i=3$		$i=2$		$i=1$	
	$X_4(S)$	$W_4(S)$	$x_3(S)$	$W_3(S)$	$X_2(S)$	$W_2(S)$	$x_1(S)$	$W_1(S)$
1	<u>1</u>	1.0	0	1.0	0	1.0		
2	2	1.2	1	1.3	1	1.6		
3	3	1.3	2	1.6	2	2.1		
4	4	1.3	<u>3</u>	2.3	2	2.4		
5	5	1.3	3	2.5	<u>1</u>	2.9	<u>0</u>	2.9

В табл. 4 S означает запас ресурсов, с которым мы приходим к очередному шагу. Видно, что безусловный оптимальный выигрыш $W^*=2.9$. Первому предприятию следует выделить 0 единиц из 5. Значит, в начале второго шага мы будем иметь $5-0=5$ единицы ресурсов. Из таблицы видно, что при $S=5$ второму предприятию следует выделить 1 единицу. К началу третьего шага останется $5-1=4$ еди-

ницы ресурсов. При $S=4$ третье предприятие получает 3 единицы. К началу четвертого шага остается 1 единица ресурсов, которая выделяется четвертому предприятию. Итак, оптимальное управление есть

$$x_1=0, x_2=1, x_3=3, x_4=1.$$

Рассмотренный алгоритм динамического программирования предполагает табличные вычисления, поэтому естественно желание использовать электронные таблицы Excel. Однако сам алгоритм построения условных оптимальных управлений достаточно сложен и его реализация стандартными средствами Excel затруднительна. Выход состоит в использовании Visual Basic for Application для написания программы.

На рисунке представлен фрагмент листа «Дано» таблицы с расположенными на нем исходными данными. Они такие же как в табл. 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$		Максим. Объем K =		5
2	0	0	0	0	0		Приращение средств =		1
3	1	0.1	0.6	0.3	1		Колич. предприятий =		4
4	2	0.5	1.1	0.6	1.2				
5	3	1.2	1.2	1.3	1.3				
6	4	1.8	1.4	1.4	1.3				
7	5	2.5	1.6	1.5	1.3				
8									
9									
10		Поиск усл. опт. упр.							
11									

Нажатие кнопки «Поиск усл. опт. упр. » приводит к выполнению следующей процедуры

```
Private Sub CommandButton1_Click()
    Dim K, DX As Double 'Объем средств и их кратность
    Dim M As Integer    'Количество предприятий
    Dim NS As Integer    'Номер шага
    Call ЧтениеИД(K, DX, M)
    Call ПоследнийШаг(K, DX, M)
    For NS = M - 1 To 2 Step -1
        Call ОчереднойШаг(K, DX, M, NS)
    Next NS
    Call ПервыйШаг(K, DX, M)
End Sub
```

Ниже приводится текст вызываемых процедур.

```
Sub ЧтениеИД(K, DX As Double, M As Integer)
    'Чтение исходных данных с листа "Дано"
    With Sheets ("Дано")
        K=.Range("11").Value 'Объем средств
        DX=.Range("12").Value 'Кратность средств
    End With
End Sub
```

```

        M=.Range("13").Value 'Количество предприятий
    End With
    MsgBox "K="+Format(K)+"_Выдача сообщения на экран
        "DX="+Format(DX)+"M="+_
        Format(m), , "Введены исходные данные"
End Sub

Sub ПоследнийШаг(K, DX As Double, M As Integer)
'M - количество предприятий
Dim ND As Integer 'Количество приращений
                    'выделяемых средств
    ND = K / DX
    S = 0
    For I = 0 To ND
        X5 = S
        'Значения для S
        Sheets("УслОптУпр"). Cells(I + 3, 1). Value = S
        'Значения для X5
        Sheets("УслОптУпр"). Cells(I + 3, 2). Value = X5
        'Значения для W5
        Sheets("УслОптУпр"). Cells(I + 3, 3). Value = _
        Sheets("Дано"). Cells(I + 2, M + 1). Value
        S = S + DX
    Next I
End Sub

Sub ОчереднойШаг(K, DX As Double, M, NS As Integer)
'NS -номер очередного шага. 2 <= NS <= M - 1
Dim SumW5F4, S, X, XOpt, WMax, F, W As Double
Dim RowX, RowS, ColX, ColW As Integer
Dim Row, Col As Integer

'Значения для XOpt
ColX = (M-NS) * 2 + 2 'Номер столбца для оптимального X
                        'для предприятия NS
ColW = ColX + 1 'Номер столбца для условно
                'оптимального выигрыша W на шаге NS
'Формирование усл. опт. упр. для S=0
Sheets("УслОптУпр"). Cells(3, ColX). Value = 0
'Значения для WMax
Sheets("УслОптУпр"). Cells(3, ColW). Value = 0
For S = DX To K Step DX
    Row = S/DX+ 3 'Номер строки для условно
                  'оптимального управления для данного S
    RowS=Row 'Номер строки с условно оптим. упр. для S-X
    RowX = 3 'Номер строки исходной таблицы с прибылью
             'от предприятия для средств X
    XOpt = 0 'Оптим. величина средств
    WMax = Sheets("УслОптУпр"). Cells(RowS, ColW - 2)
    'WMax - максимальный выигрыш от шага NS
    'до конца процесса
    For X = DX To S Step DX
        RowS = RowS - 1
        W=Sheets("УслОптУпр"). Cells(RowS, ColW-2). Value
    Next X
Next S

```

```

        F = Sheets("Дано"). Cells(RowX, NS + 1). Value
        If WMax < F + W Then
            XOpt = X
            WMax = F + W
        End If
        RowX = RowX + 1
    Next X
    'Значения для XOpt
    Sheets("УслОптУпр"). Cells(Row, ColX). Value = XOpt
    'Значения для WMax
    Sheets("УслОптУпр"). Cells(Row, ColW). Value = WMax
Next S
End Sub
Sub ПервыйШаг(K, DX As Double, M As Integer)
    Dim S, X, XOpt, WMax, F, W As Double
    Dim RowX, RowS, ColX, ColW As Integer
    Dim Row, Col As Integer
    'Условно оптимальные решения располагаются
    'в порядке возрастания столбцов от последнего шага к
    'первому
    ColX = M * 2 'Номер столбца для оптимального X
                  'для предприятия 1
    ColW = ColX + 1 'Номер столбца для усл. опт.
                   'W на шаге NS
    Row = K / DX + 3 'Номер строки для условно
                    'оптимального управления для данного S
    RowS = Row 'Номер строки с условно оптим. упр. дл S-X
    RowX = 3 'Номер строки исходной таблицы
            'с прибылью от предприятия для средств X
    XOpt = 0 'Оптим. величина средств
    WMax = Sheets("УслОптУпр"). Cells(RowS, ColW - 2)
    'WMax-максимальный выигрыш от шага NS до конца процесса
    For X = DX To K Step DX
        RowS = RowS - 1
        W = Sheets("УслОптУпр"). Cells(RowS, ColW - 2). Value
        F = Sheets("Дано"). Cells(RowX, 2). Value
        If WMax < F + W Then
            XOpt = X
            WMax = F + W
        End If
        RowX = RowX + 1
    Next X
    'Значения для XOpt
    Sheets("УслОптУпр"). Cells(Row, ColX). Value = XOpt
    'Значения для WMax
    Sheets("УслОптУпр"). Cells(Row, ColW). Value = WMax
End Sub

```

Как видно из текста процедур, результаты условной оптимизации размещаются на листе "УслОптУпр" в виде, аналогичном табл. 4. Оптимальное распределение средств легко находится просмотром этой таблицы.

Представленная программа существенно облегчает решение рассмотренных задач оптимизации, особенно при большом объеме входных данных и рассмотрении различных вариантов постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вентцель Е. С.** Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, Гл. ред. физ. -мат. лит., 1988. 208 с.
2. **Биллиг В. А.** VBA в Office 2000. Офисное программирование. М.: Русская редакция, 1999. 480 с.
3. **Гарнаев Ю. А.** и др. Microsoft Office 2000: разработка приложений. СПб: БХВ – Санкт-Петербург, 2000. 656 с.