МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 531.36:534.1

К УСТОЙЧИВОСТИ ОБЪЕКТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ВДОЛЬ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ

С.Н. Веричев

Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

s.verichev@infonet.nnov.ru

Поступила в редакцию 30.04.2008

Исследуется влияние силы тяжести на устойчивость объекта, движущегося вдоль периодически неоднородной упругой направляющей. Показывается, что учет данной силы не влияет на устойчивость системы, однако приводит к появлению линейного резонанса.

Ключевые слова: устойчивость объекта, упругая направляющая, линейный резонанс.

При равномерном движении объекта по периодически неоднородной направляющей, ее жесткость в точке контакта изменяется периодически во времени [1]. Следовательно, колебания движущегося по направляющей объекта эквивалентны его колебаниям на пружине с периодически изменяющейся во времени жесткостью. Такая ситуация, очевидно, может привести к параметрической неустойчивости колебаний объекта. Для анализа условий возникновения данной неустойчивости рассматривается равномерное движение массы по безграничной балке на упругом основании, жесткость которого описывается выражением $k(x)=k_f(1+\mu\cos(\chi x))$, $\chi=2\pi/l$, где k_f – средняя жесткость основания, l – пространственный период неоднородности, χ – волновое число неоднородности, $\mu \ll 1$ – безразмерный малый параметр (см. рис. 1). С учетом силы тяжести массы $P=mg$, уравнения движения для рассматриваемой системы имеют вид

$$\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\mu\nu_f\frac{\partial u}{\partial t}+k(x)u=0,$$
$$[u]_{x=Vt}=\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=Vt}=\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{x=Vt}=0,$$
$$u\big|_{x=Vt}=u_0,\quad EI\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right]_{x=Vt}=-m\frac{d^2u_0}{dt^2}-mg,$$
$$\lim_{|x-Vt|\to\infty}u=0. \tag{1}$$

Здесь $u_0(t)$, и $u(x,t)$ – вертикальное отклонение массы и поперечное смещение балки соответственно; E – модуль Юнга; ρ и I – погонная плотность материала балки и момент инерции сечения балки на поворот; F – площадь поперечного сечения балки; $\mu\nu_f$ – малая вязкость основания; $\delta(\ldots)$ – дельта функция.

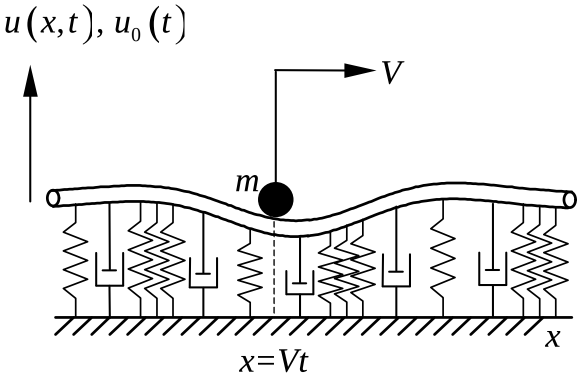

Рис. 1. Равномерное движение массы вдоль балки, лежащей на периодически неоднородном основании

Рассмотрим систему без диссипации $\nu_f=0$. Для анализа системы (1) используем метод последовательных приближений, тогда искомое решение может быть представлено в виде

$$u(x,t)=u^{(0)}(x,t)+\mu u^{(1)}(x,t)+\ldots,$$
$$u_0(t)=u_0^{(0)}(t)+\mu u_0^{(1)}(t)+\ldots \tag{2}$$

В нулевом приближении ($\mu = 0$) задача сводится к движению массы вдоль балки, лежащей на однородном основании [2]:

$$\rho F \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u^{(0)}}{\partial x^4} + k_f u^{(0)} = 0, \ \left[u^{(0)}\right]_{x=Vt} =$$

$$= \left[\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x}\right]_{x=Vt} = \left[\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2}\right]_{x=Vt} = 0,$$

$$u^{(0)}\Big|_{x=Vt} = u_0^{(0)}, \ EI\left[\frac{\partial^3 u^{(0)}}{\partial x^3}\right]_{x=Vt} = -m\frac{d^2 u_0^{(0)}}{dt^2} - mg,$$

$$\lim_{|x-Vt|\to\infty} u^{(0)} = 0. \tag{3}$$

Чтобы получить уравнения первого приближения для $u^{(1)}(x,t)$ и $u_0^{(1)}(t)$, необходимо подставить (2) в (1) и собрать все члены, пропорциональные μ:

$$\rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u^{(1)}}{\partial x^4} + k_f u^{(1)} = -k_f u^{(0)} \cos(\chi x),$$

$$\left[u^{(1)}\right]_{x=Vt} = \left[\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=Vt} = \left[\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}\right]_{x=Vt} = 0,$$

$$u^{(1)}\Big|_{x=Vt} = u_0^{(1)}, \ EI\left[\frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial x^3}\right]_{x=Vt} = -m\frac{d^2 u_0^{(1)}}{dt^2},$$

$$\lim_{|x-Vt|\to\infty} u^{(1)} = 0. \tag{4}$$

Таким образом, для исследования исходной задачи (1) сначала необходимо получить решение для невозмущенной системы (3). Полученные выражения для $u^{(0)}(x,t)$ и $u_0^{(0)}(t)$ необходимо подставить в систему (4), в которой эти решения связаны с неоднородностью и являются возмущающими. Используя рассуждения и преобразования, описанные в [3, 4], получим, что условия возникновения резонанса в рассматриваемой системе имеют вид

$$V\chi = 2\Omega, \tag{5}$$

$$V\chi = \Omega, \tag{6}$$

где Ω есть собственная частота массы, движущейся по балке на однородном основании. При выполнении условий (5) и/или (6) решение первого приближения превысит решение нулевого приближения. Как следствие, ряды (2) будут расходящимися. Таким образом, мы должны сделать вывод, что метод последовательных приближений в том виде, который был использован, становится неприменим. Прежде чем приступить к модификации метода, отметим, что условие (5) аналогично условию параметрического резонанса в системе, описываемой уравнением Матье [5–7], в то время как условие (6), вызванное учетом силы тяжести, по-видимому, соответствует случаю классического линейного резонанса. Случай (5) детально исследован в работе [4]. Рассмотрим случай (6), введя малую расстройку $\mu\delta << \Omega$:

$$\chi = \frac{\Omega + \mu\delta}{V}. \tag{7}$$

Будем искать решение исходной системы в виде, который подобен решению нулевого приближения с той лишь разницей, что амплитуды колебаний рассматриваются как медленно меняющиеся функции времени и пространственной координаты, а частоты колебаний допускают некую расстройку:

$$u_0(t) = A(\mu t)e^{it(\Omega+\mu\delta)} + B(\mu t)e^{it(\Omega+\mu\delta)} +$$

$$+ C(\mu t) + \mu u_0^{(1)}(t), \tag{8}$$

$$u(x,t) = \mu u^{(1)}(x,t) + \begin{cases} e^{it(\Omega+\mu\delta)}\Big(C_{A1}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_1^A(Vt-x)} + \\ + C_{A2}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_2^A(Vt-x)}\Big) + \\ + e^{it(\Omega+\mu\delta)}\Big(C_{B1}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_1^B(Vt-x)} + \\ + C_{B2}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_2^B(Vt-x)}\Big) + \\ + C_{C1}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_1^C(Vt-x)} + \\ + C_{C2}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_2^C(Vt-x)}, \ x > Vt; \\ e^{it(\Omega+\mu\delta)}\Big(C_{A1}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_3^A(Vt-x)} + \\ + C_{A2}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_4^A(Vt-x)}\Big) + \\ + e^{-it(\Omega+\mu\delta)}\Big(C_{B1}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_3^B(Vt-x)} + \\ + C_{B2}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_4^B(Vt-x)}\Big) + \\ + C_{C1}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_3^C(Vt-x)} + \\ + C_{C2}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_4^C(Vt-x)}, \ x < Vt, \end{cases}$$

где $k_{1,2,3,4}^{A,B,C}$ есть корни дисперсионного уравнения $-\rho F(\Omega - kV)^2 + EIk^4 + k_f = 0$ [3, 4]. Поиск решения в таком виде даст возможность, путем учета медленной зависимости амплитуд от времени и пространственной координаты, избежать нарастания решения первого приближения (см. [6, 7]). Подставляя (8) в (1) и приравнивая слагаемые порядка μ^0, получим систему алгебраических уравнений, представленную в приложении 1. Решение полученной системы выполняется вне зависимости от выбора амплитуд $C_{Aj}^{\pm}$, $C_{Bj}^{\pm}$ и $C_{Cj}^{\pm}$. Приравнивая члены порядка μ^1, получим

- для $x > Vt$:

$$\rho F \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u^{(1)}}{\partial x^4} + k_f u^{(1)} =$$

$$= -k_f \cos(\chi x) e^{it(\Omega+\mu\delta)}\Big(C_{A1}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_1^A(Vt-x)} +$$

$$+ C_{A2}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_2^A(Vt-x)}\Big) -$$

$$-k_f\cos(\chi x)e^{-it(\Omega+\mu\delta)}\Big(C_{B1}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_1^B(Vt-x)}+$$
$$+C_{B2}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_2^B(Vt-x)}\Big)-$$
$$-k_f\cos(\chi x)\Big(C_{C1}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_1^C(Vt-x)}+$$
$$+C_{C2}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_2^C(Vt-x)}\Big)-$$
$$-\left(2\rho F\left(Vk_1^A+\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{A1}^{+}}{\partial(\mu t)}-\delta C_{A1}^{+}\right)+\right.$$
$$\left.+4iEI\left(k_1^A\right)^3\frac{\partial C_{A1}^{+}}{\partial(\mu x)}\right)\exp\Big(ik_1^A(Vt-x)+$$
$$+it(\Omega+\mu\delta)\Big)-$$
$$-\left(2\rho F\left(Vk_2^A+\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{A2}^{+}}{\partial(\mu t)}-\delta C_{A2}^{+}\right)+\right.$$
$$\left.+4iEI\left(k_2^A\right)^3\frac{\partial C_{A2}^{+}}{\partial(\mu x)}\right)\exp\Big(ik_2^A(Vt-x)+$$
$$+it(\Omega+\mu\delta)\Big)-$$
$$-\left(2\rho F\left(Vk_1^B-\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{B1}^{+}}{\partial(\mu t)}+\delta C_{B1}^{+}\right)+\right.$$
$$\left.+4iEI\left(k_1^B\right)^3\frac{\partial C_{B1}^{+}}{\partial(\mu x)}\right)\exp\Big(ik_1^B(Vt-x)-$$
$$-it(\Omega+\mu\delta)\Big)-$$
$$-\left(2\rho F\left(Vk_2^B-\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{B2}^{+}}{\partial(\mu t)}+\delta C_{B2}^{+}\right)+\right.$$
$$\left.+4iEI\left(k_2^B\right)^3\frac{\partial C_{B2}^{+}}{\partial(\mu x)}\right)\exp\Big(ik_2^B(Vt-x)-$$
$$-it(\Omega+\mu\delta)\Big)-$$
$$-\left(2i\rho FVk_1^C\frac{\partial C_{C1}^{+}}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_1^C\right)^3\frac{\partial C_{C1}^{+}}{\partial(\mu x)}\right)\times$$
$$\times\exp\left(ik_1^C(Vt-x)\right)-$$
$$-\left(2i\rho FVk_2^C\frac{\partial C_{C2}^{+}}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_2^C\right)^3\frac{\partial C_{C2}^{+}}{\partial(\mu x)}\right)\times$$
$$\times\exp\left(ik_2^C(Vt-x)\right);\qquad(9)$$

- для $x<Vt$:

$$\rho F\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4u^{(1)}}{\partial x^4}+k_fu^{(1)}=$$
$$=-k_f\cos(\chi x)e^{it(\Omega+\mu\delta)}\Big(C_{A1}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_3^A(Vt-x)}+$$
$$+C_{A2}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_4^A(Vt-x)}\Big)-$$

$$-k_f\cos(\chi x)e^{-it(\Omega+\mu\delta)}\Big(C_{B1}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_3^B(Vt-x)}+$$
$$+C_{B2}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_4^B(Vt-x)}\Big)-$$
$$-k_f\cos(\chi x)\Big(C_{C1}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_3^C(Vt-x)}+$$
$$+C_{C2}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_4^C(Vt-x)}\Big)-$$
$$-\left(2\rho F\left(Vk_3^A+\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{A1}^{-}}{\partial(\mu t)}-\delta C_{A1}^{-}\right)+4iEI\left(k_3^A\right)^3\frac{\partial C_{A1}^{-}}{\partial(\mu x)}\right)\times$$
$$\times\exp\Big(ik_3^A(Vt-x)+it(\Omega+\mu\delta)\Big)-$$
$$-\left(2\rho F\left(Vk_4^A+\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{A2}^{-}}{\partial(\mu t)}-\delta C_{A2}^{-}\right)+4iEI\left(k_4^A\right)^3\frac{\partial C_{A2}^{-}}{\partial(\mu x)}\right)\times$$
$$\times\exp\Big(ik_4^A(Vt-x)+it(\Omega+\mu\delta)\Big)-$$
$$-\left(2\rho F\left(Vk_3^B-\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{B1}^{-}}{\partial(\mu t)}+\delta C_{B1}^{-}\right)+4iEI\left(k_3^B\right)^3\frac{\partial C_{B1}^{-}}{\partial(\mu x)}\right)\times$$
$$\times\exp\Big(ik_3^B(Vt-x)-it(\Omega+\mu\delta)\Big)-$$
$$-\left(2\rho F\left(Vk_4^B-\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{B2}^{-}}{\partial(\mu t)}+\delta C_{B2}^{-}\right)+4iEI\left(k_4^B\right)^3\frac{\partial C_{B2}^{-}}{\partial(\mu x)}\right)\times$$
$$\times\exp\Big(ik_4^B(Vt-x)-it(\Omega+\mu\delta)\Big)-$$
$$-\left(2i\rho FVk_3^C\frac{\partial C_{C1}^{-}}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_3^C\right)^3\frac{\partial C_{C1}^{-}}{\partial(\mu x)}\right)\exp\left(ik_3^C(Vt-x)\right)-$$
$$-\left(2i\rho FVk_4^C\frac{\partial C_{C2}^{-}}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_4^C\right)^3\frac{\partial C_{C2}^{-}}{\partial(\mu x)}\right)\exp\left(ik_4^C(Vt-x)\right);\qquad(10)$$

- для $x=Vt$:

$$\left[u^{(1)}\right]_{x=Vt}=0,\qquad(11)$$

$$\left[\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=Vt}=-e^{it(\Omega+\mu\delta)}\left(\frac{\partial C_{A1}^{+}}{\partial(\mu x)}+\frac{\partial C_{A2}^{+}}{\partial(\mu x)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial C_{A1}^{-}}{\partial(\mu x)}-\frac{\partial C_{A2}^{-}}{\partial(\mu x)}\right)_{x=Vt}+$$
$$-e^{-it(\Omega+\mu\delta)}\left(\frac{\partial C_{B1}^{+}}{\partial(\mu x)}+\frac{\partial C_{B2}^{+}}{\partial(\mu x)}-\frac{\partial C_{B1}^{-}}{\partial(\mu x)}-\frac{\partial C_{B2}^{-}}{\partial(\mu x)}\right)_{x=Vt}+$$
$$+\left(\frac{\partial C_{C1}^{+}}{\partial(\mu x)}+\frac{\partial C_{C2}^{+}}{\partial(\mu x)}-\frac{\partial C_{C1}^{-}}{\partial(\mu x)}-\frac{\partial C_{C2}^{-}}{\partial(\mu x)}\right)_{x=Vt};\qquad(12)$$

$$\left[\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial x^2}\right]_{x=Vt}=2ie^{it(\Omega+\mu\delta)}\left(k_1^A\frac{\partial C_{A1}^{+}}{\partial(\mu x)}+k_2^A\frac{\partial C_{A2}^{+}}{\partial(\mu x)}-\right.$$
$$\left.-k_3^A\frac{\partial C_{A1}^{-}}{\partial(\mu x)}-k_4^A\frac{\partial C_{A2}^{-}}{\partial(\mu x)}\right)_{x=Vt}+$$

$$+2ie^{-it(\Omega+\mu\delta)}\left(k_1^B\frac{\partial C_{B1}^+}{\partial(\mu x)}+k_2^B\frac{\partial C_{B2}^+}{\partial(\mu x)}-k_3^B\frac{\partial C_{B1}^-}{\partial(\mu x)}-\right.$$
$$\left.-k_4^B\frac{\partial C_{B2}^-}{\partial(\mu x)}\right)_{x=Vt}+2i\left(k_1^C\frac{\partial C_{C1}^+}{\partial(\mu x)}+k_2^C\frac{\partial C_{C2}^+}{\partial(\mu x)}-\right.$$
$$\left.-k_3^C\frac{\partial C_{C1}^-}{\partial(\mu x)}-k_4^C\frac{\partial C_{C2}^-}{\partial(\mu x)}\right)_{x=Vt}, \tag{13}$$

$$u^{(1)}(Vt,t)=u_0^{(1)}(t), \tag{14}$$

$$EI\left[\frac{\partial^3u^{(1)}}{\partial x^3}\right]_{x=Vt}=-m\frac{d^2u_0^{(1)}}{dt^2}+$$
$$+e^{it(\Omega+\mu\delta)}\left(-2m\Omega\left(i\frac{\partial A}{\partial(\mu t)}-\delta A\right)+3EI\left(\left(k_1^A\right)^2\frac{\partial C_{A1}^+}{\partial(\mu x)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(k_2^A\right)^2\frac{\partial C_{A2}^+}{\partial(\mu x)}-\left(k_3^A\right)^2\frac{\partial C_{A1}^-}{\partial(\mu x)}-\left(k_4^A\right)^2\frac{\partial C_{A2}^-}{\partial(\mu x)}\right)\right)_{x=Vt}+$$
$$+e^{-it(\Omega+\mu\delta)}\left(2m\Omega\left(i\frac{\partial B}{\partial(\mu t)}+\delta B\right)+3EI\left(\left(k_1^B\right)^2\frac{\partial C_{B1}^+}{\partial(\mu x)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(k_2^B\right)^2\frac{\partial C_{B2}^+}{\partial(\mu x)}-\left(k_3^B\right)^2\frac{\partial C_{B1}^-}{\partial(\mu x)}-\left(k_4^B\right)^2\frac{\partial C_{B2}^-}{\partial(\mu x)}\right)\right)_{x=Vt}+$$
$$+3EI\left(\left(k_1^C\right)^2\frac{\partial C_{C1}^+}{\partial(\mu x)}+\left(k_2^C\right)^2\frac{\partial C_{C2}^+}{\partial(\mu x)}-\left(k_3^C\right)^2\frac{\partial C_{C1}^-}{\partial(\mu x)}-\right.$$
$$\left.-\left(k_4^C\right)^2\frac{\partial C_{C2}^-}{\partial(\mu x)}\right)_{x=Vt}. \tag{15}$$

Нашей целью является недопущение нарастания во времени решения первого приближения. Для этого необходимо потребовать равенства нулю всех вынуждающих сил, которые могут привести к резонансу. На систему балка-масса действуют два типа сил: распределенные, стоящие в правой части уравнений (9) и (10), и сосредоточенные, входящие в граничное условие (15) («момент сил», действующий в точке контакта, см. (13), не может активировать вертикальных колебаний массы). Рассмотрим вначале распределенные силы, входящие в (9) и (10). Очевидно, что силы, описываемые последними четырьмя слагаемыми в правых частях этих уравнений, являются резонансными, так как они пропорциональны собственным волнам в балке вида $\exp(\pm i\Omega t)\exp\left(ik_{1,2,3,4}^{A,B}(Vt-x)\right)$. Следовательно, мы должны потребовать, чтобы эти слагаемые равнялись нулю, т.е.:

$$2\rho F\left(Vk_1^A+\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{A1}^+}{\partial(\mu t)}-\delta C_{A1}^+\right)+4iEI\left(k_1^A\right)^3\frac{\partial C_{A1}^+}{\partial(\mu x)}=0,$$
$$2\rho F\left(Vk_2^A+\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{A2}^+}{\partial(\mu t)}-\delta C_{A2}^+\right)+4iEI\left(k_2^A\right)^3\frac{\partial C_{A2}^+}{\partial(\mu x)}=0,$$
$$2\rho F\left(Vk_1^B-\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{B1}^+}{\partial(\mu t)}+\delta C_{B1}^+\right)+4iEI\left(k_1^B\right)^3\frac{\partial C_{B1}^+}{\partial(\mu x)}=0,$$
$$2\rho F\left(Vk_2^B-\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{B2}^+}{\partial(\mu t)}+\delta C_{B2}^+\right)+4iEI\left(k_2^B\right)^3\frac{\partial C_{B2}^+}{\partial(\mu x)}=0,$$
$$2\rho F\left(Vk_3^A+\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{A1}^-}{\partial(\mu t)}-\delta C_{A1}^-\right)+4iEI\left(k_3^A\right)^3\frac{\partial C_{A1}^-}{\partial(\mu x)}=0,$$
$$2\rho F\left(Vk_4^A+\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{A2}^-}{\partial(\mu t)}-\delta C_{A2}^-\right)+4iEI\left(k_4^A\right)^3\frac{\partial C_{A2}^-}{\partial(\mu x)}=0,$$
$$2\rho F\left(Vk_3^B-\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{B1}^-}{\partial(\mu t)}+\delta C_{B1}^-\right)+4iEI\left(k_3^B\right)^3\frac{\partial C_{B1}^-}{\partial(\mu x)}=0,$$
$$2\rho F\left(Vk_4^B-\Omega\right)\left(i\frac{\partial C_{B2}^-}{\partial(\mu t)}+\delta C_{B2}^-\right)+4iEI\left(k_4^B\right)^3\frac{\partial C_{B2}^-}{\partial(\mu x)}=0,$$
$$2i\rho FVk_1^C\frac{\partial C_{C1}^+}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_1^C\right)^3\frac{\partial C_{C1}^+}{\partial(\mu x)}=0,$$
$$2i\rho FVk_2^C\frac{\partial C_{C2}^+}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_2^C\right)^3\frac{\partial C_{C2}^+}{\partial(\mu x)}=0,$$
$$2i\rho FVk_3^C\frac{\partial C_{C1}^-}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_3^C\right)^3\frac{\partial C_{C1}^-}{\partial(\mu x)}=0,$$
$$2i\rho FVk_4^C\frac{\partial C_{C2}^-}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_4^C\right)^3\frac{\partial C_{C2}^-}{\partial(\mu x)}=0. \tag{16}$$

Итак, мы потребовали зануления распределенных сил, которые привели бы к нарастанию колебаний балки. Оставшиеся распределенные силы, однако, также могут привести к резонансу в случае, если в точке контакта их частота совпадет с $\pm(\Omega+\mu\delta)$. Если амплитуды этих сил окажутся отличными от нуля, то система войдет в резонанс за счет совпадения частоты вынуждающей силы, действующей на массу, с собственной частотой колебаний массы на балке. Силы, частота которых в точке контакта отлична от $\pm(\Omega+\mu\delta)$, являются нерезонансными и могут быть отброшены при дальнейшем анализе (см. [5–7]). Таким образом, считая соотношения (16) выполненными и учитывая только те слагаемые в правых частях (9) и (10), частота которых при $x=Vt$ совпадает с $\pm(\Omega+\mu\delta)$, получим

- при $x>Vt$:

$$\rho F\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4u^{(1)}}{\partial x^4}+k_fu^{(1)}=-k_f\cos(\chi x)\times$$
$$\times\left(C_{C1}^+(\mu x,\mu t)e^{ik_1^C(Vt-x)}+C_{C2}^+(\mu x,\mu t)e^{ik_2^C(Vt-x)}\right); \tag{17}$$

- при $x<Vt$:

$$\rho F\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4u^{(1)}}{\partial x^4}+k_fu^{(1)}=-k_f\cos(\chi x)\times$$
$$\times\left(C_{C1}^-(\mu x,\mu t)e^{ik_3^C(Vt-x)}+C_{C2}^-(\mu x,\mu t)e^{ik_4^C(Vt-x)}\right). \tag{18}$$

Решение этих уравнений будем искать в виде суперпозиции

$$u^{(1)} = u^{(1)}_{free} + u^{(1)}_{forced}, \tag{19}$$

где $u^{(1)}_{forced}$ есть вынужденное решение уравнений (9), (10), описывающее влияние периодической неоднородности основания балки на волновое поле, генерируемое движущейся и колеблющейся массой. Это решение имеет вид

- при $x > Vt$:

$$u^{(1)}_{forced} = e^{i\chi x}\left(\tilde{C}^{+}_{C11}(\mu x,\mu t)e^{ik_1^C(Vt-x)} + \tilde{C}^{+}_{C21}(\mu x,\mu t)e^{ik_2^C(Vt-x)}\right) +$$
$$+ e^{-i\chi x}\left(\tilde{C}^{+}_{C12}(\mu x,\mu t)e^{ik_1^C(Vt-x)} + \tilde{C}^{+}_{C22}(\mu x,\mu t)e^{ik_2^C(Vt-x)}\right); \tag{20}$$

- при $x < Vt$:

$$u^{(1)}_{forced} = e^{i\chi x}\left(\tilde{C}^{-}_{C11}(\mu x,\mu t)e^{ik_3^C(Vt-x)} + \tilde{C}^{-}_{C21}(\mu x,\mu t)e^{ik_4^C(Vt-x)}\right) +$$
$$+ e^{-i\chi x}\left(\tilde{C}^{-}_{C12}(\mu x,\mu t)e^{ik_3^C(Vt-x)} + \tilde{C}^{-}_{C22}(\mu x,\mu t)e^{ik_4^C(Vt-x)}\right). \tag{21}$$

Константы $\tilde{C}^{\pm}_{Cj}$, $j = 1,2$ приведены в приложении 2.

Подставляя (19) и выражения для $u^{(1)}_{forced}$ в граничное условие (15), получим:

$$EI\left[\frac{\partial^3 u^{(1)}_{free}}{\partial x^3}\right]_{x=Vt} + m\frac{d^2 u^{(1)}_0}{dt^2} = e^{it(\Omega+\mu\delta)}\left\{-2m\Omega\left(i\frac{\partial A}{\partial(\mu t)} -\right.\right.$$
$$\left. -\delta A\right) + 3EI\left(\left(k_1^A\right)^2\frac{\partial C^{+}_{A1}}{\partial(\mu x)} + \left(k_2^A\right)^2\frac{\partial C^{+}_{A2}}{\partial(\mu x)} -\right.$$
$$\left.\left. -\left(k_3^A\right)^2\frac{\partial C^{-}_{A1}}{\partial(\mu x)} - \left(k_4^A\right)^2\frac{\partial C^{-}_{A2}}{\partial(\mu x)}\right)\right\}_{x=Vt} +$$
$$+3EI\left(\left(k_1^A\right)^2\frac{\partial C^{+}_{A1}}{\partial(\mu x)} + \left(k_2^A\right)^2\frac{\partial C^{+}_{A2}}{\partial(\mu x)} - \left(k_3^A\right)^2\frac{\partial C^{-}_{A1}}{\partial(\mu x)} -\right.$$
$$\left.\left. -\left(k_4^A\right)^2\frac{\partial C^{-}_{A2}}{\partial(\mu x)}\right)\right\}_{x=Vt} + e^{-it(\Omega+\mu\delta)}\left\{2m\Omega\left(i\frac{\partial B}{\partial(\mu t)} + \delta B\right) +\right.$$
$$+ e^{-it(\Omega+\mu\delta)}\left\{2m\Omega\left(i\frac{\partial B}{\partial(\mu t)} + \delta B\right) +\right.$$
$$+3EI\left(\left(k_1^B\right)^2\frac{\partial C^{+}_{B1}}{\partial(\mu x)} + \left(k_2^B\right)^2\frac{\partial C^{+}_{B2}}{\partial(\mu x)} - \left(k_3^B\right)^2\frac{\partial C^{-}_{B1}}{\partial(\mu x)} -\right.$$
$$\left.\left. -\left(k_4^B\right)^2\frac{\partial C^{-}_{B2}}{\partial(\mu x)}\right)\right\}_{x=Vt} + iEIe^{i\chi x}\left\{\left(k_1^C + \chi\right)^3\tilde{C}^{+}_{C11} +\right.$$
$$\left. +\left(k_2^C + \chi\right)^3\tilde{C}^{+}_{C21} - \left(k_3^C + \chi\right)^3\tilde{C}^{-}_{C11} - \left(k_4^C + \chi\right)^3\tilde{C}^{-}_{C21}\right\}_{x=Vt} +$$
$$+ iEIe^{-i\chi x}\left\{\left(k_1^C - \chi\right)^3\tilde{C}^{+}_{C12} + \left(k_2^C - \chi\right)^3\tilde{C}^{+}_{C22} -\right.$$
$$\left. -\left(k_3^C - \chi\right)^3\tilde{C}^{-}_{C12} - \left(k_4^C - \chi\right)^3\tilde{C}^{-}_{C22}\right\}_{x=Vt}. \tag{22}$$

Поскольку оба слагаемых, стоящие в фигурных скобках в правой части уравнения (22) являются резонансными (имеют частоту, близкую к собственной частоте колебаний массы), мы должны потребовать, чтобы эти слагаемые обратились в нуль, т.е. необходимо выполнение следующих условий:

$$\left(-2m\Omega\left(i\frac{\partial A}{\partial(\mu t)} - \delta A\right) + 3EI\left(\left(k_1^A\right)^2\frac{\partial C^{+}_{A1}}{\partial(\mu x)} +\right.\right.$$
$$\left. +\left(k_2^A\right)^2\frac{\partial C^{+}_{A2}}{\partial(\mu x)} - \left(k_3^A\right)^2\frac{\partial C^{-}_{A1}}{\partial(\mu x)} - \left(k_4^A\right)^2\frac{\partial C^{-}_{A2}}{\partial(\mu x)}\right) -$$
$$-EI\left(i\left(k_1^B - \chi\right)^3\tilde{C}^{+}_{21} + i\left(k_2^B - \chi\right)^3\tilde{C}^{+}_{22} -\right.$$
$$\left.\left. -i\left(k_3^B - \chi\right)^3\tilde{C}^{-}_{21} - i\left(k_4^B - \chi\right)^3\tilde{C}^{-}_{22}\right)\right)_{x=Vt} = 0,$$

$$\left(2m\Omega\left(i\frac{\partial B}{\partial(\mu t)} + \delta B\right) + 3EI\left(\left(k_1^B\right)^2\frac{\partial C^{+}_{B1}}{\partial(\mu x)} +\right.\right.$$
$$\left. +\left(k_2^B\right)^2\frac{\partial C^{+}_{B2}}{\partial(\mu x)} - \left(k_3^B\right)^2\frac{\partial C^{-}_{B1}}{\partial(\mu x)} - \left(k_4^B\right)^2\frac{\partial C^{-}_{B2}}{\partial(\mu x)}\right) -$$
$$-EI\left(i\left(k_1^A + \chi\right)^3\tilde{C}^{+}_{11} + i\left(k_2^A + \chi\right)^3\tilde{C}^{+}_{12} -\right.$$
$$\left.\left. -i\left(k_3^A + \chi\right)^3\tilde{C}^{-}_{11} - i\left(k_4^A + \chi\right)^3\tilde{C}^{-}_{12}\right)\right)_{x=Vt} = 0. \tag{23}$$

Уравнения (16) и (23) представляют собой достаточные условия ненарастания решения первого приближения.

Будем искать решение этих уравнений (совместно) в следующем виде:

$$C^{+}_{A1}(\mu x,\mu t) = C^{+}_{A10}\exp\left(\mu\left(q_1^A t - p_1^A x\right)\right),$$
$$C^{+}_{A2}(\mu x,\mu t) = C^{+}_{A20}\exp\left(\mu\left(q_2^A t - p_2^A x\right)\right),$$
$$C^{+}_{B1}(\mu x,\mu t) = C^{+}_{B10}\exp\left(\mu\left(q_1^B t - p_1^B x\right)\right),$$
$$C^{+}_{B2}(\mu x,\mu t) = C^{+}_{B20}\exp\left(\mu\left(q_2^B t - p_2^B x\right)\right),$$
$$\tilde{C}^{+}_{C1}(\mu x,\mu t) = C^{+}_{C10}\exp\left(\mu\left(q_1^C t - p_1^C x\right)\right),$$
$$\tilde{C}^{+}_{C2}(\mu x,\mu t) = C^{+}_{C20}\exp\left(\mu\left(q_2^C t - p_2^C x\right)\right),$$
$$C^{-}_{A1}(\mu x,\mu t) = C^{-}_{A10}\exp\left(\mu\left(q_3^A t - p_3^A x\right)\right),$$
$$C^{-}_{A2}(\mu x,\mu t) = C^{-}_{A20}\exp\left(\mu\left(q_4^A t - p_4^A x\right)\right),$$
$$C^{-}_{B1}(\mu x,\mu t) = C^{-}_{B10}\exp\left(\mu\left(q_3^B t - p_3^B x\right)\right),$$
$$C^{-}_{B2}(\mu x,\mu t) = C^{-}_{B20}\exp\left(\mu\left(q_4^B t - p_4^B x\right)\right),$$
$$\tilde{C}^{-}_{C1}(\mu x,\mu t) = C^{-}_{C10}\exp\left(\mu\left(q_3^C t - p_3^C x\right)\right),$$
$$\tilde{C}^{-}_{C2}(\mu x,\mu t) = C^{-}_{C20}\exp\left(\mu\left(q_4^C t - p_4^C x\right)\right),$$
$$A(\mu t) = A_0\exp(\mu s t),\quad B(\mu t) = B_0\exp(\mu s t),$$
$$C(\mu t) = C_0\exp(\mu s t). \tag{24}$$

Устойчивость системы определяется характеристическими показателями s (неустойчивость имеет место, когда s имеет положительную действительную часть).

Чтобы получить характеристическое уравнение по отношению к s используем выражения (1.3)–(1.6). Подставляя (24) в эти выражения, получаем соотношения, представленные в приложении 3 (см. уравнения (3.1)). Принимая это во внимание и подставляя (24) в (16) и (23), получим следующую систему алгебраических уравнений относительно A_0, B_0 и C_0:

$$\begin{cases} (is-\delta)Q_1A_0+Q_3C_0=0 \\ (is+\delta)Q_2B_0+Q_4C_0=0 \end{cases} \qquad (25)$$

с константами Q_j, $j=\overline{1,4}$, представленными в приложении 3. Для нахождения A_0, B_0 и C_0 необходимо еще одно уравнение. Это уравнение следует из уравнения (1.7), где представлены члены, не зависящие от of $e^{\pm it(\Omega+\mu\delta)}$. Собирая эти члены, получим

$$iEI\left(C_{C1}^{+}\left(k_1^C\right)^3+C_{C2}^{+}\left(k_2^C\right)^3-C_{C1}^{-}\left(k_3^C\right)^3-\right.$$
$$\left.\left.-C_{C2}^{-}\left(k_4^C\right)^3\right)\right|_{x=Vt}+mg=0. \qquad (26)$$

Согласно уравнениям (24), принимая во внимание, что

$$q_1^C-p_1^CV=q_2^C-p_2^CV=q_3^C-p_3^CV=q_4^C-p_4^CV=s$$

(это условие необходимо, чтобы удовлетворить граничные условия (1.3)–(1.6)), перепишем уравнение (26) в виде

$$iEI\left(C_{C10}^{+}\left(k_1^C\right)^3+C_{C20}^{+}\left(k_2^C\right)^3-C_{C10}^{-}\left(k_3^C\right)^3-\right.$$
$$\left.-C_{C20}^{-}\left(k_4^C\right)^3\right)\exp(\mu st)=-mg. \qquad (27)$$

Это уравнение справедливо тогда и только тогда, когда $s=0$. С учетом выражений для $C_{Cj0}^{\pm}$, $j=1,2$, которые могут быть получены путем подстановки (24) в уравнения (1.3)–(1.6) (см. приложение 3) выражение (27) примет вид

$$C_0=mgQ_5 \qquad (28)$$

с константой Q_5 представленной в приложении 3. Решая одновременно (25) и (28), получим

$$A_0=\frac{Q_3C_0}{\delta Q_1},\ B_0=-\frac{Q_4C_0}{\delta Q_2},\ C_0=mgQ_5. \qquad (29)$$

Таким образом поскольку $s=0$, имеют место следующие равенства $A(\mu t)=A_0$, $B(\mu t)=B_0$, $C(\mu t)=C_0$, которые после подстановки в выражения для вертикального смещения массы (8) дают

$$u_0(t)=A_0e^{it(\Omega+\mu\delta)}+B_0e^{-it(\Omega+\mu\delta)}+$$
$$+C_0+\mu u_0^{(1)}(t). \qquad (30)$$

Поскольку вышеописанная процедура гарантирует, что член $u_0^{(1)}(t)$ не растет во времени, мы можем заключить, что при $\chi=\dfrac{\Omega+\mu\delta}{V}$, $\delta\neq 0$ масса претерпевает гармонические колебания с постоянным смещением C_0 и испытывает малые излучения с амплитудой $\mu u_0^{(1)}(t)$. Очевидно, что данные колебания устойчивы. Случай $\delta=0$, при котором собственная частота Ω массы равна частоте изменения жесткости основания в точке контакта χV, должен быть рассмотрен отдельно, поскольку вышеописанная процедура не может быть использована, т.к. амплитуды A_0 и B_0 становятся бесконечно большими. Чтобы избавиться от этого, необходимо слегка модифицировать форму решения для резонансного случая. По отношению к решению (8), модификация состоит в рассмотрении отклика системы на постоянную силу $P=mg$ как независящего от времени

$$u_0(t)=A(\mu t)e^{it\Omega}+B(\mu t)e^{-it\Omega}+$$
$$+C+\mu u_0^{(1)}(t), \qquad (31)$$

$$u(x,t)=\mu u^{(1)}(x,t)+\begin{cases} e^{it\Omega}\left(C_{A1}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_1^A(Vt-x)}+\right. \\ \left.+C_{A2}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_2^A(Vt-x)}\right)+ \\ +e^{it\Omega}\left(C_{B1}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_1^B(Vt-x)}+\right. \\ \left.+C_{B2}^{+}(\mu x,\mu t)e^{ik_2^B(Vt-x)}\right)+ \\ +C_{C1}^{+}e^{ik_1^C(Vt-x)}+C_{C2}^{+}e^{ik_2^C(Vt-x)}, \\ x>Vt\ ; \\ e^{it\Omega}\left(C_{A1}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_3^A(Vt-x)}+\right. \\ \left.+C_{A2}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_4^A(Vt-x)}\right)+ \\ +e^{-it\Omega}\left(C_{B1}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_3^B(Vt-x)}+\right. \\ \left.+C_{B2}^{-}(\mu x,\mu t)e^{ik_4^B(Vt-x)}\right)+ \\ +C_{C1}^{-}e^{ik_3^C(Vt-x)}+C_{C2}^{-}e^{ik_4^C(Vt-x)}, \\ x<Vt. \end{cases}$$

Как и в предыдущем случае, подставляя (31) в систему уравнений (1), мы делаем следующие шаги:

1. Приравниваем члены порядка μ^0. Полученная система уравнений удовлетворяется автоматически.
2. Приравниваем члены порядка μ^1.

3. Рассматривая уравнения движения для балки, полагаем равными нулю все резонансные члены в правой части. Это приводит к системе уравнений, аналогичной системе (16)

$$2\rho F\left(Vk_1^A+\Omega\right)i\frac{\partial C_{A1}^+}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_1^A\right)^3\frac{\partial C_{A1}^+}{\partial(\mu x)}=0,$$

$$2\rho F\left(Vk_2^A+\Omega\right)i\frac{\partial C_{A2}^+}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_2^A\right)^3\frac{\partial C_{A2}^+}{\partial(\mu x)}=0,$$

$$2\rho F\left(Vk_1^B-\Omega\right)i\frac{\partial C_{B1}^+}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_1^B\right)^3\frac{\partial C_{B1}^+}{\partial(\mu x)}=0,$$

$$2\rho F\left(Vk_2^B-\Omega\right)i\frac{\partial C_{B2}^+}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_2^B\right)^3\frac{\partial C_{B2}^+}{\partial(\mu x)}=0,$$

$$2\rho F\left(Vk_3^A+\Omega\right)i\frac{\partial C_{A1}^-}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_3^A\right)^3\frac{\partial C_{A1}^-}{\partial(\mu x)}=0,$$

$$2\rho F\left(Vk_4^A+\Omega\right)i\frac{\partial C_{A2}^-}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_4^A\right)^3\frac{\partial C_{A2}^-}{\partial(\mu x)}=0,$$

$$2\rho F\left(Vk_3^B-\Omega\right)i\frac{\partial C_{B1}^-}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_3^B\right)^3\frac{\partial C_{B1}^-}{\partial(\mu x)}=0,$$

$$2\rho F\left(Vk_4^B-\Omega\right)i\frac{\partial C_{B2}^-}{\partial(\mu t)}+4iEI\left(k_4^B\right)^3\frac{\partial C_{B2}^-}{\partial(\mu x)}=0\,. \quad (32)$$

4. Ищем решение уравнения движения балки в виде (19), для которого вынужденный член может быть легко получен.

5. Подставляем это решение в уравнение баланса вертикальных сил в точке контакта.

6. В полученном уравнении приравниваем к нулю все члены, стоящие в правой части. Это дает

$$\Bigg(-2m\Omega i\frac{\partial A}{\partial(\mu t)}+3EI\Bigg(\left(k_1^A\right)^2\frac{\partial C_{A1}^+}{\partial(\mu x)}+\left(k_2^A\right)^2\frac{\partial C_{A2}^+}{\partial(\mu x)}-$$
$$-\left(k_3^A\right)^2\frac{\partial C_{A1}^-}{\partial(\mu x)}-\left(k_4^A\right)^2\frac{\partial C_{A2}^-}{\partial(\mu x)}\Bigg)+$$
$$+iEI\Big(\left(k_1^C+\chi\right)^3\tilde{C}_{C11}^+ +\left(k_2^C+\chi\right)^3\tilde{C}_{C21}^+ -\left(k_3^C+\chi\right)^3\times$$
$$\times\tilde{C}_{C11}^- -\left(k_4^C+\chi\right)^3\tilde{C}_{C21}^-\Big)\Bigg)\Bigg|_{x=Vt}=0\ ,$$

$$\Bigg(2m\Omega i\frac{\partial B}{\partial(\mu t)}+3EI\Bigg(\left(k_1^B\right)^2\frac{\partial C_{B1}^+}{\partial(\mu x)}+\left(k_2^B\right)^2\frac{\partial C_{B2}^+}{\partial(\mu x)}-$$
$$-\left(k_3^B\right)^2\frac{\partial C_{B1}^-}{\partial(\mu x)}-\left(k_4^B\right)^2\frac{\partial C_{B2}^-}{\partial(\mu x)}\Bigg)+$$
$$+iEI\Big(\left(k_1^C-\chi\right)^3\tilde{C}_{C12}^+ +\left(k_2^C-\chi\right)^3\tilde{C}_{C22}^+ -$$
$$-\left(k_3^C-\chi\right)^3\tilde{C}_{C12}^- -\left(k_4^C-\chi\right)^3\tilde{C}_{C22}^-\Big)\Bigg)\Bigg|_{x=Vt}=0 \quad (33)$$

с константами $\tilde{C}_{Cij}^{\pm}$, $i, j=1,2$, определенными в приложении 3.

Теперь необходимо найти решение уравнений (32) и (33). Это решение отличается от выражения (24), которое было использовано в случае $\delta\neq 0$ линейной зависимостью от времени

$$C_{A1}^+(\mu x,\mu t)=C_{A10}^+\cdot\mu t\cdot\exp\left(\mu\left(q_1^At-p_1^Ax\right)\right),$$

$$C_{A2}^+(\mu x,\mu t)=C_{A20}^+\cdot\mu t\cdot\exp\left(\mu\left(q_2^At-p_2^Ax\right)\right),$$

$$C_{B1}^+(\mu x,\mu t)=C_{B10}^+\cdot\mu t\cdot\exp\left(\mu\left(q_1^Bt-p_1^Bx\right)\right),$$

$$C_{B2}^+(\mu x,\mu t)=C_{B20}^+\cdot\mu t\cdot\exp\left(\mu\left(q_2^Bt-p_2^Bx\right)\right),$$

$$C_{A1}^-(\mu x,\mu t)=C_{A10}^-\cdot\mu t\cdot\exp\left(\mu\left(q_3^At-p_3^Ax\right)\right),$$

$$C_{A2}^-(\mu x,\mu t)=C_{A20}^-\cdot\mu t\cdot\exp\left(\mu\left(q_4^At-p_4^Ax\right)\right),$$

$$C_{B1}^-(\mu x,\mu t)=C_{B10}^-\cdot\mu t\cdot\exp\left(\mu\left(q_3^Bt-p_3^Bx\right)\right),$$

$$C_{B2}^-(\mu x,\mu t)=C_{B20}^-\cdot\mu t\cdot\exp\left(\mu\left(q_4^Bt-p_4^Bx\right)\right),$$

$$A(\mu t)=A_0\cdot\mu t,\ B(\mu t)=B_0\cdot\mu t. \quad (34)$$

Подставляя выражения (34) в (32) и (33) и разрешая полученную систему, имеем:

$$p_j^{A,B}=q_j^{A,B}=0,\ j=\overline{1,4},$$

$$A_0=\frac{Q_6C}{2m\Omega},\ B_0=-\frac{Q_7C}{2m\Omega} \quad (35)$$

с константами $Q_{6,7}$, определенными в приложении 3.

Таким образом, если $V\chi=\Omega$, то колебания массы определяются выражением

$$u_0(t)=A_0\mu te^{it\Omega}+B_0\mu te^{-it\Omega}+C_0+\mu u_0^{(1)}(t), \quad (36)$$

описывающим линейный резонанс.

Таким образом, учет силы тяжести не влияет на устойчивость колебаний, однако приводит к резонансу. Это имеет место не только для случая массы, но и для любого движущегося объекта в линейной постановке задачи. Внешняя сила, такая как сила тяжести, ветер и т.п., не влияет на собственные частоты колебаний объекта и поэтому не влияет на его устойчивость.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 08-08-97057-р_поволжье_а).

Приложение 1

- при $x > Vt$:

$$e^{it(\Omega+\mu\delta)}\sum_{j=1}^{2} C_{Aj}^{+}\left(\mu x, \mu t\right)e^{ik_j^A(Vt-x)}\left(-\rho A_{cs}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\Omega+k_j^A V\right)^2+EI\left(k_j^A\right)^4+k_f\right)+$$
$$+e^{-it(\Omega+\mu\delta)}\sum_{j=1}^{2} C_{Bj}^{+}\left(\mu x, \mu t\right)e^{ik_j^B(Vt-x)}\left(-\rho A_{cs}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\Omega+k_j^A V\right)^2+EI\left(k_j^A\right)^4+k_f\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{2} C_{Cj}^{+}\left(\mu x, \mu t\right)e^{ik_j^C(Vt-x)}\left(-\rho A_{cs}\left(k_j^C V\right)^2+\right.$$
$$\left.+EI\left(k_j^C\right)^4+k_f\right)=0\;; \tag{1.1}$$

- при $x < Vt$:

$$e^{it(\Omega+\mu\delta)}\sum_{j=1}^{2} C_{Aj}^{-}\left(\mu x, \mu t\right)e^{ik_{j+2}^A(Vt-x)}\left(-\rho A_{cs}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\Omega+k_{j+2}^A V\right)^2+EI\left(k_{j+2}^A\right)^4+k_f\right)+$$
$$+e^{-it(\Omega+\mu\delta)}\sum_{j=1}^{2} C_{Bj}^{-}\left(\mu x, \mu t\right)e^{ik_{j+2}^B(Vt-x)}\left(-\rho A_{cs}\times\right.$$
$$\left.\times\left(-\Omega+k_{j+2}^A V\right)^2+EI\left(k_{j+2}^B\right)^4+k_f\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{2} C_{Cj}^{-}\left(\mu x, \mu t\right)e^{ik_{j+2}^C(Vt-x)}\left(-\rho A_{cs}\left(k_{j+2}^C V\right)^2+\right.$$
$$\left.+EI\left(k_{j+2}^C\right)^4+k_f\right)=0\;; \tag{1.2}$$

- при $x = Vt$:

$$\sum_{j=1}^{2} C_{Aj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} C_{Bj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)\times$$
$$\times e^{-it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} C_{Cj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{2} C_{Aj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} C_{Bj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right)\times$$
$$\times e^{-it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} C_{Cj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right)\;; \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{2} k_j^A C_{Aj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} k_j^B C_{Bj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)\times$$
$$\times e^{-it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} k_j^C C_{Cj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{2} k_{j+2}^A C_{Aj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} k_{j+2}^B\times$$
$$\times C_{Bj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{-it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} k_{j+2}^C C_{Cj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right); \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left(k_j^A\right)^2 C_{Aj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2}\left(k_j^B\right)^2 C_{Bj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)\times$$
$$\times e^{-it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2}\left(k_j^C\right)^2 C_{Cj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{2}\left(k_{j+2}^A\right)^2 C_{Aj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2}\left(k_{j+2}^B\right)^2\times$$
$$\times C_{Bj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{-it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2}\left(k_{j+2}^C\right)^2 C_{Cj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right), \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=1}^{2} C_{Aj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} C_{Bj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)\times$$
$$\times e^{-it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} C_{Cj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)=$$
$$=A\left(\mu t\right)e^{it(\Omega+\mu\delta)}+B\left(\mu t\right)e^{-it(\Omega+\mu\delta)}+C\left(\mu t\right), \tag{1.6}$$

$$EI\left(\sum_{j=1}^{2} i\left(k_j^A\right)^3 C_{Aj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} i\left(k_j^B\right)^3\times\right.$$
$$\times C_{Bj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{-it(\Omega+\mu\delta)}+\sum_{j=1}^{2} i\left(k_j^C\right)^3 C_{Cj}^{+}\left(\mu Vt, \mu t\right)-$$
$$-\sum_{j=1}^{2} i\left(k_{j+2}^A\right)^3 C_{Aj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{it(\Omega+\mu\delta)}-$$
$$-\sum_{j=1}^{2} i\left(k_{j+2}^B\right)^3 C_{Bj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right)e^{-it(\Omega+\mu\delta)}-$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{2} i\left(k_{j+2}^C\right)^3 C_{Cj}^{-}\left(\mu Vt, \mu t\right)\right)=m\Omega^2\left(A\left(\mu t\right)\times\right.$$
$$\left.\times e^{it(\Omega+\mu\delta)}+B\left(\mu t\right)e^{-it(\Omega+\mu\delta)}\right)-mg\,. \tag{1.7}$$

Очевидно, что уравнения (1.1) и (1.2) выполняются автоматически, поскольку волновые числа $k_{1,2,3,4}^{A,B}$ (и $k_{1,2,3,4}^{C}$) есть корни дисперсионного уравнения. Уравнения (1.3)–(1.7) могут быть подразделены на три системы уравнений, одна из которых содержит члены пропорциональные $e^{it(\Omega+\mu\delta)}$, другая – члены пропорциональные $e^{-it(\Omega+\mu\delta)}$ и последняя – члены пропорциональные e^{0}. Каждая из трех систем удовлетворяется автоматически.

Приложение 2

$$\tilde{C}^{+}_{C11}(\mu x,\mu t)=\frac{-k_f C^{+}_{C1}(\mu x,\mu t)}{-\rho F\left(k_1^C V\right)^2+EI\left(\left(k_1^C+\chi\right)^4+k_f\right)},$$

$$\tilde{C}^{+}_{C21}(\mu x,\mu t)=\frac{-k_f C^{+}_{C2}(\mu x,\mu t)}{-\rho F\left(k_1^C V\right)^2+EI\left(\left(k_1^C-\chi\right)^4+k_f\right)},$$

$$\tilde{C}^{+}_{C12}(\mu x,\mu t)=\frac{-k_f C^{+}_{C1}(\mu x,\mu t)}{-\rho F\left(k_2^C V\right)^2+EI\left(\left(k_2^C+\chi\right)^4+k_f\right)},$$

$$\tilde{C}^{+}_{C22}(\mu x,\mu t)=\frac{-k_f C^{+}_{C2}(\mu x,\mu t)}{-\rho F\left(k_2^C V\right)^2+EI\left(\left(k_2^C-\chi\right)^4+k_f\right)},$$

$$\tilde{C}^{-}_{C11}(\mu x,\mu t)=\frac{-k_f C^{-}_{C1}(\mu x,\mu t)}{-\rho F\left(k_3^C V\right)^2+EI\left(\left(k_3^C+\chi\right)^4+k_f\right)},$$

$$\tilde{C}^{-}_{C21}(\mu x,\mu t)=\frac{-k_f C^{-}_{C2}(\mu x,\mu t)}{-\rho F\left(k_3^C V\right)^2+EI\left(\left(k_3^C-\chi\right)^4+k_f\right)},$$

$$\tilde{C}^{-}_{C12}(\mu x,\mu t)=\frac{-k_f C^{-}_{C1}(\mu x,\mu t)}{-\rho F\left(k_4^C V\right)^2+EI\left(\left(k_4^C+\chi\right)^4+k_f\right)},$$

$$\tilde{C}^{-}_{C22}(\mu x,\mu t)=\frac{-k_f C^{-}_{C2}(\mu x,\mu t)}{-\rho F\left(k_4^C V\right)^2+EI\left(\left(k_4^C-\chi\right)^4+k_f\right)}.$$

Приложение 3

- Соотношения, полученные подстановкой (24) в выражения (1.3)–(1.6):

$$q_1^A-p_1^AV=q_2^A-p_2^AV=q_1^B-p_1^BV=q_2^B-p_2^BV=$$
$$=q_3^A-p_3^AV=q_4^A-p_4^AV=q_3^B-p_3^BV=q_4^B-p_4^BV=s,$$

$$C^{+}_{A10}=-\frac{A_0\left(k_3^A-k_2^A\right)\left(k_4^A-k_2^A\right)}{\left(k_1^A+k_2^A-k_3^A-k_4^A\right)\left(k_1^A-k_2^A\right)},$$

$$C^{-}_{A10}=\frac{A_0\left(k_4^A-k_1^A\right)\left(k_4^A-k_2^A\right)}{\left(k_1^A+k_2^A-k_3^A-k_4^A\right)\left(k_3^A-k_4^A\right)},$$

$$C^{+}_{A20}=\frac{A_0\left(k_3^A-k_1^A\right)\left(k_4^A-k_1^A\right)}{\left(k_1^A+k_2^A-k_3^A-k_4^A\right)\left(k_1^A-k_2^A\right)},$$

$$C^{-}_{A20}=-\frac{A_0\left(k_3^A-k_1^A\right)\left(k_3^A-k_2^A\right)}{\left(k_1^A+k_2^A-k_3^A-k_4^A\right)\left(k_3^A-k_4^A\right)},$$

$$C^{+}_{B10}=-\frac{B_0\left(k_3^B-k_2^B\right)\left(k_4^B-k_2^B\right)}{\left(k_1^B+k_2^B-k_3^B-k_4^B\right)\left(k_1^B-k_2^B\right)},$$

$$C^{-}_{B10}=\frac{B_0\left(k_4^B-k_1^B\right)\left(k_4^B-k_2^B\right)}{\left(k_1^B+k_2^B-k_3^B-k_4^B\right)\left(k_3^B-k_4^B\right)}, \qquad (3.1)$$

$$C^{+}_{B20}=\frac{B_0\left(k_3^B-k_1^B\right)\left(k_4^B-k_1^B\right)}{\left(k_1^B+k_2^B-k_3^B-k_4^B\right)\left(k_1^B-k_2^B\right)},$$

$$C^{-}_{B20}=-\frac{B_0\left(k_3^B-k_1^B\right)\left(k_3^B-k_2^B\right)}{\left(k_1^B+k_2^B-k_3^B-k_4^B\right)\left(k_3^B-k_4^B\right)},$$

$$C^{+}_{C10}=-\frac{C_0\left(k_3^C-k_2^C\right)\left(k_4^C-k_2^C\right)}{\left(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C\right)\left(k_1^C-k_2^C\right)},$$

$$C^{-}_{C10}=\frac{C_0\left(k_4^C-k_1^C\right)\left(k_4^C-k_2^C\right)}{\left(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C\right)\left(k_3^C-k_4^C\right)},$$

$$C^{+}_{C20}=\frac{C_0\left(k_3^C-k_1^C\right)\left(k_4^C-k_1^C\right)}{\left(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C\right)\left(k_1^C-k_2^C\right)},$$

$$C^{-}_{C20}=-\frac{C_0\left(k_3^C-k_1^C\right)\left(k_3^C-k_2^C\right)}{\left(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C\right)\left(k_3^C-k_4^C\right)}.$$

- Константы из уравнения (25):

$$Q_1=-2m\Omega+\frac{3iEI\rho F}{\left(k_1^A-k_2^A\right)\left(k_1^A+k_2^A-k_3^A-k_4^A\right)}\times$$
$$\times\left(-\frac{\left(k_1^AV+\Omega\right)\left(k_1^A\right)^2\left(k_3^A-k_2^A\right)\left(k_4^A-k_2^A\right)}{\left(\rho FV\left(k_1^AV+\Omega\right)+2EI\left(k_1^A\right)^3\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(k_2^AV+\Omega\right)\left(k_2^A\right)^2\left(k_3^A-k_1^A\right)\left(k_4^A-k_1^A\right)}{\left(\rho FV\left(k_2^AV+\Omega\right)+2EI\left(k_2^A\right)^3\right)}\right)-$$
$$-\frac{3iEI\rho F}{\left(k_3^A-k_4^A\right)\left(k_1^A+k_2^A-k_3^A-k_4^A\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{\left(k_3^AV+\Omega\right)\left(k_3^A\right)^2\left(k_4^A-k_1^A\right)\left(k_4^A-k_2^A\right)}{\left(\rho FV\left(k_3^AV+\Omega\right)+2EI\left(k_3^A\right)^3\right)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\left(k_4^AV+\Omega\right)\left(k_4^A\right)^2\left(k_3^A-k_1^A\right)\left(k_3^A-k_2^A\right)}{\left(\rho FV\left(k_4^AV+\Omega\right)+2EI\left(k_4^A\right)^3\right)}\right),$$

$$Q_2=2m\Omega+\frac{3iEI\rho F}{\left(k_1^B-k_2^B\right)\left(k_1^B+k_2^B-k_3^B-k_4^B\right)}\times$$
$$\times\left(-\frac{\left(k_1^BV-\Omega\right)\left(k_1^B\right)^2\left(k_3^B-k_2^B\right)\left(k_4^B-k_2^B\right)}{\left(\rho FV\left(k_1^BV-\Omega\right)+2EI\left(k_1^B\right)^3\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(k_2^BV-\Omega\right)\left(k_2^B\right)^2\left(k_3^B-k_1^B\right)\left(k_4^B-k_1^B\right)}{\left(\rho FV\left(k_2^BV-\Omega\right)+2EI\left(k_2^B\right)^3\right)}\right)+$$

$$
-\frac{3iEI\rho F}{\left(k_3^B-k_4^B\right)\left(k_1^B+k_2^B-k_3^B-k_4^B\right)}\Bigg|\times
$$

$$
\times\left(\frac{\left(k_3^BV-\Omega\right)\left(k_3^A\right)^2\left(k_4^B-k_1^B\right)\left(k_4^B-k_2^B\right)}{\left(\rho FV\left(k_3^BV-\Omega\right)+2EI\left(k_3^B\right)^3\right)}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\left(k_4^BV-\Omega\right)\left(k_4^B\right)^2\left(k_3^B-k_1^B\right)\left(k_3^B-k_2^B\right)}{\left(\rho FV\left(k_4^BV-\Omega\right)+2EI\left(k_4^B\right)^3\right)}\right),
$$

$$
Q_3=-\frac{ik_f}{\left(k_1^C-k_2^C\right)\left(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C\right)}\times
$$

$$
\times\left(-\frac{\left(k_1^C-\chi\right)^3\left(k_3^C-k_2^C\right)\left(k_4^C-k_2^C\right)}{2\chi\left(\chi-2k_1^C\right)\left(\left(k_1^C\right)^2+\left(k_1^C-\chi\right)^2\right)}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\left(k_2^C-\chi\right)^3\left(k_3^C-k_1^C\right)\left(k_4^C-k_1^C\right)}{2\chi\left(\chi-2k_2^C\right)\left(\left(k_2^C\right)^2+\left(k_2^C-\chi\right)^2\right)}\right)+
$$

$$
+\frac{ik_f}{\left(k_3^C-k_4^C\right)\left(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C\right)}\times
$$

$$
\times\left(\frac{\left(k_3^C-\chi\right)^3\left(k_4^C-k_1^C\right)\left(k_4^C-k_2^C\right)}{2\chi\left(\chi-2k_3^C\right)\left(\left(k_3^C\right)^2+\left(k_3^C-\chi\right)^2\right)}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\left(k_4^C-\chi\right)^3\left(k_3^C-k_1^C\right)\left(k_3^C-k_2^C\right)}{2\chi\left(\chi-2k_4^C\right)\left(\left(k_4^C\right)^2+\left(k_4^C-\chi\right)^2\right)}\right),
$$

$$
Q_4=-\frac{ik_f}{\left(k_1^C-k_2^C\right)\left(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C\right)}\times
$$

$$
\times\left(-\frac{\left(k_1^C+\chi\right)^3\left(k_3^C-k_2^C\right)\left(k_4^C-k_2^C\right)}{2\chi\left(\chi+2k_1^C\right)\left(\left(k_1^C\right)^2+\left(k_1^C+\chi\right)^2\right)}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\left(k_2^C+\chi\right)^3\left(k_3^C-k_1^C\right)\left(k_4^C-k_1^C\right)}{2\chi\left(\chi+2k_2^C\right)\left(\left(k_2^C\right)^2+\left(k_2^C+\chi\right)^2\right)}\right)+
$$

$$
+\frac{ik_f}{\left(k_3^C-k_4^C\right)\left(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C\right)}\times
$$

$$
\times\left(\frac{\left(k_3^C+\chi\right)^3\left(k_4^C-k_1^C\right)\left(k_4^C-k_2^C\right)}{2\chi\left(\chi+2k_3^C\right)\left(\left(k_3^C\right)^2+\left(k_3^C+\chi\right)^2\right)}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\left(k_4^C+\chi\right)^3\left(k_3^C-k_1^C\right)\left(k_3^C-k_2^C\right)}{2\chi\left(\chi+2k_4^C\right)\left(\left(k_4^C\right)^2+\left(k_4^C+\chi\right)^2\right)}\right).
$$

- Константа из уравнения (28):

$$
Q_5=\frac{(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C)}{EI\left(\dfrac{(k_3^C-k_2^C)(k_4^C-k_2^C)(k_1^C)^3}{(k_1^C-k_2^C)}\right)}+
$$

$$
+\frac{(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C)}{EI\left(\dfrac{(k_3^C-k_1^C)(k_4^C-k_1^C)(k_2^C)^3}{(k_1^C-k_2^C)}\right)}-
$$

$$
-\frac{(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C)}{EI\left(\dfrac{(k_4^C-k_1^C)(k_4^C-k_2^C)(k_3^C)^3}{(k_3^C-k_4^C)}\right)}-
$$

$$
-\frac{(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C)}{EI\left(\dfrac{(k_3^C-k_1^C)(k_3^C-k_2^C)(k_4^C)^3}{(k_3^C-k_4^C)}\right)}.
$$

- Константы из уравнения (35):

$$
Q_6=-iEIk_f\left(\frac{\left(k_1^C+\chi\right)^3Q_1^C}{-\rho F\left(k_1^CV\right)^2+EI\left(\left(k_1^C+\chi\right)^4+k_f\right)}+\right.
$$

$$
+\frac{\left(k_2^C+\chi\right)^3Q_2^C}{-\rho F\left(k_2^CV\right)^2+EI\left(\left(k_2^C+\chi\right)^4+k_f\right)}-
$$

$$
-\frac{\left(k_3^C+\chi\right)^3Q_3^C}{-\rho F\left(k_3^CV\right)^2+EI\left(\left(k_3^C+\chi\right)^4+k_f\right)}-
$$

$$
\left.-\frac{\left(k_4^C+\chi\right)^3Q_4^C}{-\rho F\left(k_4^CV\right)^2+EI\left(\left(k_4^C+\chi\right)^4+k_f\right)}\right),
$$

$$
Q_7=-iEIk_f\left(\frac{\left(k_1^C-\chi\right)^3Q_1^C}{-\rho F\left(k_1^CV\right)^2+EI\left(\left(k_1^C-\chi\right)^4+k_f\right)}+\right.
$$

$$
+\frac{\left(k_2^C-\chi\right)^3Q_2^C}{-\rho F\left(k_2^CV\right)^2+EI\left(\left(k_2^C+\chi\right)^4+k_f\right)}-
$$

$$
-\frac{\left(k_3^C-\chi\right)^3Q_3^C}{-\rho F\left(k_3^CV\right)^2+EI\left(\left(k_3^C-\chi\right)^4+k_f\right)}-
$$

$$
\left.-\frac{\left(k_4^C-\chi\right)^3Q_4^C}{-\rho F\left(k_4^CV\right)^2+EI\left(\left(k_4^C-\chi\right)^4+k_f\right)}\right),
$$

$$
Q_1^C=-\frac{\left(k_3^C-k_2^C\right)\left(k_4^C-k_2^C\right)}{\left(k_1^C+k_2^C-k_3^C-k_4^C\right)\left(k_1^C-k_2^C\right)},
$$

$$Q_3^C = \frac{\left(k_4^C - k_1^C\right)\left(k_4^C - k_2^C\right)}{\left(k_1^C + k_2^C - k_3^C - k_4^C\right)\left(k_3^C - k_4^C\right)},$$

$$Q_2^C = \frac{\left(k_3^C - k_1^C\right)\left(k_4^C - k_1^C\right)}{\left(k_1^C + k_2^C - k_3^C - k_4^C\right)\left(k_1^C - k_2^C\right)},$$

$$Q_4^C = -\frac{\left(k_3^C - k_1^C\right)\left(k_3^C - k_2^C\right)}{\left(k_1^C + k_2^C - k_3^C - k_4^C\right)\left(k_3^C - k_4^C\right)}.$$

Список литературы

1. Весницкий А.И., Метрикин А.В. Параметрическая неустойчивость колебаний тела, движущегося по периодически-неоднородной упругой системе // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 2. С. 127–134.

2. Metrikine A.V., Dieterman H.A. Instability of vibrations of a mass moving uniformly along an axially compressed beam on a viscoelastic foundation // Journal of Sound and Vibration. 1997. V. 201. P. 567–576.

3. Veritchev S.N. Instability of a vehicle moving on an elastic structure // Delft University press. 2002. P. 192.

4. Verichev S.N., Metrikine A.V. Instability of vibrations of a mass that moves uniformly along a beam on a periodically inhomogeneous foundation // Journal of Sound and Vibration. 2003. V. 260. P. 901–925.

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики. Механика. М.: Наука, 1988.

6. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1987.

7. Lamb H. On the Propagation of Tremors Over the Surface of an Elastic Solid // Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 1904. V. 203. No. 1. P. 1–42.

ON STABILITY OF AN OBJECT MOVING ALONG A PERIODICALLY INHOMOGENEOUS ELASTIC GUIDE

S.N. Verichev

The effect of the dead weight on stability of a vehicle moving along a periodically inhomogeneous elastic guide has been studied. The account of the dead weight has been shown not to affect the system stability but to lead to a linear resonance.