УДК 512.572

ПОКРЫВАЮЩИЕ-ИЗОЛИРУЮЩИЕ ПОДАЛГЕБРЫ ПОЛИАДИЧЕСКИХ МУЛЬТИКОЛЕЦ

© 2007 г.

В.И. Гойко, С.П. Новиков

Белорусский госуниверситет, г. Минск

vest-unn@unn.ru

Поступила в редакцию 23.01.2008

Гашюц построил профраттиниевы подгруппы в конечных разрешимых группах. Такие подгруппы имеют важное свойство покрывать или изолировать любой главный фактор группы. В данной работе исследованы свойства покрывающих-изолирующих подалгебр полиадических мультиколец: связь с корадикалом и гиперцентром, взаимнооднозначное соответствие факторов композиционных рядов двух подалгебр, инвариантность при гомоморфизмах.

Ключевые слова: покрывающие-изолирующие подалгебры, полиадические мультикольца, корадикал.

В теории универсальных алгебр особую роль играют подалгебры, обладающие свойством покрывать или изолировать любой главный фактор алгебры. В связи с этим стоит отметить работу Гашюца [1], в которой построена одна из подгрупп с таким свойством. В дальнейшем появились интересные обобщения таких подгрупп и изучались свойства в конечных разрешимых группах [2–4], а также их многочисленные аналоги [5–10]. Впоследствии в работе [11] покрывающие-изолирующие подгруппы были обобщены для мультиколец и исследованы в работах [12–15]. В данной работе исследуются свойства покрывающих-изолирующих подалгебр полиадического мультикольца: связь с корадикалом, гиперцентром, взаимно-однозначное соответствие факторов композиционных рядов двух подалгебр, вычисление порядков подалгебр, инвариантность при гомоморфизмах.

Приведем некоторые определения и обозначения, используемые в данной работе.

Под *полиадическим мультикольцом* понимается такая универсальная алгебра A сигнатуры $\Omega \cup \{\omega_n, \varepsilon\}$, $n \geq 2$, что 1) A является n-арной группой относительно операции ω_n; 2) все операции из Ω имеют ненулевую арность и связаны с ω_n дистрибутивным законом; 3) для элемента $\varepsilon \in A$, который будем отождествлять с нульарной операцией, выделяющей этот элемент, выполняются равенства: $(\varepsilon^{i-1}, x, \varepsilon^{n-i})\omega_n = x$ и $(a_1^{i-1}, \varepsilon, a_{i+1}^m)\sigma = \varepsilon$, где $x, a_1, \ldots, a_m \in A$, $\sigma_m \in \Omega$. Все рассматриваемые полиадические мультикольца имеют одну и ту же сигнатуру $\Omega \cup \{\omega_n, \varepsilon\}$ и принадлежат некоторому фиксированному мальцевскому многообразию, удовлетворяющему условиям максимальности и минимальности для подалгебр.

Под *идеалом полиадического мультикольца* A понимается такая подалгебра H алгебры A, которая является нормальной подгруппой n-арной группы A и $(a_1^{i-1}, h, a_{i+1}^m)\ \sigma \in H$ для любого $h \in H$, любых $a_1, \ldots, a_m \in A$, $\sigma_m \in \Omega$.

Говорят, что *множество D централизует нормальный фактор H/K* полиадического мультикольца A, если D есть множество всех таких элементов $c \in A$, что 1) для любых $h_1, \ldots, h_{n-1} \in H$ существуют такие $k_1, \ldots, k_{n-1} \in K$, что для любого $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ выполняется равенство $(c, h_1^{n-1})\omega_n = ((h_1^{i-1}, c, h_i^{n-1})\omega_n, k_1^{n-1})\omega_n$; 2) для любых $i, j \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $i < j$, любых $a_1, \ldots, a_m \in A$, любого $h \in H$, любой $\omega_m \in \Omega$ справедливы включения $(a_1^{i-1}, c, a_{i+1}^{j-1}, h, a_{j+1}^m)\sigma \in K$ и $(a_1^{i-1}, h, a_{i+1}^{j-1}, c, a_{j+1}^m)\ \sigma \in K$. Идеал $C_A(H/K) \subseteq D$, содержащий всякий идеал A, входящий в D, называется *централизатором фактора H/K* в A.

Нормальный фактор H/K полиадического мультикольца A называется *A-абелевым*, если $H \subseteq C_A(H/K)$. Идеал H полиадического мультикольца A называется *фраттиниевым*, если $\langle K, H\rangle \neq A$ для любой собственной подалгебры K из A. Нормальный фактор H/K полиадического мультикольца A будем называть фраттиниевым, если H/K – фраттиниевый идеал в A/K. Если H и K – подалгебры полиадического мультикольца A, то используется обозначение $(H, \overset{n-1}{K})\omega_n = HK$.

Через $\mathfrak{F}$ обозначаем класс полиадических мультиколец, Σ – некоторое множество главных факторов полиадического мультикольца. Через $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ обозначается класс полиадических мультиколец с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом.

Нормальные факторы H/K и D/R полиадического мультикольца A называют:

1) *перспективными*, если либо $H = KD$ и $R = K \cap D$, либо $D = RH$ и $K = R \cap H$;

2) *проективными*, если в A найдутся такие нормальные факторы $H/K = A_1/B_1, \ldots, A_n/B_n = D/R$, что для любого $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ факторы A_i/B_i и A_{i+1}/B_{i+1} перспективны.

Пусть H/K – нормальный фактор полиадического мультикольца A, M – некоторая его подалгебра. Говорят, что M *покрывает* (*изолирует*) *фактор* H/K, если $H \subseteq KM$ (соответственно $M \cap H \subseteq K$). Если при этом $K = \{\varepsilon\}$, то говорят, что M покрывает (изолирует) идеал H.

Нормальный фактор H/K полиадического мультикольца A называется $\mathfrak{F}$-*центральным* ($\mathfrak{F}$-*эксцентральным*), если $H/K \leftthreetimes A/C_A(H/K) \in \mathfrak{F}$ (соответственно $H/K \leftthreetimes A/C_A(H/K) \notin \mathfrak{F}$).

Говорят, что *подалгебра* B *дополняет* нормальный *фактор* H/K полиадического мультикольца A в полиадическом мультикольце A, если $BH = A$ и $B \cap H = K$.

Обозначения и определения, которые здесь используются, но не приведены, можно найти в книгах [16–18].

Пусть Σ – множество главных факторов полиадического мультикольца A, содержащее вместе с каждым фактором и все ему проективные. Подалгебру B из A назовем САРΣ-*подалгеброй* в A, если она изолирует все факторы из Σ и покрывает остальные A-главные факторы.

***Теорема* 1**. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс полиадических мультиколец, Σ – некоторое множество $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов полиадического мультикольца A, обладающего главным рядом. Тогда каждая САРΣ-подалгебра H из A содержит $\mathfrak{F}$-гиперцентр $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A)$.

Доказательство.

Пусть $\{\varepsilon\} = A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_t = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A)$ – участок A-главного ряда, содержащийся в $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A)$. Тогда факторы $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A)/A_{t-1}$, $A_{t-1}/A_{t-2}, \ldots, A_2/A_1$ будут $\mathfrak{F}$-центральными. Следовательно, H их покрывает: $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A) \subseteq HA_{t-1} \subseteq HA_{t-2} \subseteq \ldots \subseteq H\{\varepsilon\} = H$.

Теорема доказана.

***Теорема* 2.** Пусть $\mathfrak{X}$ – класс φ-разрешимых полиадических мультиколец, $\mathfrak{F}$ – формация с внутренним $\mathfrak{X}$-экраном, $A \in \mathfrak{X}$, Σ – некоторое множество $\mathfrak{F}$-эксцентральных A-главных факторов, T – САРΣ-подалгебра в A. Тогда справедливо: $TA^{\mathsf{F}} = A$.

Доказательство. Если допустить, что $A^{\mathfrak{F}} = A$, то утверждение теоремы очевидно. Полагаем теперь, что $A^{\mathfrak{F}} \neq A$. Рассмотрим участок A-главного ряда

$$A^{\mathfrak{F}} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{t-1} \subset H_t = A.$$

Пусть f – экран формации $\mathfrak{F}$. Ясно, что все факторы H_i/H_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, t)$ будут f-центральными. Покажем, что они являются $\mathfrak{F}$-центральными. Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Обозначим: $C = C_A(H_i/H_{i-1})$, $D = H_i/H_{i-1} \leftthreetimes A/C$. Если фактор H_i/H_{i-1} будет A-абелевым, то идеал H_i/H_{i-1} будет f-центральным в D. Но $D/(H_i/H_{i-1}) \cong A/C \in f(H_i/H_{i-1}) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $D \in \mathfrak{F}$. Пусть теперь фактор H_i/H_{i-1} не является A-абелевым. Тогда ввиду условия этот фактор нефраттиниев. Пусть M – максимальная в A подалгебра, не покрывающая фактор H_i/H_{i-1}. Ясно, что $M_A \subseteq C$. Если $C = M_A$, то поскольку $A/C \in f(H_i/H_{i-1}) \subseteq \mathfrak{F}$, то $A/M_A \in \mathfrak{F}$. Легко видеть, что факторы H_i/H_{i-1} и H_iM_A/M_A перспективны. Значит, $C = C_A C = C_A(H_iM_A/M_A)$. Нетрудно показать, что $(H_iM_A/M_A) \leftthreetimes A/C \in form A$. Поэтому $(H_iM_A/M_A) \leftthreetimes A/C \in \mathfrak{F}$ и т.к. $H_i/H_{i-1} \leftthreetimes A/C \cong (H_i M_A/M_A) \leftthreetimes A/C$, то фактор H_i/H_{i-1} будет $\mathfrak{F}$-центральным в A. Пусть теперь $M_A \subset C$. Тогда легко видеть, что C/M_A – минимальный идеал в A/M_A, отличный от H_iM_A/M_A. Нетрудно установить, что подалгебра M/M_A дополняет в A/M_A оба идеала H_iM_A/M_A и C/M_A. Из этого следует, что $M/M_A \in \mathfrak{F}$ и A/M_A – поддекартово произведение мультиколец $(A/M_A)/(H_iM_A/M_A)$ и $(A/M_A)/(C/M_A)$, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Значит,

$A/M_A \in \mathfrak{F}$ и поэтому фактор H_i/H_{i-1} будет $\mathfrak{F}$-центральным в A. Из условия следует, что T покрывает факторы H_i/H_{i-1}: $H_i \subseteq TH_{i-1}$, $i \in \{1, 2,\ldots, t\}$. Последнее означает, что имеют место следующие включения:

$$A = H_t \subseteq TH_{t-1} \subseteq \ldots \subseteq TH_1 \subseteq TH_0 = TA^{\mathfrak{F}}.$$

Отсюда следует, что $TA^{\mathfrak{F}} = A$. Теорема доказана.

***Теорема* 3.** Пусть $\mathfrak{X}$ – класс полиадических мультиколец, $\mathfrak{F}$ – формация с внутренним $\mathfrak{X}$-экраном, A – некоторое полиадическое мультикольцо из $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F}$, Σ – некоторое множество $\mathfrak{F}$-эксцентральных A-главных факторов, T – САРΣ-подалгебра в A. Тогда $TA^{\mathfrak{F}} = A$.

Доказательство. Если $A^{\mathfrak{F}} = A$, то утверждение очевидно. Пусть $A^{\mathfrak{F}} \neq A$. Рассмотрим участок A-главного ряда

$$A^{\mathfrak{F}} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{t-1} \subset H_t = A.$$

Пусть f – экран формации $\mathfrak{F}$. Ясно, что все факторы H_i/H_{i-1} $(i = 1, 2,\ldots,t)$ являются f-центральными. Покажем, что они являются $\mathfrak{F}$-центральными. Пусть $i \in \{1, 2,\ldots, t\}$. Введем обозначения: $C = C_A(H_i/H_{i-1})$, $D = H_i/H_{i-1} \leftthreetimes A/C$. Теперь в силу следующих соотношений $H_i/A^{\mathfrak{F}} \subseteq C_{A/A^{\mathfrak{F}}}(H_i/A^{\mathfrak{F}}/H_{i-1}/A^{\mathfrak{F}}) = C_A(H_i/H_{i-1})/A^{\mathfrak{F}}$ получаем, что фактор H_i/H_{i-1} будет A-абелевым. Поэтому идеал H_i/H_{i-1} будет f-центральным в D. Но $D/(H_i/H_{i-1}) \cong A/C \in f(H_i/H_{i-1}) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $D \in \mathfrak{F}$. Из условия следует, что T покрывает факторы H_i/H_{i-1} $(i = 1, 2,\ldots,t)$, т.е. $H_i \subseteq TH_{i-1}$. Из последнего утверждения теперь получим следующие соотношения: $A = H_t \subseteq TH_{t-1} \subseteq TH_{t-2} \subseteq \ldots \subseteq TH_1 \subseteq TH_0 = TA^{\mathfrak{F}}$. Отсюда следует, что $TA^{\mathfrak{F}} = A$. Теорема доказана.

***Теорема* 4.** Пусть Σ – некоторое множество главных факторов полиадического мультикольца A, содержащее вместе с каждым фактором и все ему проективные, N – идеал мультикольца A и Σ' – множество таких A/N-главных факторов $H/N/K/N$, что $H/K \in \Sigma$. Тогда, если B есть САРΣ-подалгебра в A, то BN/N есть САРΣ'-подалгебра в A/N.

Доказательство. Если $H/N/K/N \in \Sigma'$, то видно, что $H/K \in \Sigma$. Значит подалгебра B изолирует H/K, т.е. справедливо включение: $H \cap B \subseteq K$. Отсюда теперь получаем следующие соотношения:

$$(H/N) \cap (BN)/N = H \cap (BN)/N =$$
$$= N(H \cap B)/N \subseteq NK/N = K/N.$$

Полагаем теперь, что (A/N)-главный фактор $H/N/K/N$ не принадлежит Σ'. Тогда H/K не принадлежит Σ. Следовательно, B покрывает фактор H/K. Значит, $H \subseteq BK$. Тогда $H/N \subseteq BK/N = (BN/N)K/N$. Последнее означает, что $B\,N/N$ покрывает фактор $H/N/K/N$ в этом случае. Теорема доказана.

***Теорема* 5.** Пусть Σ – множество главных факторов полиадического мультикольца T, содержащее вместе с каждым фактором и все ему проективные, A и B – САРΣ-подалгебры полиадического мультикольца T и пусть

$$\{\varepsilon\} = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = A,$$
$$\{\varepsilon\} = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_m = B$$

– композиционные ряды соответственно A и B. Тогда $n = m$ и между факторами этих рядов можно установить такое взаимнооднозначное соответствие, при котором соответствующие факторы изоморфны.

Доказательство. Возьмем произвольный главный ряд $\{\varepsilon\} = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_k = T$ мультикольца T. Достаточно показать, что для любого $i \in \{1, 2,\ldots k\}$ фактор $T_i \cap A/T_{i-1} \cap A$ изоморфен фактору $T_i \cap B/T_{i-1} \cap B$.

Если $T_i/T_{i-1} \in \Sigma$, то A и B его изолируют. Получаем следующие включения: $A \cap T_i \subseteq T_{i-1}$, $B \cap T_i \subseteq T_{i-1}$. Следовательно, $T_{i-1}(T_i \cap A)/T_{i-1} \cong T_i \cap A/T_i \cap A \cap T_{i-1} = T_i \cap A/T_{i-1} \cap A$, $T_{i-1}(T_i \cap A)/T_{i-1} = T_{i-1}/T_{i-1}$. Отсюда получаем следующий изоморфизм: $T \cap A/T_{i-1} \cap A \cong T_{i-1}/T_{i-1}$. Далее, $T_{i-1}(T_i \cap B)/T_{i-1} = T_{i-1}/T_{i-1}$ и $T_{i-1}(T_i \cap B)/T_{i-1} \cong T_i \cap B/T_{i-1} \cap B$, $T_i \cap B/T_{i-1} \cap B \cong T_{i-1}/T_{i-1}$. Значит, $T_i \cap A/T_{i-1} \cap A \cong T_i \cap B/T_{i-1} \cap B$. В этом случае теорема справедлива.

Пусть теперь T_i / T_{i-1} не принадлежит Σ. Тогда получаем следующие включения: $T_i \subseteq T_{i-1}A$, $T_i \subseteq T_{i-1}B$. Следовательно,

$$T_i \cap A / T_{i-1} \cap A \cong T_{i-1}(T_i \cap A) / T_{i-1} =$$
$$= T_i \cap (T_{i-1}A) / T_{i-1} = T_i / T_{i-1}$$

и

$$T_i \cap B / T_{i-1} \cap B \cong T_i \cap (T_{i-1}B) / T_{i-1} = T_i / T_{i-1}.$$

Значит, $T_i \cap B / T_{i-1} \cap B$ изоморфна $T_i \cap A / T_{i-1} \cap A$ и в этом случае.

Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть Σ – множество главных факторов конечного полиадического мультикольца *A*, содержащее вместе с каждым фактором и все ему проективные, *B* – САРΣ-подалгебра полиадического мультикольца *A*. Тогда порядок подалгебры *B* равен произведению порядков факторов *A*-главного ряда, не принадлежащих Σ.

Доказательство. Пусть полиадическое мультикольцо *A* – контрпример наименьшего порядка и пусть

$$\{\varepsilon\} = A_0 \subset A_1 = N \subset \ldots \subset A_t = A \qquad (1)$$

– некоторый *A*-главный ряд. Тогда

$$N / N = A_1 / N \subset \ldots \subset A_t / N = A / N \qquad (2)$$

– главный ряд полиадического мультикольца A/N. Применяя теорему 4 получим, что BN/N есть Σ'-подалгебра в A/N. В силу индуктивных соображений получим следующее равенство:

$$|BN/N| =$$
$$= |A_{i_1}/N / A_{i_1-1}/N| \times \ldots \times |A_{i_r}/N / A_{i_r-1}/N|,$$

где $A_{i_1}/N / A_{i_1-1}/N, \ldots, A_{i_r}/N / A_{i_r-1}/N$ – все факторы из ряда (2), которые подалгебра BN/N покрывает. По теореме 4 получаем, что подалгебра *B* покрывает факторы $A_{i_1}/A_{i_1-1}, \ldots, A_{i_r}/A_{i_r-1}$ и изолирует остальные главные факторы ряда (1), за исключением, может быть, фактора $N/\{\varepsilon\}$. Если $N/\{\varepsilon\} \in \Sigma$, то $B \cap N = \{\varepsilon\}$ и в этом случае имеем следующие равенства:

$$|B| = |B / B \cap N| =$$
$$= |BN/N| = |A_{i_1}/A_{i_1-1}| \times \ldots \times |A_{i_r}/A_{i_r-1}|.$$

Пусть теперь $N/\{\varepsilon\}$ не принадлежит Σ. Тогда $N \subseteq B + \{\varepsilon\} = B$ и получим следующие равенства:

$$|B| = |BN/N| \times |N| =$$
$$= |N| \times |A_{i_1}/A_{i_1-1}| \times \ldots \times |A_{i_r}/A_{i_r-1}|.$$

Полученное противоречие с допущением завершает доказательство теоремы 6.

Из теоремы 6 следует:

Следствие. Пусть Σ – множество главных факторов конечного полиадического мультикольца *A*, содержащее вместе с каждым фактором и все ему проективные. Тогда все САРΣ-подалгебры полиадического мультикольца *A* изоордны.

При определенных условиях $\mathfrak{F}$-нормализаторы [16], $\mathfrak{F}$-профраттиниевы и Ω-профраттиниевы подалгебры [11, 16] являются САРΣ-подгруппами при соответствующем выборе Σ. Поэтому из результатов данной работы следуют как частные случаи соответствующие результаты для вышеуказанных подалгебр. Более того, в ряде случаев понятия $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подалгебр и САРΣ-подалгебр совпадают. Однако, в общем случае это неверно – САРΣ-под-алгебры составляют более широкое, чем $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подалгебры, множество [15].

Список литературы

1. Gaschutz W. Praefrattinigruppen // Arch. Math. 1962 B.13, № 3. S. 418–426.
2. Hawkes T.O. Analogues of Prefrattini subgroups // Proc. Internat. Conf. Theory of Groups. Canberra, 1965; N.Y., 1967. P. 145–150.
3. Gillam J.D. Cover-Avoid Subgroups in Finite Solvable Groups // J. Algebra. 1974. V. 29, № 2. P. 324–329.
4. Chambers G.A. On $\mathfrak{F}$-prefrattini subgroups // Canad. Math. Bull. 1975. V. 15, № 3. P. 345–348.
5. Гойко В.И. Построение $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп в произвольных конечных группах // Докл. АН БССР. 1978. Т. 22, № 2. С. 687–689.
6. Гойко В.И. $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевы подгруппы конечных групп // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 1996. № 10. С. 33–46.
7. Nakazato H. Remarks on Prefrattini subgroups of a finite solvable group // Bull. Sci. and Eng. Div.: Univ. Rynkyns (Math. And Nat. Sci). 1977. № 4. P.17–20.
8. Forster P. Prefrattini groups // J. Austral. Math. Soc. 1983. V. 34 (series A). P. 234–247.
9. Гойко В.И., Скиба А.Н. О $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгруппах конечных групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. Минск: Наука и техника, 1984. С. 53–58.
10. Гойко В.И., Скиба А.Н. О $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подалгебрах алгебр Ли конечной длины // Вопросы алгебры. Минск: Изд-во «Университетское», 1987. № 3. С. 78–86.

11. Новиков С.П. О Ω-профраттиниевых подалгебрах мультиколец // Вопросы алгебры. Минск: Изд-во «Университетское», 1992. № 6. С. 7–12.

12. Гойко В.И., Новиков С.П. CAPΣ-подгруппы конечных групп // Международная математическая конференция, посвященная 100-летию начала работы Д.А. Граве: Тезисы докладов. Киев, 2002. С.43–47.

13. Новиков С.П. Связь $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подалгебр и $\mathfrak{F}$-нормализаторов мультиколец // Вестник БГУ. Серия 1. 1996. № 1. С. 46–48.

14. Novikov S.P. CAPΣ-subalgebras of multirings // 4-th International Algebraic Conference in Ukraine. Lviv. 2003. P. 161–162.

15. Новиков С.П. Н-профраттиниевы подалгебры конечных мультиколец // Известия Гомельского гос. ун-та. 2006. 5(38). С. 45-48.

16. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 253 с.

17. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

18. Русаков С.А. Алгебраические *n*-арные системы. М.: Наука и техника, 1992. 264 с.

SUBALGEBRAS OF POLYADIC MULTIRINGS WITH THE PROPERTY OF COVER-AVOIDANCE

V.I. Goyko, S.P. Novikov

W. Gaschutz has constructed pre-Frattini subgroups in finite solvable groups. Such subgroups have an important property to cover or avoid any chief factor of the group. In this paper, some properties of subalgebras of polyadic multirings are investigated: their connection with the co-radical and hypercentre, one-to-one correspondence between the composition factors of two subalgebras, invariance under homomorphisms.