

УДК 532.58

**ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК,  
ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ПНЕВМООБОЛОЧКУ  
ПРИ ЕЕ ПОГРУЖЕНИИ В ЖИДКОСТЬ**

© 2007 г.

*В.В. Шабаров, А.К. Якимов*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

[onego@kis.ru](mailto:onego@kis.ru)*Поступила в редакцию 29.05.2007*

Предлагается метод расчета формы и внешних нагрузок, действующих на удлиненную пневмооболочку при ее быстром входе в жидкость. В решении учитываются основные факторы нелинейности, связанные с неизвестной формой как свободной поверхности жидкости, так и поперечного сечения пневмооболочки при ее погружении. Изложен алгоритм численного решения поставленной задачи, представлены некоторые результаты решения и дана их физическая интерпретация. Разработанная методика может использоваться при проектировании судов с динамическими принципами поддержания, в задачах механики надувных конструкций и при моделировании некоторых биомеханических систем.

**Введение**

При установившемся глиссировании удлиненных тел по поверхности жидкости весьма рациональной и результативной является гипотеза плоских поперечных сечений [1], сводящая задачу пространственного обтекания глиссирующей поверхности к задаче непрерывного погружения в жидкость профиля, совпадающего с поперечным сечением глиссирующего тела (см. рис. 1). Скорость погружения профиля  $V$  связана со скоростью движения глссера  $V_{\text{гл}}$  соотношением  $V = V_{\text{гл}} \psi$ , где  $\psi$  – угол ходового дифферента. Известен ряд результатов, полученных с использованием этой гипотезы, относящихся, в основном, к глиссированию абсолютно твердых тел с поперечными сечениями различной клиновидной формы. Некоторые результаты получены для глиссирующих твердых деформируемых тел [2]; при этом метод расчета базируется на последовательном решении задачи определения внешних гидродинамических нагрузок и задачи определения по этим нагрузкам формы поперечного сечения плоского профиля с учетом силовой конструкции судна. На основе такого разделения организуется процедура последовательных приближений, являющаяся, по сути, процедурой простой итерации по определению нагрузок (гидродинамическая задача) и формы профиля (задача механики деформируемого твердого тела). Такая процедура является сходящейся, поскольку для глиссирующих твердых тел деформируемая форма плоского поперечного сечения мало

отличается от исходной. Следует также отметить, что такой подход фактически означает пренебрежение в граничном условии непротекания относительными скоростями смоченных точек погружающегося плоского профиля, что является вполне оправданным для установившегося глиссирования твердых тел.

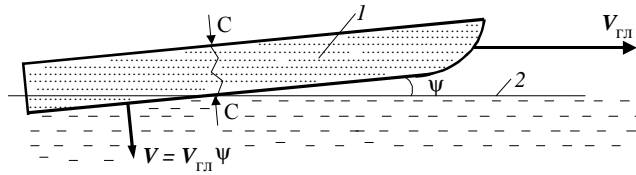
При глиссировании гибких и надувных конструкций, которые находят все большее применение в скоростном судостроении, форма тела под действием гидродинамических нагрузок может весьма существенно отличаться от исходной и вышеизложенная схема решения становится непригодной. В литературе отсутствуют законченные решения таких задач; вместе с тем постановки аналогичных задач для деформируемых твердых тел с учетом относительных скоростей перемещений точек плоского контура обсуждаются, например, в [2].

**Постановка задачи**

Рассматривается быстрое симметричное погружение с известной постоянной скоростью  $V$  удлиненной пневмооболочки в идеальную несжимаемую невесомую жидкость. Длина цилиндрической вставки оболочки предполагается настолько большой, что при ее погружении справедлива гипотеза плоских поперечных сечений.

Пневмооболочка прикреплена к жесткой платформе  $AB$  системой ликпаз – ликтрос. Ширина зоны крепления  $AB$  задана. Масса воздуха, предварительно закачанного в пневмооболочку, известна и неизменна в процессе погружения. Динамическими

эффектами, обусловленными движением аэростатическое давление в оболочке в каждый момент времени удовлетворяют уравнениям



Форма оболочки и свободной поверхности в фиксированной плоскости С–С

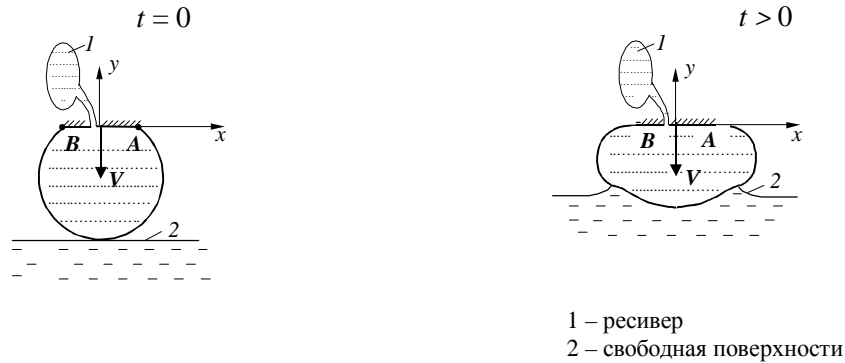


Рис. 1

пренебрегают.

Оболочка считается выполненной из нерастяжимого невесомого материала. До момента контакта оболочки с жидкостью поперечное сечение оболочки представляет собой круговой сегмент ( $t = 0$ , рис. 1). В процессе погружения форма поперечного сечения меняется, свободная поверхность жидкости деформируется ( $t > 0$ , рис. 1). Перемещения элементов оболочки и частиц свободной поверхности жидкости считаются конечными; в то же время форма смоченной поверхности поперечного сечения, такова, что в каждый момент времени течение жидкости, порожденное погружением поперечного сечения, сходно с обтеканием пластины (гипотеза Г. Вагнера [3]). Применение гипотезы Г. Вагнера в рассматриваемой задаче означает, что на оболочку в каждый момент времени действуют со стороны жидкости нагрузки, аналогичные нагрузкам, действующим на обтекаемую неоднородным потоком эквивалентную пластину. Ширина пластины в каждый момент времени неизвестна и равна смоченной ширине поперечного сечения оболочки. Неоднородность потока обусловлена движением элементов гибкой оболочки относительно жесткой платформы АВ.

В рамках сделанных допущений форма поперечного сечения оболочки и внутреннее

$$\frac{T y''_{об}}{\sqrt{\left(1 + \left(y''_{об}\right)^2\right)^3}} - (p_a - p(x)) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \left(p^0 + p_{атм}\right) \left(S^0 + S_{рес}\right)^n = \\ & = \left(p_a + p_{атм}\right) \left(S + S_{рес}\right)^n, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $T$  – сила натяжения;  $y_{об}(x)$  – ординаты точек поперечного сечения оболочки;  $p_a$  – мгновенное избыточное аэростатическое давление газа внутри оболочки;  $p$  – избыточное гидродинамическое давление, действующее на смоченную часть оболочки со стороны жидкости;  $p_{атм}$  – атмосферное давление;  $p^0$  – известное избыточное давление газа в оболочке до контакта с жидкостью;  $S^0$  – известная площадь поперечного сечения оболочки до контакта с жидкостью;  $S$  – мгновенная площадь поперечного сечения оболочки;  $S_{рес}$  – площадь ресивера;  $n$  – показатель адиабаты, штрих означает производную.

Граничными условиями для дифференциального уравнения равновесия поперечного сечения оболочки в данной задаче являются условие симметрии и условие крепления оболочки (например, в т. А).

Гидродинамические давления на смоченную часть поперечного сечения оболочки совпадают в каждый момент времени с нагрузками, действующими на эквивалентную пластину переменной ширины  $2b(t)$ . Для определения гидродинамических давлений ставится задача потенциального обтекания пластины. Формальное решение этой задачи дается потенциалом вихревого слоя, распределенным на отрезке  $[-b, b]$  оси  $O_1x_1$ , имеющей начало в плоскости симметрии и совпадающей с невозмущенным уровнем жидкости на бесконечном удалении от оболочки; при этом скачок потенциала обусловлен только нижней частью отрезка, т.е.

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \gamma(x_1) \arctg \frac{y}{(x-x_1)} dx_1.$$

Интенсивность вихревого слоя  $\gamma(x_1)$  должна удовлетворять условиям непротекания (3) и бесциркуляционного обтекания (4)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma(x_1)}{(x-x_1)} dx_1 = -V + V_{\text{отн.}}(x), \text{ при } |x| \leq b, \quad (3)$$

$$\int_{-b}^b \gamma(x_1) dx_1 = 0. \quad (4)$$

Вертикальные перемещения смоченных точек поперечного сечения оболочки относительно жесткой платформы учитываются в граничном условии непротекания (3) через относительные скорости  $V_{\text{отн.}}(x = x_1)$

$$V_{\text{отн.}}(x) = \frac{\partial y_{\text{об}}}{\partial t}. \quad (5)$$

Гидродинамические давления связаны с интенсивностью вихревого слоя через линеаризованный интеграл Коши–Лагранжа

$$p(x) = -r \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^x g(x_1) dx_1. \quad (6)$$

Ширина эквивалентной пластины определяется в каждый момент времени из условия равенства ординат свободной поверхности жидкости и оболочки в точке встречи

$$y_{\text{об}}(x=b(t), t) = \int_0^t \frac{1}{\pi V} \int_{-b(\xi)}^{b(\xi)} \frac{\gamma(x_1)}{b(\xi)-x_1} dx_1 d\xi. \quad (7)$$

Правая часть в уравнении (7) представляет собой подъем свободной поверхности жидкости в момент времени  $t$  в точке с абсциссой  $x = b(t)$ .

### Дискретизация уравнений и численная схема решения

Первоначально численная схема решения нелинейной задачи гидроупругости (1)–(7)

строилась на основе разделения задачи для каждого расчетного момента времени на задачу расчета формы поперечного сечения оболочки и задачу расчета нагрузок, действующих на оболочку. Для дискретизации и решения уравнений (1), (2) использовались конечно-разностные и вариационно-разностные подходы; численное решение гидродинамической задачи проводилось как методом дискретных вихрей (МДВ), так и более точным методом вихревых панелей. Рассматривались различные схемы взаиморасположения «гидродинамических» и «оболочечных» узлов, использовались релаксационные процедуры. В целом, численные исследования, проведенные в этом направлении, привели к отрицательным результатам: удалось построить сходящийся алгоритм для актуальных на практике скоростей погружения ( $V = 0.5 \dots 2.5$  м/с) и начальных избыточных давлений в оболочке ( $p^0 = 0.01 \dots 0.1 p_{\text{атм}}$ ).

Ниже рассматривается численный метод решения задачи гидроупругости (1)–(7), в основе которого лежит совместное для расчетного момента времени решение гидродинамических уравнений и уравнений равновесия поперечного сечения оболочки. Метод излагается в варианте конечно-разностной реализации для уравнений равновесия оболочки и реализации МДВ для гидродинамических уравнений. Аппроксимация уравнений проводится с первым порядком точности по  $t$  и вторым порядком по  $x$ .

При решении связанной задачи (1)–(7) использовалась согласованная со всеми уравнениями (1)–(7) схема дискретизации, показанная на рис. 2.

Правая часть поперечного сечения оболочки в момент времени  $t^0 = 0$  разбивается узлами на  $(m + 1)$  прямолинейный элемент:  $m$  элементов длины  $2\Delta l$  и  $(m + 1)$ -й элемент длины  $\Delta l$ , примыкающий к точке крепления (т. А). Считается, что в процессе погружения элементы сохраняют прямолинейную форму.

Тогда положение любого узла в произвольный момент времени  $t^k$  полностью определяется совокупностью углов  $\alpha_i^k$  ( $i = 1, m+1$ ); совокупность этих углов должна удовлетворять граничному условию крепления оболочки в т. А

$$2\Delta l \sum_{i=1}^m \cos \alpha_i^k + \Delta l \cos \alpha_{m+1}^k = x_A. \quad (8)$$

Абсциссы и ординаты узлов определяются по формулам

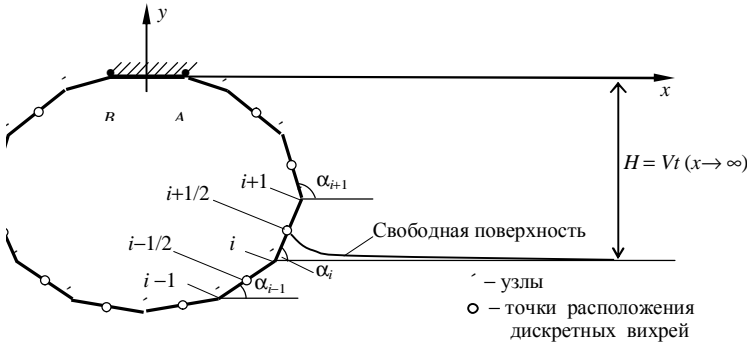


Рис. 2

$$x_0 = 0; \quad x_i^k = 2\Delta l \sum_{j=1}^i \cos \alpha_j^k, \quad i = \overline{1, m}; \quad (9)$$

$$x_{m+1} = x_A;$$

$$y_{i-1}^k = -\Delta l \sin \alpha_{m+1}^k - 2\Delta l \sum_{j=i}^m \sin \alpha_j^k, \quad i = \overline{1, m};$$

$$y_m^k = -\Delta l \sin \alpha_{m+1}^k; \quad y_{m+1} = 0.$$

Мгновенная площадь поперечного сечения оболочки имеет в переменных  $\alpha_i^k$  вид

$$S^k = 4\Delta l^2 \sum_{i=1}^m \cos \alpha_i^k \sum_{j=i}^m \sin \alpha_j^k + \Delta l \sin \alpha_{m+1}^k (x_A + 2\Delta l \sum_{j=1}^m \cos \alpha_j^k). \quad (10)$$

В центре каждого элемента, за исключением  $(m+1)$ -го, располагается дискретный вихрь циркуляции  $\Gamma_i^k$ . Координаты дискретных вихрей в момент времени  $t^k$ :

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^k &= x_i^k - \Delta l \cos \alpha_i^k; \quad i = \overline{1, m}, \\ \bar{y}_i^k &= y_i^k - \Delta l \sin \alpha_i^k; \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (11)$$

В начальный момент времени  $\Gamma_i^0 = 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ). В последующие моменты времени

отличны от нуля только циркуляции дискретных вихрей, находящихся на смоченной поверхности оболочки.

Условие бесциркуляционного обтекания (4) удовлетворяется в любой момент времени автоматически, поскольку каждому дискретному вихрю циркуляции  $\Gamma_i^k$  соответствует симметричный дискретный вихрь циркуляции  $(-\Gamma_i^k)$  на левой части поперечного сечения оболочки.

Граничное условие непротекания (3) удовлетворяется только в смоченных контрольных точках, которые совпадают со смоченными узлами. Относительные

вертикальные скорости перемещения узлов в момент времени  $t^k$  определяются через ординаты узлов  $y_i^k$

$$V_{\text{отн } i}^k = \frac{y_i^k - y_i^{k-1}}{t^k - t^{k-1}}. \quad (12)$$

Гидродинамические давления в смоченных узлах в момент времени  $t^k$  в рамках МДВ находятся по формулам

$$\begin{aligned} p_i^k &= -\rho \frac{\Gamma_i^k - \Gamma_i^{k-1}}{t^k - t^{k-1}}, \quad i = \overline{1, k}; \\ p_i^k &= 0, \quad i = \overline{k+1, m}. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть в момент времени  $t^{k-1}$  известна форма оболочки, а также циркуляции всех дискретных вихрей во все предшествующие моменты времени, включая  $t^{k-1}$ . Расчетный момент времени  $t^k$  выбирается таким образом, чтобы жидкостью было замыто ровно  $k$  точек расположения дискретных вихрей на правой части оболочки. Тогда профиль свободной поверхности в момент времени  $t^k$  ( $k \geq 2$ ) в системе координат, связанной с платформой AB, имеет вид

$$\eta(x, t^k) = -y_0^0 + \int_0^{t^k} V_y(x, \xi) d\xi = -y_0^0 + V(t^k - t^0) + \frac{1}{P} \sum_{j=1}^{k-1} (t^{j+1} - t^j) \sum_{i=1}^j \frac{\Gamma_i^j}{x - x_i^j}. \quad (14)$$

В (14) учтено, что  $k$ -й дискретный вихрь влияет в момент времени  $t^k$  только на поле скоростей и не успевает внести свой вклад в формирование профиля свободной поверхности жидкости в момент  $t^k$ . При указанном выборе расчетных моментов времени при  $k < 2$

$$\eta(x, t^k) = -y_0^0 + V(t^k - t^0). \quad (14')$$

Выбор схемы взаиморасположения узлов и дискретных вихрей, а также расчетных моментов времени, жестко привязанных к точкам расположения дискретных вихрей, обеспечивает:

- автоматическое выполнение условия КФЛ (условие Куранта–Фридрихса–Леви) устойчивости схемы;
- отказ от процедуры перехода от дискретных вихрей к непрерывным вихревым слоям и обратной процедуры, поскольку вся гидродинамическая «история» погружения оболочки хранится в «памяти» заранее определенных точек;
- упрощение алгоритма численного решения, поскольку разностные уравнения равновесия оболочки и условия непротекания выполняются в одних и тех же точках.

Система уравнений, аппроксимирующих задачу (1)–(7) при указанной схеме дискретизации, имеет на  $k$ -м временном слое следующий вид

$$T^k \frac{\alpha_1^k}{\Delta l} = p_a^k - p_1^k, \quad (15)$$

$$T^k \frac{\alpha_{i+1}^k - \alpha_i^k}{\Delta l} = p_a^k - p_i^k, \quad i = \overline{1, m},$$

$$2\Delta l \sum_{i=1}^m \cos \alpha_i^k + \Delta l \cos \alpha_{m+1}^k = x_A, \quad (16)$$

$$(p^0 + p_{\text{атм}})(S^0 + S_{\text{pec}})^n = (p_a^k + p_{\text{атм}})(S^k + S_{\text{pec}})^n, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{v=1}^k \frac{\Gamma_v^k}{x_i - \bar{x}_v^k} = -V + \frac{y_i^k - y_i^{k-1}}{t^k - t^{k-1}}, \quad (18)$$

$$i = \overline{1, k},$$

$$\bar{x}_k^k = h(x_k^k, t^k). \quad (19)$$

В системе нелинейных алгебраических уравнений (15)–(19) неизвестными в момент времени  $t^k$  являются: совокупность углов  $\alpha_i^k$  ( $i = \overline{1, m+1}$ ), циркуляции дискретных вихрей  $\Gamma_i^k$  ( $i = \overline{1, k}$ ), сила натяжения  $T^k$ , избыточное аэростатическое давление в оболочке  $p_a^k$  и собственно расчетный момент времени  $t^k$ . Порядок системы  $(m + k + 4)$ , т. е. растет пропорционально номеру временного шага  $k$ .

Численно решение системы (15)–(19) проводится методом Ньютона; в качестве начального приближения  $k$ -го шага используется результат решения  $(k-1)$ -го шага и нулевая циркуляция  $k$ -го вихря.

При проведении расчетов по этой схеме построенная схема обеспечивает сходимость даже для начальных давлений в оболочке порядка  $0.005 p_{\text{атм}}$  и «статических» погружений  $H = V \times t$ , соизмеримых с высотой непогруженной оболочки.

### Результаты расчетов

Разработанный алгоритм был реализован в программной среде Fortran powerstation.

Объектом расчетов являлись оболочки, геометрия и крепление которых к жесткой платформе характерны для пневмооболочек, используемых в качестве боковых ограждений зон повышенного давления на ряде скоростных амфибийных транспортных средств (суда на воздушной подушке, экранопланы, самолеты с шасси на воздушной подушке).

На начальной стадии расчетов исследовалось влияние числа разбиений  $m$  на точность решения задачи при различных

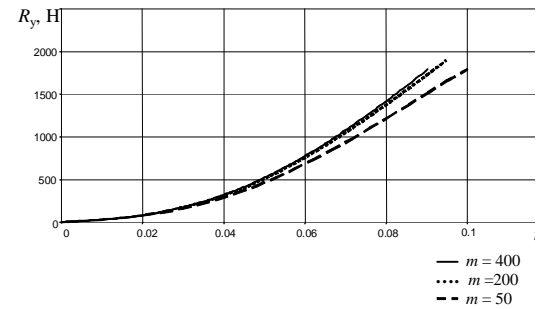


Рис. 3

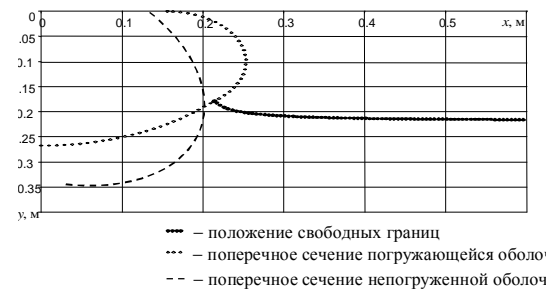


Рис. 4

скоростях погружения ( $\max V = 4$  м/с) и различных начальных давлениях в оболочке ( $\min p^0 = 500$  Н/м<sup>2</sup>). В ходе расчетных исследований выявлено влияние величины  $P_{AB}/AB$  на число разбиений  $m$ , обеспечивающее заданную точность расчетов гидродинамической реакции ( $P_{AB}$  – периметр поперечного сечения оболочки). При проведении расчетов с 5% точностью для  $P_{AB}/AB < 3.5$  достаточно брать  $m = 200$ . При больших отношениях  $P_{AB}/AB$  число разбиений необходимо увеличивать; в частности, при  $P_{AB}/AB = 5$  указанная точность обеспечивается лишь при  $m \approx 400$ . На рис. 3 показано влияние числа разбиений на зависимость гидродинамической реакции  $R_y$  от времени  $t$  для  $P_{AB}/AB = 3.08$ ,  $V = 1$  м/с,  $p^0 = 1000$  Н/м<sup>2</sup>. В расчетах выявлено, что значения величин  $V$  и  $p^0$  слабо влияют на потребное с точки зрения

смоченной поверхности не является постоянной величиной и растет с развитием процесса погружения. Так, для рассматриваемой оболочки относительное увеличение смоченной поверхности за счет подпора при  $t \leq 0.006$  с не превышает 20%.

Вертикальные скорости перемещения точек оболочки относительно жесткой платформы при  $p^0 = 500 \dots 5000$  Н/м<sup>2</sup> в начальные моменты времени весьма близки к скорости погружения оболочки. Для анализируемой оболочки при  $t \leq 0.01$  с относительные скорости  $V_{отн}(x)$  во всех точках оболочки меняются в диапазоне  $0.85 \dots 0.97$  м/с (скорость погружения оболочки  $V = 1$  м/с). В дальнейшем, в связи с ростом аэростатического давления в оболочке (см. рис. 5а),  $V_{отн}$  уменьшаются, однако их величина остается соизмеримой со скоростью погружения ( $0.23$  м/с  $\leq V_{отн}(x) \leq 0.67$  м/с при  $t^* = 0.132$  с;

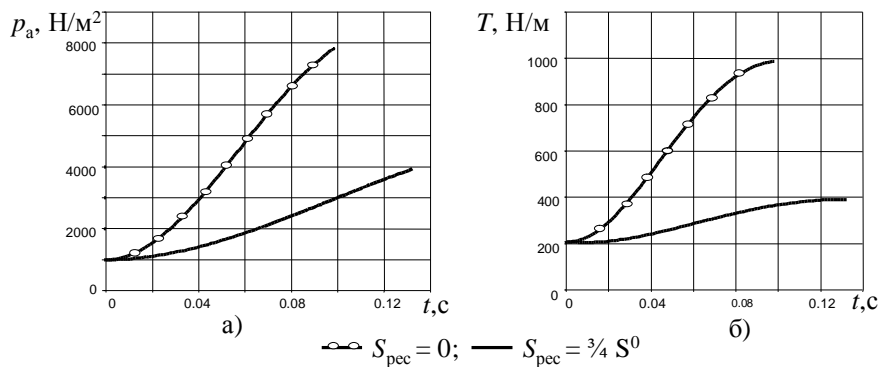


Рис. 5

точности число  $m$ .

Форма поперечного сечения погружающейся оболочки и положение свободных границ в фиксированный момент времени  $t^*$  представлены на рис. 4 ( $V = 1$  м/с,  $P_{AB}/AB = 3.1$ ,  $S_{pec}/S^0 = 3$ ,  $t^* = 0.098$  с). Указанные геометрические и кинематические характеристики весьма близки к соответствующим характеристикам глиссирующих пневмоскегов проектов судов на воздушной подушке СВП-500, СЕВЕР, ХИВУС-6, ХИВУС-10 и самолета с шасси на воздушной подушке МИГ-ТА-4. На этом же рисунке показана форма поперечного сечения оболочки до контакта с жидкостью. Встречное движение жидкости (подпор) увеличивает смоченную поверхность гибкой оболочки до 45% ( $t^* = 0.132$  с). Отметим, что подпор при погружении абсолютно твердого кругового цилиндра увеличивает смоченную поверхность в  $\sqrt{2}$  раз [3]. Однако в случае погружения гибкого цилиндра относительное увеличение

причем большие скорости относятся к не замытой жидкостью области оболочки).

Решение задачи проводилось в допущении нерастяжимости материала оболочки. Проверку обоснованности этого допущения можно провести, ориентируясь на величины погонных

## NUMERICAL EVALUATION OF HYDRODYNAMIC LOADS ON A PNEUMOENVELOPE IMMERSSED INTO A LIQUID

*V.V. Shabarov, A.K. Yakimov*

We propose a method for calculating the shape and external loads acting upon an elongated pneumoenvolope during its rapid immersion into a liquid. The solution takes into account the main nonlinearity factors related to both the unknown profile of the free surface of the liquid and the unknown cross section of the envelope during its immersion. The numerical algorithm for solving this problem is described. Some results of solving the problem and their physical interpretation are presented.

The proposed approach can be applied for designing dynamically supported vessels, solving problems of inflatable-structure mechanics, and modeling certain biomechanical systems.

сил натяжения в поперечном сечении оболочки при ее погружении в жидкость (см. рис. 5б).

Современные технические ткани имеют высокую степень плетения волокон и способны выдерживать значительные растягивающие силы при достаточно малых деформациях: полоски виннепланов 6535...6545 длиной 0.2 м и шириной 0.05 м выдерживают нагрузку до 1100...3000 Н при максимальном относительном удлинении, не превышающем 3...5%. Поэтому допущение о нерастяжимости материала пневмооболочки в задачах глассирования является вполне оправданным.

### *Список литературы*

1. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. – Киев: Наукова думка, 1969.
2. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение). – Л.: Судостроение, 1976.
3. Wagner R. Über Stoss-und Gleitvorgänge und der Oberfläche von Flüssigkeiten. – Z. And. Math. Und Mech. 1932. Band 12. Heft 4. S. 193–215.