УДК 519.6

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА В СМЫСЛЕ РИТМИЧНОСТИ И МИНИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ РЕЖИМОВ РАБОТЫ

В.П. Савельев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vpsav@uic.nnov.ru

Поступила в редакцию 31.05.2007

Решены две задачи, связанные с планированием ритмичной работы предприятия при неритмичных поставках сырья. При этом решение первой задачи (оптимизация ритмичности), формулируемой в виде задачи выпуклого программирования, является при определенных условиях и решением второй задачи (о минимальном числе переключений режимов работы).

Задачу планирования производства на заданный период $I = \{1,\ 2,\ldots,n\}$ при известных на этот период поставках сырья и ограниченном объеме склада (резервуара) можно сформулировать [1] как задачу нахождения допустимого вектора (плана) $\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$, принадлежащего множеству D:

$$D = \left\{ \vec{x} \in R^n \mid A_j \le \sum_{i=1}^{j} x_i \le B_j,\ A_j < B_j,\ j = \overline{1, n-1};\ \sum_{i=1}^{n} x_i = B_n \right\}. \qquad (1)$$

Среди допустимых векторов часто требуется найти наилучший (оптимальный) вектор в том или ином смысле. В настоящей работе решаются две такие задачи.

Задача 1 (о ритмичности производства). Требуется найти вектор $\vec{x} \in D$, доставляющий минимальное значение непрерывной, сепарабельной, строго выпуклой функции

$$F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ . \qquad (2)$$

Заметим, что существование и единственность решения задачи 1 следуют из указанных свойств функции $F(\vec{x})$, а также ограниченности, замкнутости и выпуклости множества D.

***Теорема* 1** (критерий оптимальности). Для того чтобы вектор $\vec{x}^{\,0}$ доставлял минимальное значение функции $F(\vec{x})$ на множестве D, необходимо и достаточно, чтобы любые его две компоненты x_k^0 и x_j^0 ($k<j$) либо были равны, либо удовлетворяли одному из следующих двух условий:

а) если $x_k^0 > x_j^0$, то найдется номер $l \in \{k, k+1, \ldots, j-1\}$ такой, что $\sum_{i=1}^{l} x_i^0 = A_l$;

б) если $x_k^0 < x_j^0$, то найдется номер $m \in \{k, k+1, \ldots, j-1\}$ такой, что $\sum_{i=1}^{m} x_i^0 = B_m$.

При доказательстве необходимости условий а) и б) теоремы 1 используется следующее очевидное утверждение: если функция $f(x)$ строго выпуклая, то функция $y(x,h)=f(x+h)-f(x)$, $h>0$, будет строго монотонно возрастающей по аргументу x.

Итак, предположим, что вектор $\vec{x}^{\,0}$ – оптимальный в задаче 1, но нашлась пара компонент x_k^0 и x_j^0 ($k<j$), не равных друг другу, причем если $x_k^0 > x_j^0$, то $\sum_{i=1}^{p} x_i^0 > A_p$ для всех $p = \overline{k, j-1}$, если же $x_k^0 < x_j^0$, то $\sum_{i=1}^{p} x_i^0 < B_p$ для всех $p = \overline{k, j-1}$. Рассмотрим вспомогательный вектор $\vec{x}^{\,0}(\delta) = \left(x_1^0,\ x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0,\ x_k^0 + \delta,\ x_{k+1}^0, \ldots, x_{j-1}^0,\ x_j^0 - \delta, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$, где $\delta<0$ в случае $x_k^0 > x_j^0$ и $\delta>0$ в случае $x_k^0 < x_j^0$. Нетрудно видеть, что при достаточно малом $|\delta|$ вектор $\vec{x}^{\,0}(\delta) \in D$. Оценим теперь разность $\Delta F = F(\vec{x}^{\,0}(\delta)) - F(\vec{x}^{\,0}) = f(x_k^0 + \delta) - f(x_k^0) + f(x_j^0 - \delta) - f(x_j^0)$. В случае $x_k^0 < x_j^0$ и $0 < \delta < x_j^0 - x_k^0$ мы получим: $\Delta F = \left(f(x_k^0 + \delta) - f(x_k^0)\right) - \left(f(x_j^0 -\right.$

$-\delta+\delta)-f\left(x_j^0-\delta\right)\big)=y\left(x_k^0,\delta\right)-y\left(x_j^0-\delta,\delta\right)<0$,

так как $x_k^0<x_j^0-\delta$. В случае $x_k^0>x_j^0$ и $x_j^0-x_k^0<\delta<0$ мы получим:

$$\Delta F=\Big(f\left(x_j^0-\delta\right)-$$
$$-f\left(x_j^0\right)\Big)-\Big(f\left(x_k^0+\delta-\delta\right)-f\left(x_k^0+\delta\right)\Big)=y\left(x_j^0,-\delta\right)-$$
$$-y\left(x_k^0+\delta,-\delta\right)<0\text{, так как } x_j^0<x_k^0+\delta.$$

Таким образом, предположение о том, что условия а) и б) теоремы 1 не выполняются, приводит к противоречию с тем, что вектор $\vec{x}^{\,0}$ доставляет минимальное значение функции $F(\vec{x})$ на множестве D.

Достаточность условий теоремы 1 будет следовать из того, что допустимый вектор $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, у которого любая пара неравных друг другу компонент x_k и x_j ($k<j$) удовлетворяет либо условию а), либо условию б), обязательно совпадает с оптимальным вектором $\vec{x}^{\,0}$.

Действительно, предположим, что $x_i=x_i^0$, $i=\overline{1,k-1}$, но $x_k\ne x_k^0$ $(k<n)$. Пусть, например, $x_k<x_k^0$. Поскольку $\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n x_i^0$, обязательно найдется номер $j>k$ такой, что $x_i\le x_k^0$, $i=\overline{k,j-1}$, но $x_j>x_j^0$. Если при этом $x_j\le x_k$, то будем иметь неравенство $x_j^0<x_j\le x_k<x_k^0$, которое означает, что существует номер $l\in\{k,k+1,\ldots,j-1\}$ такой, что $\sum_{i=1}^l x_i^0=A_l$. Но тогда $\sum_{i=1}^l x_i<A_l$, что противоречит допустимости вектора $\vec{x}$. Если же, $x_j>x_k$, то по условию б) теоремы 1 должен существовать номер $m\in\{k,k+1,\ldots,j-1\}$ такой, что $\sum_{i=1}^m x_i=B_m$. Но тогда $\sum_{i=1}^m x_i^0>B_m$, что противоречит допустимости вектора $\vec{x}^{\,0}$. К аналогичным противоречиям приводит и неравенство
$x_k>x_k^0$. Это означает, что условиям а) и б) теоремы 1 удовлетворяет единственный вектор $\vec{x}^{\,0}$.

Следствие 1. Для того, чтобы вектор $\vec{x}^0\in D$ был решением задачи 1 необходимо и достаточно, чтобы любые его две соседние компоненты x_k^0 и x_j^0 либо были равны, либо удовлетворяли одному из условий:

А) если $x_k^0>x_{k+1}^0$, то $\sum_{i=1}^k x_i^0=A_k$;

Б) если $x_{k+1}^0>x_k^0$, то $\sum_{i=1}^k x_i^0=B_k$.

Действительно, условия А) и Б) являются необходимыми, поскольку совпадают с условиями а) и б) теоремы 1 при $j=k+1$. Достаточность условий А) и Б) следует из того, что если компоненты допустимого вектора $\vec{x}\in D$ удовлетворяют условиям А) и Б), то они удовлетворяют и условиям а) и б) теоремы 1. Если предположить, например, что $x_k>x_j$, но $\sum_{i=1}^l x_i>A_l$ для всех $l=\overline{k,j-1}$, то из условий А) и Б) следует цепочка неравенств $x_k\le x_{k+1}\le\ldots\le x_j$, что противоречит неравенству $x_k>x_j$.

Следствие 2. Для того чтобы вектор $\vec{x}\in D$ был оптимальным в задаче 1, необходимо и достаточно, чтобы для любого номера $k\in\{1,\ 2,\ldots,n-1\}$ выполнялось одно из следующих трех условий:

1) если $\sum_{i=1}^k x_i^0\in\left(A_k,B_k\right)$, то $x_k^0=x_{k+1}^0$;

2) если $\sum_{i=1}^k x_i^0=A_k$, то $x_k^0\ge x_{k+1}^0$;

3) если $\sum_{i=1}^k x_i^0=B_k$, то $x_k^0\le x_{k+1}^0$.

Определение 1. Ограничение $\sum_{i=1}^k x_i\ge A_k$ $\left(\sum_{i=1}^l x_i\le B_l\right)$ будем называть активным [2] на решении $\vec{x}^{\,0}$ задачи 1, если выполняются условия $\sum_{i=1}^k x_i^0=A_k$ и $x_k^0>x_{k+1}^0$ $\left(\sum_{i=1}^l x_i^0=B_l \text{ и } x_l^0<x_{i+1}^0\right)$.

Следствие 3. Оптимальный вектор $\vec{x}^0\in D$ в задаче 1 имеет в общем случае $p+1$ постоянных режимов работы $\overline{x_k}=x_i^0$, $i=\overline{j_{k-1}+1,j_k}$, $k=\overline{1,p+1}$, определяемых наличием p $(0\le p\le n-1)$ активных ограничений $\sum_{i=1}^{j_k}x_i^0=M_{j_k}$, $0<j_k<j_2<\ldots<j_p<n$ и задаваемых формулой

$$\overline{x_k} = \frac{M_{j_k} - M_{j_{k-1}}}{j_k - j_{k-1}}, k = \overline{1, p+1}, \quad (3)$$

в которой введены обозначения $j_0 = 0$, $M_0 = 0$, $j_{p+1} = n$, $M_n = B_n$.

Отметим, что из условий оптимальности вектора $\vec{x}^{\,0}$ в задаче 1 и определения активных ограничений следует, что для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ выполняется либо соотношение

$$\overline{x_k} > \overline{x_{k+1}}, \text{ если } M_{j_k} = A_{j_k}, \quad (4)$$

либо соотношение

$$\overline{x_k} < \overline{x_{k+1}}, \text{ если } M_{j_k} = B_{j_k}. \quad (5)$$

Определение 2. Будем говорить, что вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет q переключений, если среди номеров множества I существует лишь q номеров l_j, $j = \overline{1, q}$ таких, что $x_{l_j} \neq x_{l_{j+1}}$.

В частности, вектор $\vec{x}^{\,0}$ имеет p переключений.

Задача 2. Среди векторов множества D найти вектор с наименьшим числом переключений.

Определение 3. Множество D, задаваемое формулой (1), назовем регулярным, если на решении $\vec{x}^{\,0}$ задачи 1 за каждым активным ограничением вида $M_{j_k} = A_{j_k}$ $\left(M_{j_k} = B_{j_k}\right)$, кроме последнего, следует обязательно активное ограничение вида $M_{j_{k+1}} = B_{j_{k+1}}$ $\left(M_{j_{k+1}} = F_{j_{k+1}}\right)$.
В случае отсутствия активных ограничений ($p = 0$) множество D также считаем регулярным.

***Теорема* 2.** Если множество D регулярно и решение $\vec{x}^{\,0}$ задачи 1 имеет ровно p ($0 \leq p \leq$ $\leq n - 1$) активных ограничений, то любой вектор $\vec{x}$ множества D имеет не менее p переключений.

Утверждение теоремы очевидно при $p = 0$. Пусть $p \geq 1$.

При доказательстве теоремы 2 мы будем использовать подмножества номеров множества I вида $I_{k-1,k} = \{j_{k-1} + 1, j_{k-1} + 2, \ldots, j_k\}$ и $I_{k-1,k+m} = \sum_{i=k}^{k+m} I_{i-1,i}$, при этом число подмножеств вида $I_{i-1,i}$, входящих в подмножество $I_{k-1,k+m}$, будем называть длиной этого подмножества. В частности, $I = I_{0,p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} I_{i-1,i}$ и имеет длину (p + 1). Из определения множества D легко получим следующие двухсторонние оценки для сумм компонент любого вектора $\vec{x}$ из множества D с номерами из подмножества $I_{k-1,k}$

$$A_{j_k} - B_{j_{k-1}} \leq \sum_{i=j_{k-1}+1}^{j_k} x_i \leq B_{j_k} - A_{j_{k-1}}, k = \overline{1, p+1}. \quad (6)$$

Утверждение теоремы 2 вытекает из следующей леммы 1, которая доказывается методом полной математической индукции.

Лемма 1. Любой вектор $\vec{x}$ из регулярного множества D имеет на любом подмножестве $I_{k-1,k+m}$ множества I не менее m переключений.

Пусть m=1, и предположим, что на множестве $I_{k-1,k+1}$ длины 2 вектор $\vec{x} \in D$ не имеет ни одного переключения, то есть $x_i = y_k = \text{const}$, $i = \overline{j_{k-1}+1, j_{k+1}}$. В этом случае для величины y_k на подмножествах $I_{k-1,k}$ и $I_{k,k+1}$ мы получим, используя неравенство (6), следующие двухсторонние оценки

$$\frac{A_{j_k} - B_{j_{k-1}}}{j_k - j_{k-1}} \leq y_k \leq \frac{B_{j_k} - A_{j_{k-1}}}{j_k - j_{k-1}} \quad (7)$$

$$\frac{A_{j_{k+1}} - B_{j_k}}{j_{k+1} - j_k} \leq y_k \leq \frac{B_{j_{k+1}} - A_{j_k}}{j_{k+1} - j_k}. \quad (8)$$

Если $M_{j_k} = A_{j_k}$ (тогда $M_{j_{k-1}} = B_{j_{k-1}}$, $M_{j_{k+1}} = B_{j_{k+1}}$), то нижняя оценка в (7) и верхняя оценка в (8) вступают в противоречие с неравенством (4), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{A_{j_k} - B_{j_{k-1}}}{j_k - j_{k-1}} > \frac{B_{j_{k+1}} - A_{j_k}}{j_{k+1} - j_k}. \quad (9)$$

Если же $M_{j_k} = B_{j_k}$ $\left(M_{j_{k-1}} = A_{j_{k-1}},\right.$ $\left.M_{j_{k+1}} = A_{j_{k+1}}\right)$, то нижняя оценка в (8) и верхняя оценка в (7) вступают в противоречие с неравенством (5), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{B_{j_k} - A_{j_{k-1}}}{j_k - j_{k-1}} < \frac{A_{j_{k+1}} - B_{jk}}{j_{k+1} - j_k}. \quad (10)$$

Итак, на подмножестве $I_{k-1,k+1}$ любой вектор $\vec{x} \in D$ имеет хотя бы одно переключение.

Предположим теперь, что $m \geq 2$ и утверждение леммы справедливо для любого подмножества $I_{k-1,k+t}$ длины (t+1), $t=\overline{1,m-1}$. Докажем, что оно справедливо и для любого подмножества $I_{k-1,k+m}$ длины (m+1) множества I. Предположим противное, то есть число переключений некоторого вектора $\overset{\mathbf{.}}{x}$ из регулярного множества D имеет на подмножестве $I_{k-1,k+m}$ лишь (m – 1) переключений (меньше, чем (m – 1), число переключений не может быть в силу нашего предположения относительно подмножества $I_{k-1,k+m-1}$). Заметим, что единственно возможный вариант расположения номеров $l_q, q= \ =\overline{1,m-1}$, соответствующих переключениям режимов работы, это $l_q \in I_{k-1+q,k+q}$, то есть на подмножествах $I_{k-1,k}$ и $I_{k+m,k+m+1}$ переключений режимов работы нет, а на остальных подмножествах $I_{k-1+q,k+q}$, входящих в подмножество $I_{k-1,k+m}$, имеется по одному переключению. Действительно, предположение о том, что либо $l_1 \in I_{k-1,k}$, либо $l_{m-1} \in I_{k+m-1,k+m}$ сразу приводит к противоречию с нашим предположением, что на подмножестве $I_{k,k+m}\left(I_{k-1,k+m-1}\right)$ длины m вектор $\overset{\mathbf{.}}{x}$ из множества D обязан иметь не менее (m – 1) переключений. К такому же противоречию приводит и предположение о том, что на некотором подмножестве $I_{k-1+q,k+q}$ $\left(q\in\{1,2,\mathbf{K},m-1\}\right)$ имеется два и более переключений или не имеется ни одного переключения.

Итак, пусть вектор $\overset{\mathbf{.}}{x}$ из регулярного множества D имеет ровно (m – 1) переключений на подмножестве $I_{k-1,k+m}$, то есть $x_i = y_k, i = =\overline{j_{k-1}+1,l_1}$; $x_i = y_{k+q}, i=\overline{l_q+1,l_{q+1}}, q=\overline{1,m-2}$; $x_i = y_{k+m-1}, i=\overline{l_{m-1}+1, j_{k+m}}$, причем $l_q \in I_{k-1+q,k+q}$, $q=\overline{1,m-1}$.

Для определенности будем считать, что $M_{j_k} = A_{j_k}$ (случай $M_{j_k} = B_{j_k}$ рассматривается аналогичным образом). Это означает, что $M_{j_{k-1}} = B_{j_{k-1}}, M_{j_{k+1}} = B_{j_{k+1}}$ и выполняется неравенство (9). Поскольку на подмножестве номеров $I_{k-1,k}$ x_i=y_i=const, то для величины y_k справедлива двухсторонняя оценка (7). Для суммы компонент вектора $\overset{\mathbf{.}}{x}$ на подмножестве номеров $I_{k,k+1}$ мы используем оценку (6) при k=k+1:

$$\begin{aligned} &A_{j_{k+1}} - B_{j_k} \leq (l_1 - j_k)y_k + \\ &+ (j_{k+1} - l_1)y_{k+1} \leq B_{j_{k+1}} - A_{j_k}. \end{aligned} \tag{11}$$

Предположим, что $y_{k+1} \geq y_k$ приведет к неравенству $y_k \leq \dfrac{B_{j_{k+1}} - A_{j_k}}{j_{k+1} - j_k}$, которое вместе с нижней оценкой величины y_k в (7) противоречит неравенству (9). Таким образом, обязательно имеет место строгое неравенство $y_{k+1}<y_k$ и из неравенства (11) мы получим оценку для величины y_{k+1}:

$$y_{k+1} < \frac{B_{j_{k+1}} - A_{j_k}}{j_{k+1} - j_k}. \tag{12}$$

Аналогичным образом, используя (6) при k=k+2 для суммы компонент вектора $\overset{\mathbf{.}}{x}$ на подмножестве $I_{k+1,k+2}$, получим оценку

$$\begin{aligned} &A_{j_{k+2}} - B_{j_{k+1}} \leq (l_2 - j_{k+1})y_{k+1} + \\ &+ (j_{k+2} - l_2)y_{k+2} \leq B_{j_{k+2}} - A_{j_{k+1}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Предположение о том, что $y_{k+2} \leq y_{k+1}$, приводит к неравенству $y_{k+1} \geq \dfrac{A_{j_{k+2}} - B_{j_{k+1}}}{j_{k+2} - j_{k+1}}$, которое вместе с неравенством (12) противоречит неравенству (10) при k=k+1. Таким образом, обязательно имеет место строгое неравенство $y_{k+2} > y_{k+1}$ и соответственно оценка для y_{k+2}:

$$y_{k+2} > \frac{A_{j_{k+2}} - B_{j_{k+1}}}{j_{k+2} - j_{k+1}}. \tag{14}$$

Продолжая этот процесс получения оценок для компонент вектора $\left(y_k, y_{k+1}, \mathbf{K}, y_{k+m-1}\right)$, для суммы компонент вектора $\overset{\mathbf{.}}{x}$ на подмножестве $I_{k+m-2,k+m-1}$ получим оценку:

$$\begin{aligned} &A_{j_{k+m-1}} - B_{j_{k+m-2}} \leq (l_{m-1} - j_{k+m-2})y_{k+m-2} + \\ &+ (j_{k+m-1} - l_{m-1})y_{k+m-1} \leq B_{j_{k+m-1}} - A_{j_{k+m-2}}. \end{aligned} \tag{15}$$

При этом для величины y_{k+m-2} будет выполняться либо оценка

$$y_{k+m-2} < \frac{B_{j_{k+m-2}} - A_{j_{k+m-3}}}{j_{k+m-2} - j_{k+m-3}}, \quad \text{если } M_{j_{k+m-2}} = B_{j_{k+m-2}}, \tag{16}$$

либо оценка

$$y_{k+m-2} > \frac{A_{j_{k+m-2}} - B_{j_{k+m-3}}}{j_{k+m-2} - j_{k+m-3}}, \quad (17)$$

если $M_{j_{k+m-2}} = A_{j_{k+m-2}}$.

В первом случае предположение, что $y_{k+m-1} \le y_{k+m-2}$, приводит к оценке $y_{k+m-2} \ge \frac{A_{j_{k+m-1}} - B_{j_{k+m-2}}}{j_{k+m-1} - j_{k+m-2}}$, которая вместе с оценкой (16) противоречит неравенству (10) при k=k+m-2. В этом случае будем иметь неравенство $y_{k+m-1} < y_{k+m-2}$ и оценку

$$y_{k+m-1} > \frac{A_{j_{k+m-1}} - B_{j_{k+m-2}}}{j_{k+m-1} - j_{k+m-2}}. \quad (18)$$

Во втором случае предположение, что $y_{k+m-1} \ge y_{k+m-2}$, приводит к оценке $y_{k+m-2} \le$ $\le \frac{B_{j_{k+m-1}} - A_{j_{k+m-2}}}{j_{k+m-1} - j_{k+m-2}}$, которая вместе с оценкой (17) противоречит неравенству (9) при $k = k + m - 2$. В этом случае будем иметь неравенство $y_{k+m-1} < y_{k+m-2}$ и оценку

$$y_{k+m-1} < \frac{B_{j_{k+m-1}} - A_{j_{k+m-2}}}{j_{k+m-1} - j_{k+m-2}}. \quad (19)$$

Поскольку на последнем подмножестве $I_{k+m-1,k+m}$ нет переключений, то $x_i = y_{k+m-1}$ для $i = \overline{j_{k+m-1}+1, j_{k+m}}$. Это значит, что для величины y_{k+m-1} мы имеем двухстороннюю оценку

$$\frac{A_{j_{k+m}} - B_{j_{k+m-1}}}{j_{k+m} - j_{k+m-1}} \le y_{k+m-1} \le \le \frac{B_{j_{k+m}} - A_{j_{k+m-1}}}{j_{k+m} - j_{k+m-1}}. \quad (20)$$

Если $M_{j_{k+m-1}} = A_{j_{k+m-1}}$ (тогда $M_{j_{k+m-2}} =$ $= B_{j_{k+m-2}}$), то верхняя оценка в (20) вместе с оценкой (18) противоречит неравенству (10) при $k = k + m - 1$, если же $M_{j_{k+m-1}} = B_{j_{k+m-1}}$ (тогда $M_{j_{k+m-2}} = A_{j_{k+m-2}}$), то нижняя оценка в (20) вместе с оценкой (19) противоречит неравенству (9) при $k = k + m - 1$.

Доказательство леммы закончено.

Из леммы 1 следует справедливость теоремы 2 при $k = 1$, $m = p$. Таким образом, оптимальный вектор $\mathbf{x}^0$ в задаче 1, имеющей p переключений, является оптимальным вектором и в задаче 2 при условии регулярности множества D.

Список литературы

1. Савельев В.П. Тезисы докладов

OPTIMIZATION OF WORK BALANCING AND MINIMIZING CHANGES OF PRODUCTION INTENSITY

V.P. Saveliev

We solve two problems of planning the uninterrupted work process at an industrial facility under conditions of non-smooth supply of raw materials. Under certain conditions, the solution of the first problem (optimization of work balancing) formulated as a problem of convex programming, also yields the solution of the second problem (minimizing changes of production intensity).

Межгосударственной научной конференции // Экстремальные задачи и их приложения. – Н. Новгород, 1992. – С. 99.

2. Карманов В.П. Математическое программирование. – М.: Наука, 1980. – 256 с.