

УДК 534.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ГЕНЕРАЦИИ ВОЛНЫ УДВОЕННОЙ ЧАСТОТЫ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ С ДИСЛОКАЦИЯМИ

© 2008 г.

О.В. Артамонова, В.И. Ерофеев, В.П. Ромашов

Нижегородский филиал Института машиноведения
им. А.А. Благонравова РАН

erf04@sinn.ru, zaov_home@mail.ru

Поступила в редакцию 30.04.2008

Показано, что при распространении в твердом теле с дислокациями продольной акустической волны проявляется квадратичная нелинейность, приводящая к возможности генерации волны удвоенной частоты. Взаимодействие первой и второй гармоник носит несимметричный характер: первая гармоника всегда генерирует вторую гармонику, вторая же воздействует на первую лишь при наличии сигнала первой гармоники. Получена характерная длина, на которой следует ожидать значительную перекачку энергии основной волны в энергию второй гармоники. Проанализированы зависимости этой длины от частоты основной волны, массы дислокаций и коэффициента акустодислокационного взаимодействия.

Ключевые слова: процесс генерации, твёрдое тело, дислокация.

Традиционное теоретическое описание закономерностей распространения акустической волны в твердом теле с дислокациями использует струнную модель Гранато-Люке [1], которая описывает поглощение энергии упругих колебаний за счет колебаний дислокационной линии в поле упругих напряжений внутри кристалла. Эта модель пренебрегает взаимодействием дислокаций с решеткой кристалла, а также взаимодействием дислокаций между собой.

Для учета таких взаимодействий в [2] предложена следующая математическая модель:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta_i = \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik}, \quad A \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_i + B \frac{\partial}{\partial t} U_i = f_i. \quad (1)$$

Здесь θ – акустическое смещение, U – дислокационное смещение, A – масса дислокации, B – сила трения на единицу длины дислокации, P_{ik} – тензор напряжений, ρ – плотность материала, f – сила, действующая на дислокацию. Записывая свободную энергию кристалла F в виде функции переменных деформаций θ_{ij} и дислокационного смещения U_i

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{ijkl} \theta_{ij} \theta_{kl} + \frac{1}{2} c_{ik} U_i U_k + \frac{1}{2} \beta c_{ijkl} (b_i U_j + b_j U_i) \theta_{kl}, \quad (2)$$

где λ_{ijkl} – модули упругости, c_{ik} – модули «жесткости» дислокации, β_{ijkl} – тензор акустодислокационного взаимодействия, b_j – вектор Бюргера и используя равенства

$$P_{ik} = \frac{\partial}{\partial \theta_{ik}} F, \quad f_i = - \frac{\partial}{\partial U_i} F, \quad (3)$$

можно с учетом выражения для свободной энергии кристалла F вычислить правые части в уравнениях (1).

Рассматривая далее плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x в кубическом кристалле, однородном вдоль осей y и z , получим следующие уравнения движения ($U_i = U$, $\theta_k = \theta$, $i, k = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta &= \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} U, \\ A \frac{\partial^2}{\partial t^2} U + B \frac{\partial}{\partial t} U &= -\beta \frac{\partial}{\partial x} \theta, \end{aligned} \quad (4)$$

где c – скорость продольной волны в материале, а $\beta = \beta_{ijk}$, b_j – коэффициент акустодислокационного взаимодействия.

В рамках линейных уравнений (4) в [3, 4] проанализировано влияние плотности дислокаций на дисперсию фазовой скорости волны, величину и характер затухания. Произведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными по изучению характеристик распространения упругих волн в образцах с изменяющейся плотностью дислокаций (деформируемых и циклически нагружаемых образцах).

Начиная с некоторого порогового значения амплитуды ультразвука и плотности дислокаций в материале, амплитуда колебаний дислокаций достигает величины, соизмеримой с расстоянием

между дислокационными линиями. При этом будет происходить активное взаимодействие дислокаций, которое приводит к необходимости учета нелинейности дислокационной подсистемы, т.е. массу дислокации и силу трения на единицу длины дислокации следует рассматривать как сумму постоянной и пульсационной составляющих. При этом пульсационную составляющую будем считать пропорциональной дислокационному смещению U : $A = A_0(1 + A_1U)$, $B = B_0(1 + B_1U)$, тогда уравнения (4) переписываются следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta = \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}U, \quad (5)$$

$$A_0(1 + A_1U) \frac{\partial^2}{\partial t^2}U + B_0(1 + B_1U) \frac{\partial}{\partial t}U = -\beta \frac{\partial}{\partial x}\theta.$$

Считая дислокационную подсистему консервативной ($B_0 = 0$), перепишем (5) в виде одного уравнения:

$$\frac{A\rho}{\beta} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4}U - c^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2}U \right) + \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2}U = \frac{c^2 A \rho \alpha}{2\beta} \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x}U \right)^2, \quad (6)$$

описывающего распространение волны дислокационного смещения.

Заметим, что уравнение (6), кроме кубической нелинейности и нелинейности более высоких степеней, содержит квадратичную нелинейность. Как известно, в среде, обладающей квадратичной нелинейностью, возможен процесс генерации второй гармоники. Будем считать, что другими нелинейными эффектами (самовоздействием, генерацией высших гармоник и т.д.) можно пренебречь. Тогда, в среде распространяются только две волны: на основной (ω) и удвоенной (2ω) частотах. Если считать среду слабо нелинейной, то амплитуды волн будут изменяться на малую величину при прохождении волной расстояния порядка длины волны, т.е. амплитуды волн будут медленно меняющимися функциями координат. В соответствии с этим решение уравнения (6) будем искать в виде

$$U = U_1(\varepsilon x) e^{i(\omega t - kx)} + U_2(\varepsilon x) e^{2i(\omega t - kx)} + \text{к.с.}, \quad (7)$$

где буквами «к.с.» обозначены комплексно-сопряженные члены, U_1, U_2 – медленно меняющиеся комплексные амплитуды; ε – малый параметр; ω – частота основной волны; k – волновое число.

Подставляя теперь в волновое уравнение (6) выражение (7), получаем в первом приближении по малому параметру ε следующую систему укороченных уравнений для амплитуд, зависящих от пройденного расстояния x :

$$\frac{dU_1}{dx} = \frac{c^2 A_1 k^2 \omega^2 \rho A_0}{\varepsilon(-c^2 \omega^2 A_0 \rho - \beta^2)} U_2 U_1^*, \quad (8)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = -\frac{c^2 A_1 k^2 \omega^2 \rho A_0}{\varepsilon \cdot 4(-c^2 \omega^2 A_0 \rho - \beta^2)} U_1^2. \quad (9)$$

Из (8), (9) видно, что взаимодействие первой и второй гармоник имеет несимметричный характер. Квадрат амплитуды первой гармоники входит в уравнение второй гармоники в виде вынуждающей силы. Амплитуда второй гармоники входит в уравнение для первой параметрическим образом. Следовательно, первая гармоника всегда генерирует вторую гармонику, вторая же гармоника воздействует на первую лишь при наличии сигнала первой гармоники.

Выявим основные закономерности генерации второй гармоники на основе решения укороченных уравнений (8), (9). Будем считать, что на границе материала $x = 0$ была возбуждена лишь волна частоты ω , а волна удвоенной частоты на границе отсутствовала, что позволяет задать следующие условия:

$$U_1(0) = U_0, \quad U_2(0) = 0. \quad (10)$$

Проанализируем генерацию гармоники в условиях, когда ее амплитуда мала по сравнению с амплитудой основной волны $|U_2| \ll |U_1|$. В этом случае, следует пренебречь обратным влиянием второй гармоники на основную волну, положив правую часть в (8) равной нулю. Тогда очевидно, что амплитуда основной волны не меняется ($U_1(x) \approx U_0$), и вторая гармоника возбуждается в заданном поле основной волны:

$$\frac{dU_2}{dx} = -\frac{\alpha}{4} U_0^2, \quad (11)$$

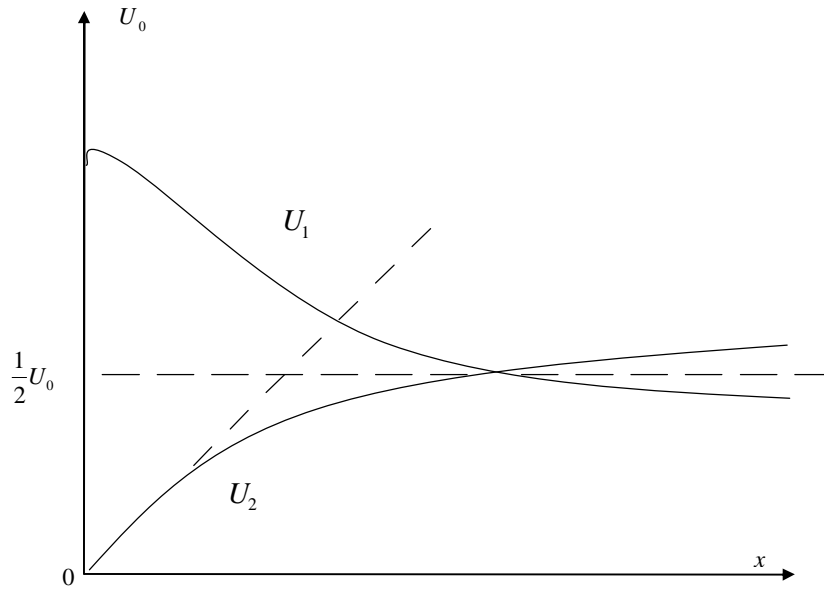
$$\text{где } \alpha = \frac{c^2 A_1 k^2 \omega^2 \rho A_0}{\varepsilon(-c^2 \omega^2 A_0 \rho - \beta^2)}.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$|U_2| = \frac{\alpha}{4} U_0^2 x. \quad (12)$$

Амплитуда гармоники растет пропорционально пройденному расстоянию. В силу условия $|U_2| \ll |U_1|$ формула (12) справедлива при $x \ll L_{\text{нл}}$, где

$$L_{\text{нл}} = \frac{2\varepsilon \left[1 + \frac{\beta^2}{c^2 \omega^2 \rho A_0} \right]}{U_0 k^2 A_1}. \quad (13)$$


 Рис. 1. Зависимость амплитуд первой (U_1) и второй (U_2) гармоник от пройденного расстояния

Согласно закону дисперсии, значение волнового числа k равно

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{A_0 \rho c^2 \omega^2} \right)}. \quad (14)$$

Если малый параметр ε принять равным $\varepsilon = A_1/2$, то соотношение (13) примет вид:

$$L_{нл} = \frac{c^2 \left[1 + \frac{\beta^2}{c^2 \omega^2 \rho A_0} \right]^2}{U_0 \omega^2}. \quad (15)$$

Таким образом $L_{нл} \sim 1/U_0$. При длине $x \ll L_{нл}$, амплитуда второй гармоники достигает половины значения U_0 , т.е.

$$U_2 = \frac{1}{2} U_0. \quad (16)$$

Зависимости первой и второй гармоник от пройденного расстояния представлены на рис. 1. При $x \rightarrow \infty$ происходит полная перекачка энергии основной волны в энергию второй гармоники. Запишем (12) с учетом условия (16)

$$\frac{1}{2} U_0 = \frac{\alpha}{4} U_0^2 \cdot x, \quad (17)$$

$$x = \frac{2}{\alpha U_0}. \quad (18)$$

Следовательно длина, на которой следует ожидать значительную перекачку энергии основной волны в энергию второй гармоники, равна

$$L_{нл} = \frac{2}{\alpha U_0} = \frac{2\varepsilon(c^2 \omega^2 A_0 \rho + \beta^2)}{U_0(c^2 A_1 k^2 \omega^2 \rho A_0)}. \quad (19)$$

Проанализируем зависимость $L_{нл}$ от частоты ω , амплитуды дислокационного смещения U_0 , массы дислокации A_0 и коэффициента акустодислокационного взаимодействия β .

Рассмотрим зависимость длины $L_{нл}$ от частоты основной волны ω . При больших значениях ω : $L_{нл} \sim 1/\omega^2$, при малых значениях ω :

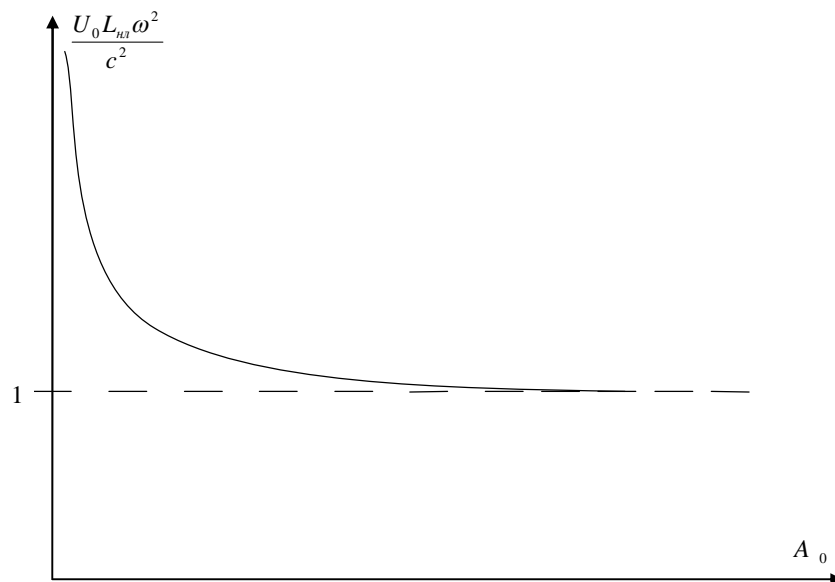
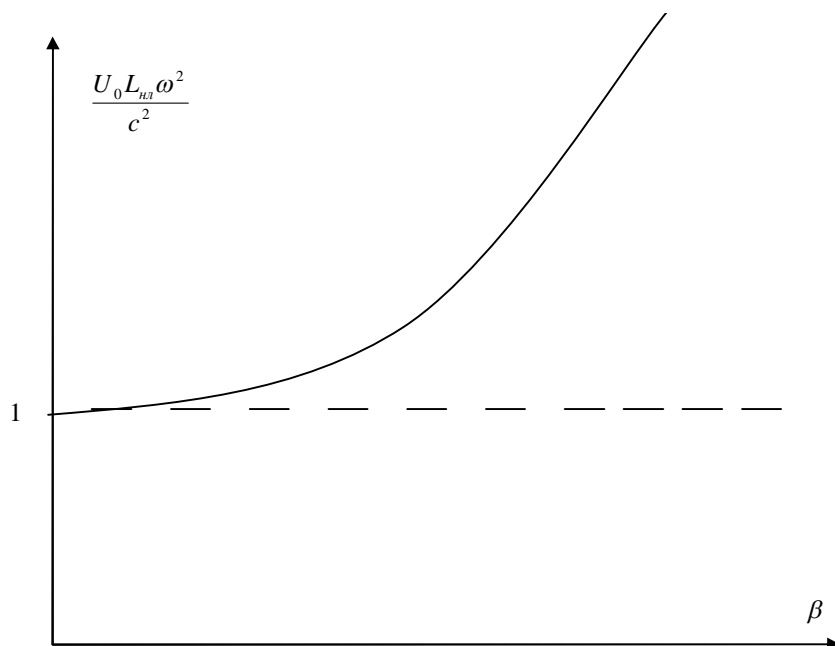
$$L_{нл} \approx \frac{\beta^4}{c^4 \rho^2 A_0^4 \omega^8}, \text{ т.е. } L_{нл} \sim 1/\omega^8.$$

Аналогично рассмотрим зависимости $L_{нл}$ от массы дислокаций. При малых значениях A_0 : $L_{нл} \sim 1/A_0^2$, при больших значениях A_0 $L_{нл}$ от нее не зависит: $L_{нл} \sim \frac{c^2}{U_0 \omega^2} = \text{const}$. Зависимость $L_{нл}$ от массы дислокаций представлена на рис. 2.

При малых значениях β длина волны не зависит от коэффициента акустодислокационного взаимодействия: $L_{нл} \approx \frac{c^2}{U_0 \omega^2} = \text{const}$, при

$$\text{больших } \beta: L_{нл} \approx \frac{\beta^4}{c^4 U_0 \omega^8 \rho^2 A_0^2}; L_{нл} \sim \beta^4.$$

Зависимость $L_{нл}$ от коэффициента акустодислокационного взаимодействия представлена на рис. 3.

Рис. 2. Зависимость длины L_{nl} от массы дислокацийРис. 3. Зависимость длины L_{nl} от коэффициента акустодислокационного взаимодействия

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 06-02-1715, 06-02-00520, 08-08-97058-р_поволжье).

Список литературы

1. Granato A., Lucke K. Theory of mechanical damping due to dislocation // J. Appl. Phys. 1956. V. 27, № 6. P. 583–593.
2. Бурлак Г.Н., Островский И.В. Гистерезисные

акустические явления, связанные с дислокационной нелинейностью в кристаллах // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 18. С. 69–74.

3. Ерофеев В.И., Ромашов В.П. Влияние дислокаций на дисперсию и затухание ультразвука в твердом теле // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, № 6. С. 6–11.

4. Ерофеев В.И., Ромашов В.П. Влияние циклического нагружения и деформации материала на характеристики распространения в нем продольной акустической волны // Дефектология. 2004. № 1. С. 59–64.

SECOND HARMONIC GENERATION MODELING IN A SOLID

O.V. Artamonova, V.I. Erofeyev, V.P. Romashov

In solids with dislocations, a propagating longitudinal acoustic wave has nonlinearity which may lead to second-harmonic generation. Characteristic significant energy transfer from the first harmonic into the second one can be analyzed on the frequency of the main wave, mass of dislocations and acoustic-dislocation interaction coefficient.

