

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРИНЦИПОВ ГАРАНТИРОВАННЫХ ПОТЕРЬ И СЭВИДЖА В ЗАДАЧЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Ф.Ф. Юрлов, А.Н. Ковалев, Ф.Н. Ковалев

Нижегородский государственный технический университет

Часто используемыми принципами выбора оптимального решения в условиях неопределенности являются принцип гарантированных потерь и принцип сэвиджа, позволяющие минимизировать потери от неблагоприятного действия неконтролируемых факторов и неудачного принятия решения. В статье определены характерные случаи точного совпадения результатов, получаемых при использовании данных принципов. Отмечено, что определенные случаи могут быть использованы при формировании исходных данных задачи с целью минимизации указанных потерь.

Как правило, решение той или иной задачи хозяйственно-экономической деятельности зависит от условий, в которых эта деятельность осуществляется. Если заранее не известно, каким образом проявятся такие условия, и на них невозможно повлиять, то задачи хозяйственно-экономической деятельности приходится решать при действии неуправляемых (или неконтролируемых) факторов, которыми являются указанные условия. В этом случае решение задач ведут, используя различные принципы выбора оптимальных решений [1]. В данной статье рассматриваются два из таких принципов: принцип гарантированных потерь, принцип Сэвиджа, которые в общем случае приводят к различным решениям. Первый нацелен на минимизацию потерь от неблагоприятного действия неконтролируемых факторов, второй — на минимизацию потерь от неудачного принятия решения. естественным является желание выявить такие исходные данные задачи хозяйственно-экономической деятельности, при которых оба принципа укажут на одинаковое оптимальное решение, позволяющее минимизировать потери как от неблагоприятного проявления неконтролируемых факторов, так и от неудачного решения задачи.

Напомним кратко суть применения этих принципов.

Матрицы эффективности, гарантированных потерь и сожалений

Формирование матрицы эффективности. Лицо, принимающее решение, располагает множеством вариантов (стратегий, альтернатив) его выбора $X = \{x_i\}$, $i = \overline{1, n}$.

Указанные стратегии считаются контролируемыми (управляемыми) факторами. В качестве x_i могут быть технические параметры проектируемых систем, «внутренние» показатели состояния предприятия, различные варианты решения поставленных задач и т.д.

Наряду с факторами управляемыми действуют факторы, которые не поддаются контролю $Y = \{y_j\}$, $j = \overline{1, m}$.

Факторы y_j — это уровень спроса на товары, предлагаемые фирмой; рыночные цены; условия эксплуатации технических и производственных систем; действия конкурентов и т.д. В общем случае $n \neq m$.

С целью оценки эффективности принимаемых решений вводится показатель эффективности E . Считается, что имеется возможность установления зависимости данного показателя от контролируемых и неконтролируемых факторов, т.е. функция $E(x, y)$ — является известной. Полагается, что множества факторов X и Y являются дискретными, поэтому и эффективность E представляет собой дискретный набор чисел. Таким образом, каждой паре контролируемых и неконтролируемых факторов (x_i, y_j) ставится в соответствие значение эффективности $E(x_i, y_j)$, которое обозначим E_{ij} . Для исключения тривиальных решений будем считать, что множество $\{E_{ij}\}$ не может быть образовано одним и тем же числом. Иначе задача выбора оптимальной стратегии потеряла бы смысл (все стратегии эквивалентны и не зависят от неуправляемых факторов). Однако среди элементов E_{ij} в общем случае могут встречаться одинаковые.

Имея набор значений эффективности, формируют матрицу **E**. Эта матрица совместно с контролируемыми и неконтролируемыми факторами изображена в виде следующей таблицы

$\begin{smallmatrix} y \\ x \end{smallmatrix}$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	E_{11}	E_{12}	$\dots$	E_{1m}
x_2	E_{21}	E_{22}	$\dots$	E_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	E_{n1}	E_{n2}	$\dots$	E_{nm}

Факторы x_i и y_j (т.е. строки и столбцы матрицы **E**) упорядочивает лицо, принимающее решение. Поэтому на этапе формирования матрицы можно менять местами между собой строки и менять местами между собой столбцы. Но недопустимо ее изменять в процессе применения принципов. Иначе задача о сопоставимости оптимальных решений полученных при использовании различных принципов не будет иметь смысла.

Пример. Рассматривается задача определения оптимального объема продаж товара фирмы при неконтролируемых (не известных точно) рыночных ценах. В качестве управляемых факторов выступают объемы продаж $Q = \{q_i\}$, $i = 1, 2, 3$.

Неконтролируемыми (неуправляемыми) факторами являются рыночные цены, которые представляют набор $P = \{p_j\}$, $j = \overline{1, 4}$.

Эффективность принимаемого решения определяется с помощью показателя валового дохода (выручки) $R_t(q, p) = QP$.

Матрица эффективности для данной задачи отражена в следующей таблице

$q \backslash p$	5	8	11	10
7	35	56	77	70
12	60	96	132	120
9	45	72	99	90

Будем анализировать матрицу $\mathbf{E}$, составленную для показателя эффективности E , удовлетворяющему свойству — чем больше E , тем лучше. Ситуация, когда в качестве эффективности выступают затраты (т.е., чем меньше E , тем лучше) во многом аналогична и здесь не рассматривается.

2. *Принцип гарантированных потерь.* В каждой строке матрицы $\mathbf{E}$ выбирается максимальный элемент $E_i^{\max}$ и относительно них составляется матрица потерь $\mathbf{\Pi}$, из которой в свою очередь по максимальным элементам $\Pi_i^{\max}$ ее строк составляется матрица-столбец $\mathbf{\Pi}^{\max}$:

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1m} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \dots & E_{nm} \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{\Pi} = \begin{vmatrix} E_1^{\max} - E_{11} & E_1^{\max} - E_{12} & \dots & E_1^{\max} - E_{1m} \\ E_2^{\max} - E_{21} & E_2^{\max} - E_{22} & \dots & E_2^{\max} - E_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_n^{\max} - E_{n1} & E_n^{\max} - E_{n2} & \dots & E_n^{\max} - E_{nm} \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{\Pi}^{\max} = \begin{vmatrix} (E_1^{\max} - E_{1j})^{\max} \\ (E_2^{\max} - E_{2j})^{\max} \\ \vdots \\ (E_n^{\max} - E_{nj})^{\max} \end{vmatrix} \rightarrow \left((E_i^{\max} - E_{ij})^{\max} \right)^{\min} = \Pi_{\text{опт}}(x_{\text{опт}}).$$

Оптимальной считается стратегия, соответствующая минимальному элементу матрицы $\mathbf{\Pi}^{\max}$. Таким образом, матрица потерь представляет собой совокупность величин ущерба, который понес бы хозяйствующий субъект, если бы неконтролируемые факторы проявились неблагоприятным образом. Согласно данному принципу предполагается, что неконтролируемые факторы будут наихудшими и выбирается та стратегия, при которой ущерб будет наименьшим в таких неблагоприятных условиях.

Заметим, что обычно нет необходимости составлять матрицу $\mathbf{\Pi}$ (при большом числе элементов матрицы $\mathbf{E}$ это может быть достаточно трудоемко). С целью определения максимального ущерба в данной строке достаточно выбрать в ней максимальный и минимальный элементы и составить их разность. Матрицей таких разностей и будет $\mathbf{\Pi}^{\max}$:

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1m} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \dots & E_{nm} \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{\Pi}^{\max} = \begin{vmatrix} E_1^{\max} - E_1^{\min} \\ E_2^{\max} - E_2^{\min} \\ \vdots \\ E_n^{\max} - E_n^{\min} \end{vmatrix} \rightarrow (E_i^{\max} - E_i^{\min})^{\min} = \Pi_{\text{опт}}$$

3. *Принцип Сэвиджа.* В каждом столбце матрицы $\mathbf{E}$ выбирается максимальный элемент $E_j^{\max}$ и относительно них составляется матрица сожалений $\mathbf{C}$, из которой по максимальным элементам $C_i^{\max}$ ее строк составляется матрица-столбец $\mathbf{C}^{\max}$:

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1m} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \dots & E_{nm} \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{C} = \begin{vmatrix} E_1^{\max} - E_{11} & E_2^{\max} - E_{12} & \dots & E_m^{\max} - E_{1m} \\ E_1^{\max} - E_{21} & E_2^{\max} - E_{22} & \dots & E_m^{\max} - E_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_1^{\max} - E_{n1} & E_2^{\max} - E_{n2} & \dots & E_m^{\max} - E_{nm} \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{C}^{\max} = \begin{vmatrix} (E_j^{\max} - E_{1j})^{\max} \\ (E_j^{\max} - E_{2j})^{\max} \\ \vdots \\ (E_j^{\max} - E_{nj})^{\max} \end{vmatrix} \rightarrow \left((E_j^{\max} - E_{ij})^{\max} \right)^{\min} = C_{\text{опт}}(x_{\text{опт}}).$$

Оптимальной считается стратегия, соответствующая минимальному элементу матрицы $\mathbf{C}^{\max}$. Таким образом, матрица сожалений представляет собой совокупность величин ущерба, который понес бы хозяйствующий субъект, если бы выбрал неоптимальную стратегию. Согласно данному принципу предполагается, что оптимальную (с точки зрения получения максимального значения E) стратегию определить не удастся, но ее надо выбрать так, чтобы потери от такого неоптимального выбора были минимальны.

В настоящей статье рассматривается задача об определении характерных и наглядных свойств матрицы $\mathbf{E}$, при которых использование принципов гарантированных потерь и Сэвиджа эквивалентно, т.е. когда данные принципы указывают не только на одинаковые стратегии, но и когда эти стратегии будут в точности совпадать по численному значению, а значит приведут к одинаковым потерям от неблагоприятного действия как объективных (неуправляемых), так и субъективных (управляемых) факторов.

Точное совпадение стратегий по принципам гарантированных потерь и Сэвиджа

В этом параграфе перечислены характерные случаи, когда по виду матрицы $\mathbf{E}$ можно определить, что использование рассматриваемых принципов приведет в точности к одинаковому результату. Обоснование изложенных здесь результатов носит чисто математический характер, связанный с анализом условий равенства

матриц $\mathbf{P}^{\max}$ и $\mathbf{C}^{\max}$, достаточно объемно и формализовано и, на наш взгляд, выходит за рамки экономической тематики настоящего журнала и поэтому не включено в содержание данной статьи.

1. «Случай максимального элемента в строках и столбцах» осуществляется, если в матрице эффективности максимальные элементы всех строк и столбцов одинаковы.

Пример. Здесь и в дальнейших примерах максимальные элементы строк будем обозначать жирными числами.

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{4} & 0 \\ 3 & 1 & \mathbf{4} \\ 2 & 2 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{P} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \mathbf{4} \\ 1 & \mathbf{3} & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{P}^{\max} = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ [2] \\ 3 \end{vmatrix}.$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \mathbf{4} \\ 1 & \mathbf{3} & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{C}^{\max} = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ [2] \\ 3 \end{vmatrix}.$$

Оптимальной является стратегия X_3 .

Можно отметить, как наглядное свойство матрицы $\mathbf{E}$, что указанные элементы, имея одинаковое численное значение, являются наибольшими в этой матрице.

2. «Случай столбца минимальных элементов строк». Здесь матрица $\mathbf{E}$ имеет следующие признаки:

- минимальные элементы строк, кроме одного, расположены в одном столбце;
- максимальные элементы строк равны между собой и один из них находится в столбце минимальных элементов строк;
- минимальный элемент строки, который не расположен в одном столбце с другими минимальными элементами строк, должен находиться в столбце, в котором есть хотя бы один максимальный элемент строки.

Пример 1. Здесь и далее в примерах минимальные элементы строк будем обозначать курсивом.

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 18 & \mathbf{20} & 5 & 3 & 10 \\ 8 & \mathbf{20} & 11 & 6 & 15 \\ 13 & 9 & 16 & \mathbf{20} & 12 \\ 11 & \mathbf{20} & 14 & 7 & 9 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{P} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 15 & \mathbf{17} & 10 \\ 12 & 0 & 9 & \mathbf{14} & 5 \\ 7 & \mathbf{11} & 4 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 6 & \mathbf{13} & 11 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{P}^{\max} = \begin{vmatrix} 17 \\ 14 \\ [11] \\ 13 \end{vmatrix}.$$

$\downarrow$

Оптимальной явля-

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 11 & \mathbf{17} & 5 \\ 10 & 0 & 5 & \mathbf{14} & 0 \\ 5 & \mathbf{11} & 0 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & \mathbf{13} & 7 \end{vmatrix} \rightarrow C^{\max} = \begin{vmatrix} 17 \\ 14 \\ [11] \\ 13 \end{vmatrix}. \quad \text{ется стратегия } x_3.$$

Пример 2.

$$E = \begin{vmatrix} \mathbf{30} & 8 & 1 & 10 \\ 22 & 15 & 4 & \mathbf{30} \\ 2 & 6 & \mathbf{30} & 12 \end{vmatrix} \rightarrow \Pi = \begin{vmatrix} 0 & 12 & \mathbf{29} & 20 \\ 8 & 5 & \mathbf{26} & 0 \\ \mathbf{28} & 24 & 0 & 8 \end{vmatrix} \rightarrow \Pi^{\max} = \begin{vmatrix} 29 \\ [26] \\ 28 \end{vmatrix}.$$

↓

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 7 & \mathbf{29} & 20 \\ 8 & 0 & \mathbf{26} & 0 \\ \mathbf{28} & 9 & 0 & 8 \end{vmatrix} \rightarrow C^{\max} = \begin{vmatrix} 29 \\ [26] \\ 28 \end{vmatrix}. \quad \text{Оптимальной является стратегия } x_2.$$

3. «Случай главной диагонали». Матрица **E** должна обладать следующими свойствами:

- она является квадратной;
- на ее главной диагонали располагаются элементы, являющиеся минимальными одновременно и в строке и в столбце. Например, элемент E_{22} должен быть минимален во второй строке и во втором столбце;
- максимальный элемент строки должен быть равен максимальному элементу столбца того же номера. Например, $E_{2j} = E_{i2}$, где E_{2j} , E_{i2} — максимальные элементы соответственно строки и столбца.

Эти требования являются необходимыми, но не достаточными, и в этом случае приходится еще анализировать одну из матриц — либо **C**, либо **Π**. Достаточным условием рассматриваемого случая будет — на главной диагонали матрицы **C** (либо **Π**) должны находиться элементы этой матрицы, которые являются максимальными в строке и в столбце того же номера. Например, элемент C_{22} (или Π_{22}) должен быть максимален во второй строке и во втором столбце.

Отметим, что последнее условие не сильно осложняет анализ эквивалентности рассматриваемых принципов, поскольку, чтобы получить решение задачи необходимо вычислять хотя бы одну из матриц — либо **C**, либо **Π**.

Пример. В этом примере жирными числами обозначены и максимальные элементы строк и максимальные элементы соответствующих столбцов.

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{16} & 9 & \mathbf{20} & 12 \\ 15 & 6 & 8 & 14 & \mathbf{16} \\ 4 & \mathbf{10} & 2 & 6 & 9 \\ \mathbf{20} & 13 & 5 & 4 & \mathbf{17} \\ \mathbf{17} & 14 & \mathbf{10} & 11 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{\Pi} = \begin{vmatrix} \mathbf{17} & 4 & 11 & 0 & 8 \\ 1 & \mathbf{10} & 8 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & \mathbf{8} & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 15 & \mathbf{16} & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 6 & \mathbf{10} \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{\Pi}^{\max} = \begin{vmatrix} 17 \\ 10 \\ [8] \\ 16 \\ 10 \end{vmatrix}.$$

↓

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{17} & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & \mathbf{10} & 2 & 6 & 1 \\ 16 & 6 & \mathbf{8} & 14 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & \mathbf{16} & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 9 & \mathbf{10} \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{C}^{\max} = \begin{vmatrix} 17 \\ 10 \\ [8] \\ 16 \\ 10 \end{vmatrix}.$$

Оптимальной является стратегия X_3 .

Укажем, что перечисленными случаями не исчерпываются все случаи точного совпадения результатов, получаемых по принципам гарантированных потерь и Сэвиджа. Однако, визуально (по внешним признакам матриц $\mathbf{E}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{\Pi}$) провести анализ других ситуаций уже сложнее и для них целесообразнее проводить непосредственный расчет обеих матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{\Pi}$.

Литература

1. Юрлов Ф.Ф., Поляков Н.Ф., Плеханова А.Ф. Социально-экономическое прогнозирование при наличии неуправляемых факторов. — Н. Новгород: Изд-во НГТУ, 2003. — 133 с.