

УДК 681.513.54

## ИЗУЧЕНИЕ СИММЕТРИЧНОГО МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

© 2007 г.

*А.И. Саичев, В.А. Филимонов*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

[saichev@hotmail.ru](mailto:saichev@hotmail.ru)

Поступила в редакцию 24.05.2007

Рассматривается модель квазимультифрактальных случайных процессов. В отличие от более известной модели мультифрактальных случайных блужданий, она избавлена от таких существенных недостатков, как бесконечная дисперсия моделируемых процессов и нестационарность приращений. Основным новшеством работы является анализ симметричного мультифрактального процесса (процесса с нулевым средним). В статье изучаются моменты приращений и локальные масштабные показатели данного процесса, а также строится его мультифрактальный спектр.

### Введение

Изучение мультифрактальных процессов, являющихся обобщением каскадных моделей Ричардсона и Колмогорова [1], началось сравнительно недавно. Однако к настоящему времени эта область теории случайных процессов завоевала значительный интерес физиков, т.к. описываемый ею круг процессов весьма многообразен – начиная от развитой турбулентности [2] и физики высокоэнергетичных частиц вплоть до биологии и финансов [3].

В данной работе обсуждается непрерывная модель мультифрактальных процессов. Более ранняя модель мультифрактальных случайных блужданий, подробно рассмотренная в статьях [4, 5], имеет существенный недостаток – бесконечную дисперсию моделируемых процессов, что ограничивает ее применение для описания реальных процессов. От этого недостатка избавлена предложенная в работе [6] непрерывная модель, которая и легла в основу настоящей статьи. Являясь развитием модели случайных блужданий, она вводит в употребление несколько дополнительных существенных параметров, благодаря чему позволяет описывать более широкий класс процессов. Однако модель мультифрактального процесса, развитая в работе [6], представляет собой строго монотонно растущий процесс, в то время как в большинстве приложений среднее мультифрактального процесса равно нулю. Характерным примером здесь могут служить мультифрактальные приращения поля скорости сильной развитой турбулентности.

На основе данной модели в статье конструируется симметричный мультифрактальный процесс – строится его

реализации и обсуждаются моменты приращений. Особое внимание в работе уделяется понятию мультифрактального спектра и составляющим его – так называемым эффективным масштабным показателям. В статье подробно описывается процесс отыскания моментов приращений и приводится способ упрощения численных вычислений последних. На основании расчетов строится мультифрактальный спектр.

### Квазимультифрактальность

Прежде всего определим понятие мультифрактальности процесса. Для этого возьмем случайный процесс со стационарными приращениями  $X(t)$  и рассмотрим  $q$ -й момент его приращений:

$$M_q(l) = \langle \delta_l(X(t))^q \rangle = \langle (X(t+l) - X(t))^q \rangle,$$

где  $\delta_l X(t) = X(t+l) - X(t)$  обозначено приращение процесса,  $M_q(l)$  –  $q$ -й момент приращений, а символом  $\langle \cdot \rangle$  обозначено математическое ожидание. Запишем выражение для данного момента в виде

$$M_q(l) = K_q l^{z_q(l)},$$

где  $K_q$  – некоторая постоянная,  $z_q(l)$  – некоторая функция, параметром которой служит порядок момента  $q$ , аргументом – масштаб  $l$ . Если данная функция не зависит от масштаба и определяется только порядком момента:

$$M_q(l) = K_q l^{z_q}, \quad (1)$$

то говорят, что процесс  $X(t)$  обладает масштабной инвариантностью. При этом величина  $z_q$  носит название масштабного показателя, а зависимость данного показателя от порядка момента  $z_q$  – спектра процесса. Если

спектр линеен:  $Z_q = qH$ , где  $H$  – некоторая постоянная, то исходный процесс монофрактален, если же  $Z_q$  – нелинейная функция порядка момента  $q$ , то говорят о мультифрактальном процессе.

Отметим, что мультифрактальные процессы, которым присуща нелинейная зависимость масштабного показателя от порядка момента, обладают отличительной особенностью: нелинейный спектр процесса  $Z_q$  не может существовать до бесконечных масштабов времени [4, 5], и равенство (1) выполняется лишь для масштабов  $l$ , меньших некоторого интегрального масштаба  $L$  (для монофрактальных процессов интегральный масштаб простирается до бесконечности:  $L = \infty$ ).

Согласно [7], приращения  $\delta_l X(t)$  на масштабе  $l$  мультифрактального процесса  $X(t)$  представимы в виде

$$\delta_l X(t) = \int_{t-l}^t \xi(t') e^{\omega(t')} dt', \quad (2)$$

где  $\omega(t)$  – некоторый авторегрессионный процесс

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^t \mu(t') h(t-t') dt', \quad (3)$$

$\xi(t)$  и  $\mu(t)$  – некоррелированные гауссовы шумы, обладающие корреляционными функциями

$$\langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = D_1 \delta(\tau),$$

$$\langle \mu(t) \mu(t+\tau) \rangle = D_2 \delta(\tau).$$

Не уменьшая общности можно положить  $\langle \mu(t) \rangle = 0$ . Кроме того, ограничимся рассмотрением только симметричных диффузионных процессов, положив  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ .

В качестве ядра  $h(t)$  выберем медленно спадающую функцию:

$$h(t) = \frac{h_0}{\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{\varphi + 1/2}}. \quad (4)$$

Здесь фигурирует характеристический масштаб  $\tau$ , по аналогии с теорией турбулентности носящий название масштаба вязкости. Вместе со введенным ранее интегральным масштабом, масштаб вязкости задает так называемый инерционный интервал:

$$\tau \ll l \ll L. \quad (5)$$

Как будет видно из расчетов, мультифрактальные свойства процесса  $X(t)$  проявляются именно на данном интервале масштабов. Если это имеет место, то такой процесс будем называть квазимультифрактальным. Заметим, что введение ограничения на временной масштаб  $l$

не снижает ценности модели, наоборот обогащая ее дополнительным параметром.

Параметрами процесса  $X(t)$  являются масштаб вязкости  $\tau$ , показатель  $\varphi$  и коэффициенты  $D_1$  и  $D_2$  в выражении корреляционных функций процессов  $\omega(t)$  и  $\mu(t)$ . Однако, как мы увидим в дальнейшем, более удобно применять комбинированный параметр  $\sigma^2$ . Заметим еще, что параметр  $D_1$  входит в моментные функции мультипликативно, поэтому не играет значительной роли; кроме того, удобно рассматривать нормированное время  $y = t/\tau$ . В итоге, предложенный квазимультифрактальный процесс описывается двумя существенными параметрами  $\sigma^2$  и  $\varphi$ .

### Определение мультифрактальных моментов

Обсудим свойства случайного процесса  $X(t)$ , описываемого выражением для приращений (2), показателем (3) с ядром (4). Для этого займемся отысканием моментов приращений процесса. В силу симметричности процесса  $X(t)$ , все нечетные моменты процесса тождественно равны нулю. Подробно исследуем свойства четных моментов приращений процесса  $X(t)$ . Второй момент равен:

$$M_2(l) = \langle (d_l X(t))^2 \rangle = \left\langle \left( \int_{t-l}^t \omega(t') e^{\omega(t')} dt' \right)^2 \right\rangle.$$

Переходя от квадрата интеграла к двойному интегралу, внося усреднение под знак интеграла, учитывая независимость процессов  $\xi(t)$  и  $\mu(t)$  и используя выражения (7) и (8), имеем:

$$M_2(l) = D_1 \int_{t-l}^t \langle e^{2\omega(t')} \rangle dt'.$$

Среднее под интегралом легко находится:

$$\langle e^{2\omega(t')} \rangle = \exp\left(2 D_2 \|h\|^2\right),$$

где введена норма функции-ядра (4):

$$\|h\|^2 = \int_0^\infty h^2(t) dt = \frac{h_0^2 \tau}{2\varphi}.$$

В итоге средний квадрат приращений процесса  $X(t)$

$$M_2(l) = D_1 e^{1/2 \sigma^2} l \quad (6)$$

растет по классическому линейному диффузионному закону. В (6) фигурирует величина

$$\sigma^2 = 4 D_2 \|h\|^2 = 2 D_2 \frac{h_0^2 \tau}{\varphi}, \quad (7)$$

являющаяся одним из важнейших параметров обсуждаемого в данной статье квазимультифрактального процесса  $X(t)$ .

Перейдем к анализу высших моментов приращений квазимультифрактального процесса  $X(t)$ :

$$M_{2m}(l) = \int_{t-l}^t dt_1 \mathbf{K} \int_{t-l}^t dt_{2m} \langle \xi(t_1) \mathbf{K} \xi(t_{2m}) \rangle \times \langle \exp(\omega(t_1) + \mathbf{K} + \omega(t_{2m})) \rangle.$$

Учитывая гауссовость дельта-коррелированного процесса  $x(t)$  с корреляционной функцией (7), получим

$$M_{2m}(l) = (2m-1)!! D_1^m \int_{t-l}^t dt_1 \mathbf{K} \int_{t-l}^t dt_m \times \langle \exp(2w(t_1) + \mathbf{K} + 2w(t_m)) \rangle.$$

Как и в случае второго момента, под знаком усреднения находится лог-нормальный процесс. Вычисляя среднее при помощи аппарата характеристических функций, получаем выражение для произвольного четного момента приращений:

$$M_{2m}(l) = C_{2m} \int_0^l dt_1 \mathbf{K} \int_0^l dt_m \prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^m G\left(\frac{t_i - t_j}{\tau}\right), \quad (8)$$

где

$$C_{2m} = (2m-1)!! D_1^m e^{\frac{1}{2}m^2 s^2}$$

и

$$G(y) = e^{\sigma^2(C(y)-1)}, \quad C(y) = \frac{1}{\|h\|^2} \int_0^\infty h(t)h(t+|y|\tau)dt. \quad (9)$$

### Эффективные масштабные показатели

Полученные выражения (6) и (8) позволяют определить мультифрактальный спектр исследуемого процесса  $X(t)$ . Определение масштабного показателя для момента второго порядка не вызывает трудностей. Из сравнения выражений (1) и (6) видно, что  $\zeta_2=1$ . Определение масштабных показателей высших четных моментов не столь тривиально.

Запишем выражение для произвольного высшего четного момента в виде

$$M_{2m}(l) = l^{\zeta_{2m}(l)},$$

где введенную функцию

$$\zeta_{2m}(y) = \frac{y}{M_{2m}(y)} \frac{dM_{2m}(y)}{dy} \quad (10)$$

назовем локальным масштабным показателем. Заметим, что локальные масштабные показатели  $\zeta_{2m}(y)$  имеют немультифрактальные

асимптоты при  $y \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow \infty$ . Покажем это на примере четвертого момента. При  $y \rightarrow 0$ , как видно из (9),  $C(y) \rightarrow 1$ , а значит, и  $G(y) \rightarrow 1$ . При  $y \rightarrow \infty$   $C(y) \rightarrow 0$ , т.е.  $C(y) \rightarrow \exp(-\sigma^2)$ . Соответственно, асимптоты локальных показателей равны

$$\lim_{y \rightarrow 0} \zeta_4(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \zeta_4(y) = 2.$$

Аналогичным образом можно найти асимптотики и для высших моментов. В общем случае произвольного натурального  $m$ :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \zeta_{2m}(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \zeta_{2m}(y) = m. \quad (11)$$

Асимптотики (11) означают существенную немонотонность функций  $\zeta_{2m}(y)$ , поскольку очевидно, что  $\zeta_{2m}(y) \neq \text{const}$ , и равенство (1) не может быть выполнено строго. Невозможность строгого выполнения равенства (1), однако, не говорит об отсутствии мультифрактальных свойств процесса  $X(t)$ . Существует достаточная область масштабов, на которых зависимость  $M_q(l)$  может быть аппроксимирована чисто степенной зависимостью (1). Так, например, график нормированного четвертого момента приращений процесса  $X(t)$  (штриховая линия) и его степенная аппроксимация (сплошная линия) в логарифмическом масштабе для параметров  $\phi = 0.01$  и  $\sigma^2 = 25$  представлены на рис. 1. Границы области, на которой проводилась аппроксимация, отмечены вертикальными штрихами. Данная область составляет 8 порядков, что позволяет говорить о существовании инерционного интервала и ввести понятие квазимультифрактального процесса.

Будем называть процесс  $X(t)$  обладающим квазимультифрактальными свойствами, если зависимость нормированного момента  $M_q(l)$  от масштаба  $l$  можно в некотором смысле (едином для всех порядков  $q$ ) аппроксимировать зависимостью:

$$M_q(l) = k_q l^{\zeta_q^{eff}}$$

на введенном ранее инерционном интервале (5). Здесь  $k_q$  и  $\zeta_q^{eff}$  – некоторые постоянные величины, зависящие от порядка момента  $q$ .

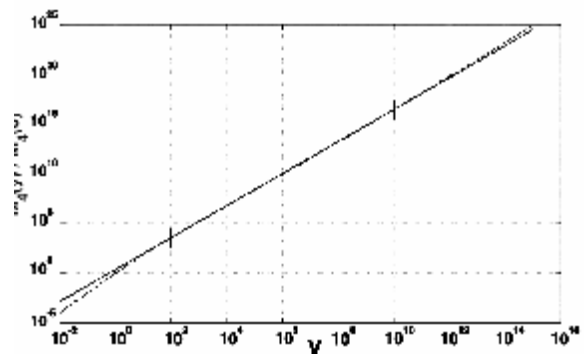


Рис. 1. График нормированного четвертого момента

Величины  $\zeta_q^{eff}$  назовем эффективными масштабными показателями. Спектром мультифрактального процесса в таком случае будем называть зависимость  $\zeta_q^{eff}(q)$ .

Остановимся подробнее на выборе способа определения эффективного показателя. Наиболее простой способ – аппроксимация кривой  $M_q(l)$  степенной зависимостью при помощи метода наименьших квадратов – не дает адекватных результатов. В этом случае  $\zeta_q^{eff}$  существенно зависит от границ интервала, на котором будет проводиться аппроксимация. Кажется естественным расширить интервал аппроксимации на весь инерционный интервал, т.е. на  $(\tau, L)$ , избавившись тем самым от неоднозначности определения  $\zeta_q^{eff}$ , однако сама величина  $L$  не может быть введена точно.

Наиболее адекватным, на наш взгляд, способом определения эффективного масштаба является метод, учитывающий особенность поведения локального показателя  $\zeta_q(l)$  на инерционном интервале вдали от границ ( $t \ll l \ll L$ ), т.е. на масштабах, на которых процесс имеет существенно мультифрактальный характер. В данной области масштабов, как показывают результаты численного счета, приведенные ниже, зависимость  $\zeta_q(l)$  имеет единственный экстремум, причем величина минимума существенно зависит от параметров процесса  $\varphi$  и  $\sigma^2$ .

Мы будем называть эффективным масштабным показателем величину абсолютного минимума функции  $\zeta_q(l)$  на инерционном интервале  $\tau \ll l \ll L$ :

$$\zeta_q^{eff} = \min_{\tau \ll y \ll L} \zeta_q(y). \quad (12)$$

### Результаты численных расчетов

Выражения (8) для моментов приращений процесса  $X(t)$  достаточно сложны, а значит, аналитический расчет локального (10) и эффективного (12) масштабных показателей не представляется возможным. Численный расчет моментов приращений также представляет собой нетривиальную задачу. С увеличением порядка момента возрастает размерность пространства интегрирования, и при порядках, больших 8-го ( $m > 4$ ), задача становится вычислительно сложной. Для сокращения машинного времени, необходимого для расчета указанных многомерных интегралов, применялось уменьшение области

интегрирования за счет симметрии подынтегрального выражения. Были выведены «сокращенные» формулы, позволяющие уменьшить область интегрирования и время вычислений в  $N = 2 \cdot (m-2)!$  раз. Кроме того, использование «сокращенных» формул позволило избежать интегрирования на диагоналях многомерного параллелепипеда, где подынтегральные функции (8) терпят разрыв производной.

Проводились численные расчеты моментов приращений, локальных и эффективных масштабных показателей вплоть до 14-го порядка включительно. В качестве примера на рис. 2 представлены результаты численных расчетов локальных масштабных показателей  $\zeta_8(l)$  рассматриваемого процесса  $X(t)$  для следующих значений параметров:  $\varphi = 0.03$ ,  $\sigma^2 = 1; 2; 3; 4; 5$ .

Зная эффективные показатели  $\zeta_q$  для  $q = 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12$ , можно получить вид мультифрактального спектра. Результаты расчетов показывают, что спектр квазимультифрактального процесса в исследованной области параметров хорошо совпадает со спектром мультифрактальных случайных блужданий [4]:

$$\zeta_q = \frac{1}{2}(q - q(q-2)\lambda^2). \quad (13)$$

На рис. 3 кружками показаны результаты

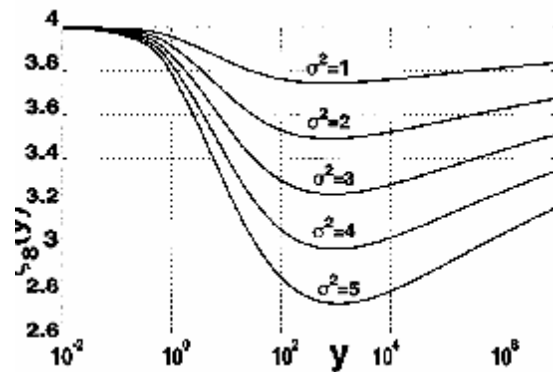


Рис. 2. График локального масштабного показателя  $\zeta_8(y)$

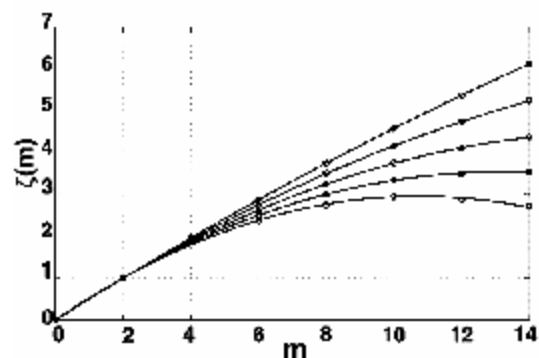


Рис. 3. Вид мультифрактального спектра  $\zeta_q(q)$  для

численного счета, сплошной линией – аппроксимация данного спектра выражением (13) по методу наименьших квадратов.

### Заключение

В статье обсужден способ отыскания мультифрактального спектра процесса, описанного при помощи квазимюльтифрактальной модели. В рассмотренной области параметров вычисленный спектр хорошо согласуется со спектром, полученным при помощи модели мультифрактальных случайных блужданий, однако для того, чтобы определить дальнейшее поведение кривой  $z_q(q)$ , необходимо знать высшие моменты. Однако вычислительная сложность данной задачи настолько высока, что определить высшие (старше 7-го) эффективные показатели за разумное время на данный момент не представляется возможным. Однако мы надеемся, что после совершенствования алгоритмов вычисления необходимые показатели смогут быть найдены, что позволит дать ответ на вопрос о форме спектра квазимюльтифрактального случайного процесса.

Наиболее актуальным неразрешенным вопросом остается вопрос о выборе эффективных масштабных показателей, составляющих мультифрактальный спектр. Несмотря на то, что предложенное в статье решение, на наш взгляд, является наиболее логичным, данный принципиальный вопрос

остается открытым. Окончательный ответ может быть получен только после попытки описания реальных физических процессов при помощи данной модели.

**Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 06-02-16414а, 05-02-16517а, а также гранта «Ведущие научные школы» НШ-5200.2006.2.**

### Список литературы

1. Колмогоров А.Н. О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // Докл. АН СССР. – 1941. – Т. 31, № 2. – С. 99–101.
2. Mandelbrot B.B. On intermittent free turbulence, Turbulence of fluids and Plasmas. – New York: Interscience, 1969.
3. Pochart B., Bouchaud J.-P. The skewed multifractal random walk with applications to option smiles // Quantitative Finance. – 2002. – V. 2. – P. 303–314.
4. Bacry E., Delour J., Muzy J.-F. A multifractal random walk // Physical Review. – 2001. – E. 64.
5. Bacry E., Delour J., Muzy J.-F. A multivariate multifractal model for return fluctuations // arXiv:cond-mat/0009260. – 2000. – V. 1.
6. Saichev A., Sornette D. Generic multifractality in exponentials of long memory processes // Phys. Rev. E. – 2006. – V. 74. – P. 011111-1–011111-11.
7. Sornette D., Malevergne Y., Muzy J.-F. What causes crashes? // Risk. – 2003. – V. 16 (Feb.). – P. 67–71.

## INVESTIGATION OF A SYMMETRICAL MULTIFRACTAL PROCESS

*A.I. Saichev, V.A. Filimonov*

A model of quasimultifractal random process is considered. In contrast to other models of multifractality (for instance, well-known multifractal random walks model), this one has finite variance and stationary increments. The principal innovation of the work consists in the analysis of a symmetrical multifractal process (a process with zero mean value). The moments of its fluctuations, local and effective scale exponents and its multifractal spectrum are investigated.