МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ПЕРСПЕКТИВНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЗАЩИТЫ ВОЗДУШНОГО БАССЕЙНА ГОРОДА ОТ ЗАГРЯЗНЕНИЯ

Н.П. Визгунов
Нижегородский государственный университет

В работе предложена модель, применение которой позволяет уменьшить загрязнение атмосферы в крупных городах. Многокритериальная задача сводится к последовательности однокритериальных задач, каждая из которых достаточно легко решается с помощью компьютера.

1. В настоящее время большое внимание уделяется экологическим проблемам развития крупных промышленных центров. Особое беспокойство вызывает загрязнение атмосферы городов вредными для человека примесями. В результате развития промышленности и транспорта загрязнение воздуха в крупных городах часто превышает безопасные для человека и окружающей среды нормы, например, в атмосферном воздухе Нижнего Новгорода присутствует более 100 различных ингредиентов [1].

Массу организованных выбросов вредных примесей можно существенно уменьшить, используя выпускаемые промышленностью установки для газовой очистки или изменяя технологию производства. Если вводится такая установка или начинает применяться более «чистая» технология, то будем говорить, что реализуется природоохранный проект (ПП). Для каждого ПП известны затраты на его осуществление и коэффициент полезного действия. В результате решения задачи минимизации примесей для всей городской территории будет получен для каждого источника ответ на вопрос: осуществлять намеченный проект или нет.

2. Период планирования охраны воздушного бассейна города может быть довольно большим — 5, 10 и даже 15 лет. За это время могут быть построены новые предприятия, загрязняющие атмосферу, закрыты некоторые старые, может измениться загрязнение, вызванное транспортом. Ресурсы, выделяемые на воздухоохранную деятельность, ограничены и распределены во времени. Более сложные модели планирования должны учитывать эти временные характеристики. Рассмотрим динамические модели для простейшего случая, когда воздух загрязнен только одной вредной примесью.

Обозначим через T — период планирования в годах. За T лет наиболее сильно загрязняющие атмосферу предприятия могут быть закрыты. Наряду с этим появятся новые предприятия-загрязнители. Пусть N — общее количество таких предприятий; u_n, $n \in 1:N$ — срок ввода в действие или срок закрытия предприятия,

$u_n \in 1{:}T$. Таким образом, в год u_n произойдет изменение загрязнения на $\Delta C_{P+n}(z)$, $z \in Z$, и это изменение может быть любого знака. Заметим, что осуществление ПП может только уменьшить загрязненность, т.е.

$$ДC_p(z) \geq 0, \quad p \in 1:P, \ z \in Z.$$

Общее изменение загрязненности воздуха, связанное с пуском или закрытием предприятий в период 1, ... ,t равно

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{\tau=1}^{t}\Delta C_{P+n}(z)\cdot W_{u_n,\tau}, \quad z \in Z,$$

где

$$W_{u_n,\tau} = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau = u_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Прогнозируемое загрязнение атмосферы города при условии, что не реализовано ни одно из P ПП, обозначим через $C_t\,(z)$, $z \in Z$. Это загрязнение можно разделить на три составляющих

$$C_t(z) = C^0(z) + C_t^{\text{тр}}(z) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{\tau=1}^{T}\Delta C_{P+n}(z)\,W_{u_n,\tau}, \ \ z \in Z, \tag{1}$$

где 1) $C^0\,(z)$ — начальное загрязнение, которое измерено или получено расчетным путем в году, предшествующем плановому периоду, 2) $C_t^{\text{тр}}(z)$ — прогноз изменения загрязненности на отрезке 1, ..., t, из-за транспорта; в этой функции отражен также эффект от осуществления ПП на тех предприятиях, которые не учитываются при решении наших задач, 3) изменение загрязнения из-за пуска или закрытия предприятий.

Статической задачей будем называть следующую задачу планирования. Выбрать такие проекты, которые позволят с минимальными затратами снизить загрязненность до заданного уровня к концу периода планирования. Решение статической задачи с реальными исходными данными позволяет оценить полные затраты на очистку атмосферы от наиболее опасной для здоровья человека примеси.

3. Будем считать, как и при рассмотрении статической задачи, что ресурс задан скалярной величиной. Обозначим через D_t ограничение на затраты, предназначенные для воздухоохранной деятельности на отрезке 1, …,t для всего города. Понятно, что

$$D_1 < \cdots < D_t < \cdots < D_T \tag{2}$$

— каждый год придется вкладывать средства в экологию. Естественно ввести переменные

$$X_{t,p} \in \{0,1\}, \quad p = 1, \ldots, P, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{3}$$

имеющие следующий смысл. Значение переменной $X_{t,p}$ равно 1, если ПП p будет реализовано в год t и равно 0 в остальных случаях. Очевидно,

$$\sum_{t=1}^{T} X_{t,p} \leq 1, \qquad p = 1,\ldots,P. \tag{4}$$

Обозначим через Y_t ,

$$Y_t \in \Re, \quad t = 1,\ldots,T, \tag{5}$$

максимальную в городе концентрацию в год t. ($\Re$ — множество действительных чисел),

$$Y_t = \max_{z \in Z}\left(C_t(z) - \sum_{p=1}^{P}\sum_{\tau=1}^{t} \Delta C_p(z) \cdot X_{\tau,p} \right), \quad t = 1, \ldots, T. \qquad (6)$$

Обратим внимание на то, что функция $C_p(z)$, вычисляемая по формуле (1), на самом деле зависит не только от координат города z, но и сроков ввода или закрытия предприятий u_n. Пока будем считать, что эти сроки фиксированы.

Простейшая динамическая задача планирования — найти такие значения переменных, которые минимизируют T целевых функций $Y_1, \ldots, Y_T$, при следующих ограничениях на ресурсы

$$\sum_{p=1}^{P}\sum_{\tau=1}^{t} \zeta_p \cdot X_{\tau,p} \le D_t, \quad t = 1, \ldots, T. \qquad (7)$$

Теперь все ограничения на переменные Y_t, $X_{t,p}$ и константы выписаны.

4. Итак, простейшая модель, учитывающая динамику, сводится к многокритериальной задаче. Частными критериями оптимальности в ней являются концентрации $Y_1, \ldots, Y_T$. Сверткой этих критериев может служить средняя по времени концентрация

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t, \qquad (8)$$

но такой выбор обобщенного критерия является весьма неудачным. Рассмотрим пример. Пусть мы имеем два оптимальных решения какой-то конкретной задачи минимизации с целевой функцией

$$\frac{1}{5}\sum_{t=1}^{T} Y_t,$$

и ограничениями (3)–(7). В первом решении $(Y_1^{(1)}, \ldots, Y_5^{(1)}) = (5, 4, 3, 2, 1)$, во втором $(Y_1^{(2)}, \ldots, Y_5^{(2)}) = (5, 3, 2, 4, 1)$. Хотя значения средних концентраций и равны $(1/5)\cdot(5+4+3+2+1) = (1/5)\cdot(5+3+2+4+1)$, но первое решение явно предпочтительнее второго, т.к. резкое увеличение загрязнения воздуха весьма сильно отражается на заболеваемости населения.

Свертку частных критериев для рассматриваемой динамической модели осуществим, исходя из следующих соображений. На первом шаге естественно уменьшать загрязнение Y_T,

$$Y_T = \max_{z \in Z}\left(C^0(z) + \Delta C_t^{\text{тр}}(z) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{\tau=1}^{T} \Delta C_{P+n}(z) \cdot W_{u_n,\tau} - \sum_{p=1}^{P}\sum_{\tau=1}^{T} \Delta C_P(z) \cdot X_{\tau,p} \right)$$

в конце планового периода $1, \ldots, T$ в предположении, что все новые предприятия уже построены, старые закрыты и загрязнение транспортом изменилось на $\Delta C_t^{\text{тр}}(z)$, $z \in Z$. На втором шаге следует минимизировать загрязнение $Y_{T\text{-}1}$ в конце года T-1 при условии, что Y_T останется неизменным. На шаге T-t+1 минимизируется Y_t, при этом $Y_{t+1}, \ldots, Y_T$ — фиксированы. Другими словами, из физической природы изучаемого объекта следует лексикографическое упорядочение критериев $Y_1, \ldots, Y_T$

$$Y_T \succ \cdots \succ Y_t \succ \cdots Y_1, \qquad (9)$$

а описанная идея решения многокритериальной задачи носит название метода последовательной оптимизации частных критериев с учетом жесткого приоритета.

Для изложения дальнейшего материала нам удобно ввести новые переменные $\xi_{t,p} \in \{0,1\}$, $p = 1,...,P$, $t = 1,...,T+1$,

$$\xi_{t,p} = \sum_{\tau=1}^{t} X_{\tau,p}, \quad t = 1,\ldots,T, \quad p = 1,\ldots,P, \tag{10}$$

$$\xi_{T+1,p} = 1, \qquad p = 1,\ldots,P. \tag{11}$$

Очевидно, экономический смысл их следующий:

$$\xi_{t,p} = \begin{cases} 1, & \text{если ППП реализуется на отрезке } 1:t. \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Старые переменные $x_{t,p}$ легко выражаются через новые

$$X_{t,p} = \xi_{t+1,p} - \xi_{t,p}, \qquad t = 1,\ldots,T, \qquad p = 1,\ldots,P. \tag{12}$$

Отсюда получается ограничение на $X_{t,p}$,

$$X_{t,p} \le X_{t+1,p}, \quad t = 1,\ldots T, \qquad p = 1,\ldots P \tag{13}$$

вследствие того, что $X_{t,p} \geq 0$. Обозначим через $\xi^*_{t,p}$ — оптимальное решение динамической задачи, через Y_t^*, $t = 1,...,T$ — соответствующие значения частных критериев. Из определения (11)

$$\xi^*_{T+1,p} = 1, \qquad p = 1,\ldots,P.$$

Первый шаг решения состоит в выборе значений переменных Y_T, $\xi_{T,p}$, $p = 1,...,P$ таких, что

$$Y \to \min \tag{14}$$

при ограничениях

$$\max_{z\in Z}\left(C_T(z) - \sum_{p=1}^{P} \Delta C_P(z)\cdot \xi_{T,p} \right) \le Y_T, \tag{15}$$

$$\zeta_{T,p.} \le \xi^*_{T+1,p}, \quad p = 1, ..., P, \tag{17}$$

$$\zeta_{T,p.} \in \{0, 1\}, \quad p = 1, ..., P, \tag{18}$$

Заметим, что в задачу (14)–(18) вошли только переменные $\xi_{T,p} \in \{ 0,1 \}$, $p = 1,...,P$, но не вошли $\xi_{\tau,p}$, $\tau \in 1: T-1$, $p = 1,...,P$

Остальные шаги выполняются аналогичным образом. Опишем сразу произвольный T-t+1 шаг, на котором производится минимизация Y_t выбором значений P переменных $\xi_{t,p}$, $p = 1,...,P$ при фиксированных значениях $Y^*_\tau, X^*_{\tau,p}$, $\tau = t+1,\ldots,T+1$, $p = 1,\ldots,T$. Введем обозначение

$$P^t = \left\{ p \in 1:P \middle| \varsigma_{t+1,p} = 1 \right\} \qquad t = 1,\ldots,T, \tag{19}$$

$$P^1 \subseteq \cdots P^t \subseteq \ldots \subseteq P^T = 1:P, \tag{20}$$

которое позволяет исключить ограничение

$$\xi_{t,p} \le \xi^*_{t+1,p}, \qquad p = 1,\ldots,P. \tag{21}$$

Действительно, на шаге (T-t+1) ограничение (21) сразу же фиксирует значения неизвестных $\xi^*_{t,p} = 0$ для $p \in 1:P \setminus P^t$. Поэтому требуется вычислить только $\xi^*_{t,p}$, $p \in P^t$. Заметим также, что переменная Y_t , в отличие от двоичных переменных $\xi_{t,p}$, p = 1,...,P , принимает действительные значения $Y_t \in \Re$ и этот факт следует отразить в ограничениях задачи .

5. Итак, решение многокритериальной задачи планирования с лексикографическим упорядочением частных критериев (9) сводиться к решению T однотипных задач следующего вида. Найти значения переменных Y_t, $\xi_{t,p}$, p = 1,...,P такие, что

$$Y \to \min \tag{22}$$

при ограничениях

$$C_t(z) - \sum_{p \in P^t} \Delta C_p(z) \cdot \xi_{t,p} \le Y_t, \qquad z \in Z, \tag{23}$$

$$\sum_{p \in P^t} \varsigma_p \cdot \xi_{t,p} \le D_t, \tag{24}$$

$$\xi_{t,p} \in \{0,1\}, \qquad p \in P^t, \tag{25}$$

$$Y_t \in \Re. \tag{26}$$

При этом $\xi^*_{t,p} = 0$ для $p \in 1:P \setminus P^t$ и однокритериальные задачи (22)–(26) надо решать последовательно для t = T, T-1, …, 1. Отметим, что ограничение (15) для произвольного шага записано в другом, эквивалентном виде (23).

На содержательном уровне простейшая динамическая задача сводиться к выбору из заданного множества P таких ПП, которые предполагается реализовать на временном отрезке 1:t . Остальные ПП будут осуществлены в год t+1. При заданном ограничении на используемые ресурсы требуется сделать такой выбор ПП, который позволит минимизировать максимальную в городе концентрацию в конце года t . Понятно, что из набора P можно выделить ПП по другому принципу, а именно, минимизируя затраты при ограничениях на уровень загрязнения атмосферы, т.е. решая статическую задачу (1)-(3).

6. Найдем связь между статической задачей и динамической задачей (22)-(26). Запишем динамическую задачу сначала в несколько ином виде, который более удобен для нашего анализа. Динамическая задача

$$Y \to \min \tag{27}$$

при ограничениях

$$C(z) - \sum_{p=1}^{P} \Delta C_p(z) \cdot \xi_p \le Y, \qquad z \in Z, \tag{28}$$

$$\sum_{p=1}^{P} \varsigma_p \xi_p \le D, \tag{29}$$

$$\varsigma_p \in \{0,1\}, \qquad p = 1,\ldots,P, \tag{30}$$

$$Y \in \Re. \tag{31}$$

Статическая задача в математической форме выглядит так:

$$\varsigma = \sum_{p=1}^{P} \varsigma_p X_p \to \min \tag{32}$$

при ограничениях

$$C(z) - \sum_{p=1}^{P} \Delta C_p(z) X_p \le S, \qquad z \in Z, \tag{33}$$

$$X_p \in \{0,1\}, \qquad p = 1, \ldots, P. \tag{34}$$

Здесь опущены индексы t; множество ПП P, из которого производится выбор на шаге $T - t + 1$, обозначено просто $\{1, \ldots, P\}$, $s(z) \equiv S$, $z \in Z$.

Будем решать статическую задачу для различных значений стандарта загрязнения S, $1 \le S \le \max_{z \in Z} C(z)$, и вычислять при этом оптимальные значения целевых функций. Получим зависимость $\zeta(S)$, т.е. $\zeta(S_0)$ является оптимальным значением целевой функции задачи (32)–(34) для фиксированного значения параметра $S = S_0$. На рисунке 1 зависимость $\zeta(S)$ изображена сплошной линией. Она представляет из себя кусочно-постоянную невозрастающую функцию с разрывами первого рода.

Пусть S_0 соответствует произвольной точке разрыва, X_p^*, $p = 1,...,P$, — оптимальное решение статической задачи для ограничения $S = S_0$, при этом оптимальное значение целевой функции равно $\sum_{p=1}^{P} \varsigma_p X_p^* = D_0$. Тогда $\xi_p^* = X_p^*$, $p = 1,...,P$ является оптимальным решением динамической задачи (27)–(31) с ограничением $D = D_0$ и значением целевой функции $Y = S_0$.

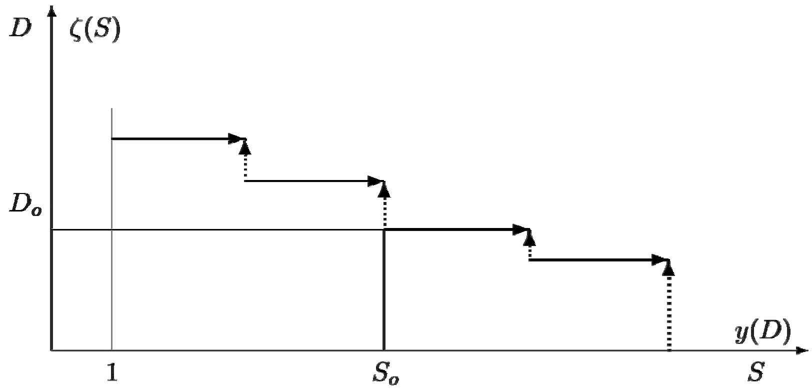

Рис.1. Сплошной и пунктирной линиями изображены графики функций $\zeta(S)$ и $y(D)$.

Таким образом, во всех точках разрыва функции $\zeta(S)$ оптимальные решения статической и динамической задач совпадают. Очевидно, что таким же образом можно ввести функцию $y(D)$, $0 \le D \le \sum_{p=1}^{P} \varsigma_p$, изображенную на рисунке 1 пунктирной линией. Количество разрывов в функциях $\zeta(S)$ и $y(D)$ одного порядка с числом P. Если ПП имеют сравнимые числовые характеристики, то из качественных соображений ясно, что при $P \to \infty$ расстояния между соседними точками разрыва $\zeta(.)$ и $y(.)$ стремится к 0. Итак, зная решения статической задачи мы автоматически получаем асимптотически-оптимальные решения динамической задачи и наоборот. Можно сказать, что статическая задача (32)–(34) и динамическая (27)–(31) являются двойственными по отношению друг к другу в указанном выше смысле. Следовательно, алгоритмы численного решения надо разрабатывать для решения только одного вида задач (27)–(31) или (32)–(34).

Литература

1. Косариков А.Н. Критичность экосистемы города, прогноз и возможности управления. Нижний Новгород: Волго-Вятское книжное изд-во, 1994.
2. Визгунов Н.П. Решение статической задачи регулирования загрязнения атмосферы. // Экономический вестник / Под. ред. Ф.Ф. Юрлова, Ю.В. Трифонова. — Н. Новгород: НГТУ, 2003. Вып. 2. С. 96–100.