

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

УЛИТКА ПАСКАЛЯ КАК ИНТЕГРАЛЬНАЯ КРИВАЯ КВАДРАТИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2008 г.

Т.А. Дружкова, Е.А. Сиротина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vestnik@unn.ru

Поступила в редакцию 13.05.2008

Построен и изучен весь класс квадратичных систем дифференциальных уравнений, в семействе фазовых траекторий которых имеется улитка Паскаля, алгебраическая кривая четвертого порядка. Получен алгебраический первый интеграл таких систем. Приводятся все топологически различные картины разбиения фазовой плоскости интегральными кривыми.

Ключевые слова: квадратичное дифференциальное уравнение, улитка Паскаля, частный алгебраический интеграл Дарбу, топологическая структура.

При построении системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

как математической модели того или иного изучаемого процесса, часто требуется, чтобы среди фазовых траекторий этой системы присутствовала кривая нужной конфигурации. Если при этом важнейшим фактором является не уравнение кривой, а ее геометрический вид, то простейшим способом описания этой модельной кривой является подбор наиболее подходящего многочлена $f(x, y)$ так, чтобы алгебраическая кривая $f(x, y) = 0$ максимально походила на требуемую интегральную кривую [1].

В настоящей статье строится и подвергается исследованию класс квадратичных дифференциальных уравнений, содержащих среди интегральных кривых улитку Паскаля.

Построение класса квадратичных дифференциальных уравнений с улиткой Паскаля в качестве интегральной кривой. Рассмотрим квадратичное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_2(x, y)}{P_2(x, y)}, \quad (1)$$

где $P_2(x, y)$, $Q_2(x, y)$ – многочлены не выше второй степени от действительных переменных с действительными коэффициентами, взаимно простые над полем действительных чисел, при-

чем, хотя бы один из этих многочленов имеет степень, равную двум.

Поставим следующую задачу: в 12-мерном пространстве коэффициентов уравнения (1) выделить множество всех таких точек, которым соответствуют дифференциальные уравнения, имеющие среди своих интегральных кривых улитку Паскаля – алгебраическую кривую четвертого порядка [2, 3],

$$f(x, y) \equiv (x^2 + y^2 - ax)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0, \\ a > 0, l > 0, a \neq l. \quad (2)$$

Теорема 1. *Квадратичное дифференциальное уравнение (1) имеет среди своих интегральных кривых улитку Паскаля, алгебраическую кривую четвертого порядка (2), в том и только том случае, если это уравнение имеет вид*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3ax^2 + ay^2 + (a^2 - l^2)x}{4axy + l^2y}, \\ a > 0, l > 0, a \neq l, \quad (3)$$

с точностью до общего числового множителя числителя и знаменателя правой части уравнения.

Доказательство.

Согласно определению [4–6], частным алгебраическим интегралом Дарбу дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (4)$$

где $P \equiv P(x, y)$, $Q \equiv Q(x, y)$ – многочлены, называется равенство

$$f \equiv f(x, y) = 0, \quad (5)$$

где f – многочлен такой, что имеет место тождество

$$D[f] \equiv f'_x P + f'_y Q \equiv fR, \quad (6)$$

в котором $R \equiv R(x, y)$ – многочлен, получивший в последнее время название кофактор, [7].

Алгебраическая интегральная кривая есть геометрическая интерпретация понятия «частный алгебраический интеграл Дарбу».

Подставив в тождество (6) на место P и Q многочлены второй степени,

$$P \equiv p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2 + p_{10}x + p_{01}y + p_{00},$$

$$Q \equiv q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2 + q_{10}x + q_{01}y + q_{00},$$

на место частного алгебраического интеграла (5) – улитку Паскаля (2), взяв в качестве кофактора R – многочлен первой степени, $R \equiv r_{10}x + r_{01}y + r_{00}$, приравняем соответствующие коэффициенты многочленов в левой и правой частях тождества (6). Получим следующую систему из 21 равенства (по числу коэффициентов в многочлене пятой степени от двух переменных):

$$\left\{ \begin{array}{l} x^5: 4p_{20} = r_{10} \\ x^4y: 4p_{11} + 4q_{20} = r_{01} \\ x^3y^2: 4p_{02} + 4p_{20} + 4q_{11} = 2r_{10} \\ x^2y^3: 4p_{11}4q_{20} + 4q_{02} = 2r_{01} \\ xy^4: 4p_{02} + 4q_{11} = r_{10} \\ y^5: 4q_{02} = r_{01} \\ x^4: 4p_{10} - 6ap_{20} = r_{00} - 2ar_{10} \\ x_3y: 4p_{01} - 6ap_{11} + 4q_{10} - 4aq_{20} = -2ar_{01} \\ x^2y^2: 4p_{10} - 6ap_{02} - 2ap_{20} + 4q_{01} - 4aq_{11} = 2r_{00} - 2ar_{10} \\ xy^3: 4p_{01} - 2ap_{11} + 4q_{10} - 4aq_{02} = -2ar_{01} \\ y^4: -2ap_{02} + 4q_{01} = r_{00} \\ x^3: 4p_{00} - 6ap_{10} + (2a^2 - 2l^2)p_{20} = -2ar_{00} + (a^2 - l^2)r_{10} \\ x^2y: -6ap_{01} + (2a^2 - 2l^2)p_{11} + 4q_{00} - \\ - 4aq_{10} - 2l^2q_{20} = (a^2 - l^2)r_{01} \\ xy^2: 4p_{00} - 2ap_{10} + (2a^2 - 2l^2)p_{02} - 4aq_{01} - \\ - 2l^2q_{11} = -2ar_{00} - l^2r_{10} \\ y^3: -2ap_{01} + 4q_{00} - 2l^2q_{02} = -l^2r_{01} \\ x^2: -6ap_{00} + (2a^2 - 2l^2)p_{10} = (a^2 - l^2)r_{00} \\ xy: (2a^2 - 2l^2)p_{01} - 4aq_{00} - 2l^2q_{10} = 0 \\ y^2: -2ap_{00} - 2l^2q_{01} = -l^2r_{00} \\ x: (2a^2 - 2l^2)p_{00} = 0 \\ y: -2l^2q_{00} = 0 \\ x^0y^0: 0 = 0 \end{array} \right.$$

Разрешая эту систему относительно 15 неизвестных, – 12 коэффициентов многочленов P и Q и три коэффициента многочлена R , – получаем при $a \neq l$ следующее однопараметрическое семейство её решений (q_{02} – произвольный коэффициент):

$$q_{20} = -3q_{02}, \quad q_{11} = 0, \quad q_{10} = \frac{1}{a}(a^2 - l^2)q_{02},$$

$$q_{01} = 0, \quad q_{00} = 0,$$

$$p_{20} = 0, \quad p_{11} = 4q_{02}, \quad p_{02} = 0, \quad p_{10} = 0,$$

$$p_{01} = \frac{1}{a}l^2q_{02}, \quad p_{00} = 0,$$

$$r_{10} = 0, \quad r_{01} = 4q_{02}, \quad r_{00} = 0.$$

Соответствующее дифференциальное уравнение (1) с этими коэффициентами примет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3q_{02}x^2 + q_{02}y^2 + \frac{a^2 - l^2}{a}q_{02}x}{4q_{02}xy + \frac{l^2}{a}q_{02}y}. \quad (7)$$

Из (7) видно, что искомое многообразие в 12-мерном пространстве коэффициентов квадратичного дифференциального уравнения имеет размерность единица. Умножив числитель и знаменатель правой части уравнения (7) на $a > 0$ и сократив на общий числовой множитель $q_{02} \neq 0$, получаем уравнение (3) и тем констатируем, что теорема 1 доказана. Отметим еще, что кофактор, соответствующий частному алгебраическому интегралу (2) дифференциального уравнения (3), имеет вид $R \equiv 4ay$.

Нахождение и исследование общего интеграла квадратичного дифференциального уравнения с улиткой Паскаля. Дифференциальное уравнение (3) можно проинтегрировать, например как линейное относительно функции $y^2(x)$. Воспользуемся, однако, методом построения общего интеграла, предложенным Дарбу [4–6]. Заметим, что кроме модельной алгебраической интегральной кривой, улитки Паскаля (2), уравнение (3) имеет еще алгебраическую интегральную кривую – прямую линию

$$\varphi \equiv \varphi(x, y) \equiv 4ax + l^2 = 0. \quad (8)$$

Этому частному алгебраическому интегралу (8) и дифференциальному уравнению (3), нетрудно видеть, соответствует кофактор $\Phi \equiv \Phi(x, y) \equiv 4ay$. Поскольку кофакторы, соответствующие двум разным алгебраическим частным интегралам (2) и (8) оказались одинаковыми, $R \equiv \Phi \equiv 4ay$, общий интеграл уравнения (3)

можно записать в форме дарбуксиана, $f \varphi^{-1} = \text{const}$. Таким образом, доказана

Теорема 2. Улитка Паскаля (2) является интегральным множеством квадратичного дифференциального уравнения (1) тогда и только тогда, когда она принадлежит семейству кривых, определяемых соотношением

$$\frac{(x^2 + y^2 - ax)^2 - l^2(x^2 + y^2)}{4ax + l^2} = C, \quad (9)$$

$C = \text{const}$.

Отметим, что единственное требование, выставленное при построении уравнения (3), – иметь в квадратичном дифференциальном уравнении среди интегральных кривых улитку Паскаля, – привело к тому, что все интегральные кривые этого уравнения оказались кривыми алгебраическими, причем, не выше четвертой степени. Одна из интегральных кривых – первого порядка, это прямая (8), она соответствует значению произвольной постоянной $C = \infty$. Улитка Паскаля получается из (9) при $C = 0$. Остальные интегральные кривые все, кроме одной, неприводимые кривые четвертого порядка. Приводимой же является интегральная кривая, получающаяся из (9) при $4C + l^2 = 0$. Это окружность

$$\left(\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 - \frac{a^2 + 2l^2}{4} \right)^2 = 0. \quad (10)$$

Последнее утверждение становится понятным, если (9) записать в следующем виде:

$$y^4 + (2x^2 - 2ax - l^2)y^2 + x^4 - 2ax^3 + (a^2 - l^2)x^2 - 4aCx - l^2C = 0.$$

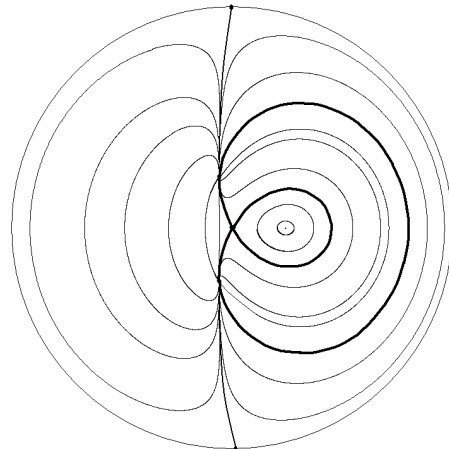
Функции $y^2 = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + 2l^2}{4} \pm \sqrt{\left(C + \frac{l^2}{4}\right)(4ax + l^2)}$

– решения этого уравнения, квадратного относительно y^2 , являются многочленами только при $C = -\frac{l^2}{4}$.

Качественное исследование квадратичного дифференциального уравнения с улиткой Паскаля

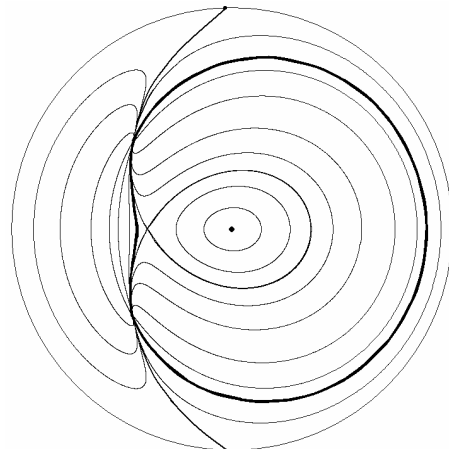
Теорема 3. Топологическая структура разбиения плоскости интегральными кривыми квадратичного дифференциального уравнения (1), содержащего улитку Паскаля (2) среди интегральных кривых, указана на рис. 1–4 в кругах Пуанкаре в зависимости от соотно-

шений между параметрами a и l кривой, (улитка Паскаля выделена).



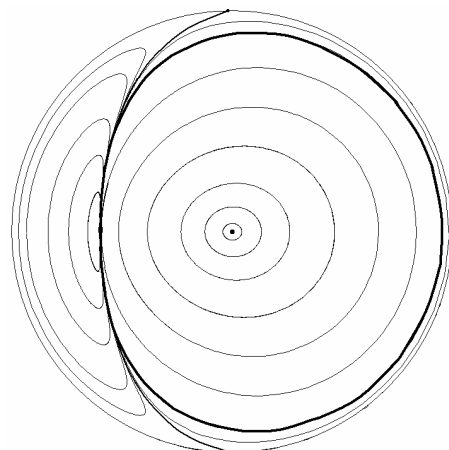
$0 < l < a$

Рис. 1



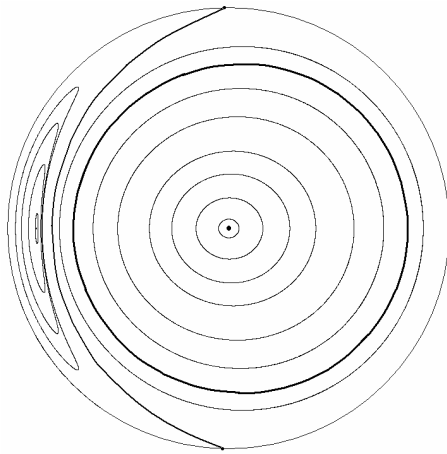
$a < l < 2a$

Рис. 2



$l = 2a$

Рис. 3



$$2a < l$$

Рис. 4

Доказательство.

Из алгебраической интегрируемости дифференциального уравнения (3) следует, что это уравнение не имеет предельных циклов. Результаты вычисления координат особых точек M_i , $i = 1, 2, 3, 4$, корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2}$ для каждой особой точки, а также типы простых особых точек для наглядности собраны в прилагаемой таблице.

Рассмотрим все различные соотношения между параметрами a и l .

Пусть $0 < l < a$. Структура разбиения плоскости интегральными кривыми уравнения (3) в рассматриваемом случае указана в круге Пуанкаре на рис. 1. Сепаратрисы седла образуют внутреннюю и внешнюю петли, и этой сепаратрисной кривой является улитка Паскаля. К двум другим особым точкам – узлам все интегральные кривые примыкают под одним направлением – вертикальным, в том числе и улитка Паскаля; кривой, что подходит под другим направлением, является окружность (10).

Пусть $a < l < 2a$. На рис. 2 качественная картина та же, изменилась только форма и роль улитки Паскаля, которая превратилась в вогнутый овал и изолированную точку – центр. Сепаратрисной кривой, тоже образующей две петли, стала интегральная кривая, отвечающая значению $C = \frac{(a^2 - l^2)^3}{27a^4}$.

Пусть $l = 2a$. Качественная картина представлена на рис. 3. Она существенно изменилась по сравнению с той, что указана на рис. 1 и рис. 2. Три простые особые точки, существовавшие при $l < 2a$, теперь слились в одну сложную особую точку индекса +1, имеющую в своей окрестности одну эллиптическую область, одну гиперболическую и две параболические. При этом овал улитки Паскаля является одной из бесконечного количества интегральных кривых, образующих две параболические области

	$0 < l < a$	$a < l < 2a$	$l = 2a$	$2a < l$
$M_1(0;0)$ $\lambda_{1,2} = \pm l\sqrt{a^2 - l^2}$	седло	центр	центр	центр
$M_2(\frac{a^2 - l^2}{3a}; 0)$ $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{(l^2 - a^2)(4a^2 - l^2)}{3}}$	центр	седло	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	центр
$M_3(-\frac{l^2}{4a}; \frac{l\sqrt{4a^2 - l^2}}{4a})$ $\lambda_1 = l\sqrt{4a^2 - l^2}, \lambda_2 = \frac{l\sqrt{4a^2 - l^2}}{2}$	узел	узел	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	–
$M_4(-\frac{l^2}{4a}; -\frac{l\sqrt{4a^2 - l^2}}{4a})$ $\lambda_1 = -l\sqrt{4a^2 - l^2}, \lambda_2 = -\frac{l\sqrt{4a^2 - l^2}}{2}$	узел	узел	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	–
В бесконечности особая точка – только у концов оси OY $\lambda_1 = -a, \lambda_2 = 3a$	седло	седло	седло	седло

этой сложной особой точки. Пограничной кривой, отделяющей параболические области от гиперболической, служит интегральная окружность (10), отвечающая значению $C = -a^2$. Границей эллиптической и параболических областей является интегральная прямая (8). Другой особой точкой, центром, является изолированная точка улитки Паскаля. Детали доказательства этих утверждений можно получить из рассмотрения сечения поверхности (9) плоскостью $y = 0$. График сечения

$$C = \frac{x^2(x+a)(x-3a)}{4a(x+a)},$$

имеет вид, указанный на рис. 5.

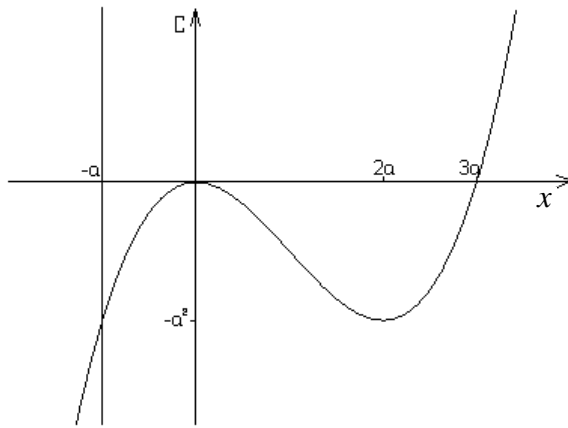


Рис. 5

Или, положив в (9) $y = 0$, для определения координат точек пересечения интегральных кривых с осью абсцисс получим уравнение $(x+a)(x^3 - 3ax^2 - 4aC) = 0$. Очевидно, что $x = -a$ – корень этого уравнения при любом значении C . Количество остальных корней зависит от дискриминанта кубического множителя $x^3 - 3ax^2 - 4aC$, а именно [8]: три действительных корня при $-a^2 < C < 0$; два действительных корня при $C(C+a^2) = 0$; один корень при $C > 0$ и $C < -a^2$. Это дает возможность уяснить, в скольких точках пересекает ось абсцисс интегральная кривая, отвечающая любому конкретно взятому значению произвольной постоянной C .

Пусть $2a < l$, рис. 4. Вместо сложной особой точки, появившейся при $l = 2a$, с ростом параметра l появляется простая особая точка, центр (сложная особая точка распалась на три особые точки – две комплексные и одну действительную). Овал улитки Паскаля стал одной из бесконечного множества интегральных кривых, окружающих особую точку типа центр, изолированную точку улитки Паскаля.

Теорема доказана.

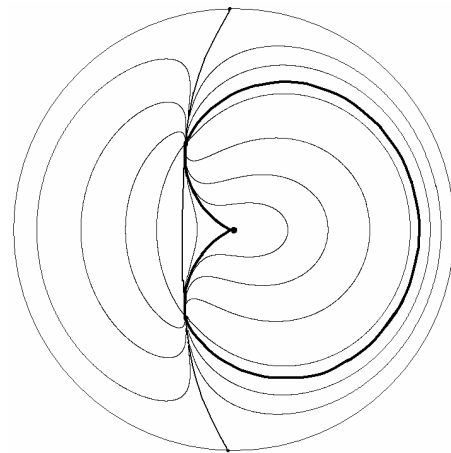
Замечание. В дифференциальном уравнении (3) и уравнении улитки Паскаля (2) ничто не мешает рассмотреть и случай $l = a$. При этом улитка Паскаля превращается в свой частный случай, кардиоиду,

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0, \quad (11)$$

дифференциальное уравнение (3) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + y^2}{4xy + ay}. \quad (12)$$

На рис. 6 изображен круг Пуанкаре для уравнения (12).



$l = a$

Рис. 6

Однако, уравнением (12) не исчерпывается весь класс квадратичных уравнений с кардиоидой. Добавление случая $l = a$ лишь дает возможность непрерывно проследить изменения качественного поведения семейства интегральных кривых уравнения (3) в зависимости от соотношений между параметрами l и a . Класс уравнений (3) строился при непрерывном выполнении условия $l \neq a$. Все множество квадратичных уравнений с кардиоидой среди интегральных кривых получено в работе [9], это уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3q_{02}x^2 + q_{02}y^2 + 4p_{20}xy - 3p_{20}ay}{p_{20}x^2 - 3p_{20}y^2 + 4q_{02}xy - 2p_{20}ax + q_{02}ay}, \quad (13)$$

там же приводится исследование этих уравнений. Из сравнения классов дифференциальных уравнений (7) и (13) видно, что последний зависит от двух произвольных параметров p_{20} и q_{02} , в отличие от однопараметрического семейства уравнений (7). Уравнение (12) получается из (13) лишь как частный случай при $p_{20} = 0$, и поэтому не охватывает собой все множество квадратичных дифференциальных уравнений с кардиоидой.

Список литературы

1. Дружкова Т.А. Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами: Методическое пособие. Часть 1. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. 36 с.
2. Савелов А.А. Плоские кривые. М.: ГИФМЛ, 1960. 293 с.
3. Смогоржевский А.С., Столова Е.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. М.: Физматгиз, 1961. 263 с.
4. Darboux M.G. Memoire sur les equations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degre // Bulletin des sciences mathematiques et astronom. Paris. 1878. P. 60–96; 123–144; 151–200.
5. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939. 717 с.
6. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2. М.: ОНТИ, 1936. 563 с.
7. Michael F. Singer. Liouvillian first integrals of differential equations // Transactions of the American Mathematical Societi. 1992. V. 333, № 2. P. 673–688.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
9. Дружкова Т.А. О квадратичном дифференциальном уравнении с алгебраическим интегралом // Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. сборник: Горький, 1977. С. 3–6.

PASCAL'S LIMACON AS THE INTEGRAL CURVE OF A QUADRATIC DIFFERENTIAL EQUATION

T.A. Druzhkova, E.A. Sirotna

The whole class of systems of quadratic differential equations, which have a fourth-order algebraic curve, Pascal's limaçon, in their set of phase trajectories, have been derived and studied. An algebraic first integral of such systems has been obtained. All topologically different pictures of phase plane partition by integral curves are given.