УДК 519.21

ИТЕРАТИВНО-МАЖОРАНТНЫЙ МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ КОНФЛИКТНЫХ ПОТОКОВ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

А.В. Зорин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

zoav1@uic.nnov.ru

Поступила в редакцию 20.05.2008

На примере системы обслуживания конфликтных потоков с переменной структурой алгоритмом с разделением времени и переналадками показывается, что для эффективного применения итеративно-мажорантного метода получения условий существования стационарного режима функционирования системы необходимо учитывать процесс усреднения влияния внешней случайной среды. Доказаны новые условия существования стационарного режима.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, случайная среда, итеративно-мажорантный подход, условия существования стационарного распределения.

Введение

В работах [1–6] проводится исследование процессов управления формируемыми в случайной среде конфликтными потоками требований в различных системах обслуживания. Процесс обслуживания рассматривается в дискретной временной шкале $\{\tau_i; i=0,1,\ldots\}$ и строится марковская цепь $\{(\Gamma_i, \kappa_i, \chi_i); i=0,1,\ldots\}$, описывающая изменение состояния обслуживающего устройства ($\Gamma_i \in \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(n)}\}$ — состояние на промежутке $(\tau_{i-1}, \tau_i]$, n — число возможных состояний обслуживающего устройства), вектора длин очередей ($\kappa_i \in \{0,1,\ldots\}^m$ — вектор длин очередей в момент τ_i, m — число очередей в системе) и состояния случайной среды (χ_i — состояние случайной среды на промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$). При этом получение необходимых и достаточных условий существования стационарного режима процесса обслуживания итеративно-мажорантным методом (изложенным, например, в [7]) имело ограниченный успех [5]. Приведённые в цитированных выше публикациях необходимые условия не совпадали с достаточными условиями. Как мы покажем в настоящей работе, неудача была обусловлена тем, что не рассматривался достаточно длительный период усреднения влияния случайной среды.

Пусть входные потоки системы обслуживания формируются в случайной среде с двумя состояниями $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$. Смена состояний среды может происходить только в моменты окончания актов обслуживания и актов переналадок и управления потоками. Состояния случайной среды образуют неразложимую апериодическую марковскую цепь. Вероятность перехода среды из состояния $e^{(l)}$ в состояние $e^{(k)}$ обозначим $a_{l,k}$, l, $k=1,\ 2$. Число m входных потоков Π_1, Π_2, …, Π_m конечно. Когда состояние среды есть $e^{(k)}$, требования по потоку Π_j, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, поступают группами. Группы требований образуют пуассоновский поток с параметром $\lambda_j^{(k)}$. Размеры групп независимы и их распределение задаётся производящей функцией $f_j^{(k)}(z)$, $|z|<1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Заявки потока Π_j поступают в накопитель O_j. Обслуживающее устройство имеет m узлов обслуживания $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, …, $\Gamma^{(m)}$ и один узел переналадки и управления $\Gamma^{(n)}$, $n=m+1$. В каждый момент времени обслуживается не более чем одна заявка. Заявки из очереди O_j обслуживаются узлом $\Gamma^{(j)}$. Длительность обслуживания узлом $\Gamma^{(j)}$ имеет функцию распределения $B_j(t)$. После акта обслуживания узлом $\Gamma^{(j)}$ прибор проводит переналадку, длительность которой случайна и имеет функцию распределения $\overline{B}_j(t)$. Если по окончании переналадки очереди пусты, то обслуживается заявка из первой поступившей группы. В противном случае, если длины очередей описываются ненулевым вектором $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in \in\{0,1,\ldots\}^m = X$, то выбирается заявка из очереди с номером $j=h(x)$. Здесь отображение $h(\cdot)$ целочисленной неотрицательной решетки X на множество $\{1,2,\ldots,n\}$ обладает следующими свойствами:

$h(x)=j$ влечёт $h_j>0$ и прообразом точки n является нулевой вектор $\overline{0}=(0,0,\ldots,0)\in X$. Заявка, обслуженная узлом $\Gamma^{(j)}$, с вероятностью $p_{j,r}$ пересылается на повторное обслуживание в очередь O_r, $r=1,2,\ldots,m$, а с вероятностью $p_{j,n}=1-\sum_{r=1}^{m}p_{j,r}$ покидает систему. Входные потоки, длительности обслуживания и переналадок предполагаются независимыми.

Данная система обслуживания реализует управление конфликтными потоками в классе алгоритмов с разделением времени и переналадками. Её анализ проведён в работах [3–5] и, как мы сказали выше, не является исчерпывающим.

Получение основного неравенства

Пусть $\tau_0=0$, τ_1, τ_2, … – моменты последовательных окончаний актов обслуживаний и актов переналадок и управления потоками, Γ_0 – состояние обслуживающего устройства в момент τ_0, $\Gamma_i\in\Gamma=\{\Gamma^{(1)},\Gamma^{(2)},\ldots,\Gamma^{(n)}\}$ – состояние обслуживающего устройства на промежутке $(\tau_{i-1},\tau_i]$, $\Gamma_i\in\Gamma$, $\kappa_{j,i}$ – число требований в очереди O_j в момент τ_i, $\kappa_{j,i}=(\kappa_{1,i},\kappa_{2,i},\ldots,\kappa_{m,i})$, χ_i – состояние среды на промежутке $(\tau_i,\tau_{i+1}]$, $\chi_i\in\{e^{(1)},e^{(2)}\}$. Все случайные величины заданы на некоторм вероятностном пространстве $(\Omega,\mathbf{F},\mathrm{P})$, где Ω – пространство описаний элементарных исходов, $\mathbf{F}$ – σ-алгебра событий $A\subset\Omega$, $\mathrm{P}(\cdot)$ – вероятность указанного в скобках события. В [3] доказано, что последовательность

$$\{(\Gamma_i,\kappa_i,\chi_i);\, i=0,1,\ldots\} \tag{1}$$

является неразложимой марковской цепью с двумя циклическими подклассами

$$\{(\gamma,x,e^{(k)});\,\gamma\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(n)}\},\,x\in X,\,k\in\{1,2\}\}$$

и

$$\{(\Gamma^{(n)},x,e^{(k)});\,x\in X,\,k\in\{1,2\}\}.$$

Обозначим $\lambda_{+}^{(k)}=\lambda_1^{(k)}+\lambda_2^{(k)}+\ldots+\lambda_m^{(k)}$, $Q_i(x;s,k)=\mathrm{P}(\{\Gamma_i=\Gamma^{(s)},\kappa_i=x,\chi_i=e^{(k)}\})$, $s=1,2,\ldots,n$, $X_j=\{x:h(x)=j\}\subset X$. Для вещественного или комплексного вектора $v=(v_1,v_2,\ldots,v_m)$ и произвольного $w=(w_1,w_2,\ldots,w_m)\in X$ положим $v^w=v_1^{w_1}v_2^{w_2}\cdots v_m^{w_m}$, считая, что $0^0=1$. Введём производящие функции

$$\Psi_i(v,s,k)=\sum_{x\in X}v^xQ_i(x;s,k),$$

$$\Phi_i(v,j,k)=\sum_{x\in X_j}v^xQ_i(x;n,k),$$

$$R_j(v)=v_j^{-1}\left(p_{j,n}+\sum_{r=1}^{m}p_{j,r}v_r\right)$$

соответствующих распределений и преобразования Лапласа-Стилтьеса

$$q_j^{(k)}(v)=\int_0^\infty\prod_{r=1}^{m}\exp\{\lambda_r^{(k)}(f_r^{(k)}(v_r)-1)t\}\,dB_j(t),$$

$$\overline{q}_j^{(k)}(v)=\int_0^\infty\prod_{r=1}^{m}\exp\{\lambda_r^{(k)}(f_r^{(k)}(v_r)-1)t\}\,d\overline{B}_j(t).$$

В работе [3] были установлены следующие рекуррентные по $i=0,1,\ldots$ соотношения:

$$\Psi_{i+1}(v,j,k)=\sum_{l=1}^{2}a_{l,k}q_j^{(l)}(v)R_j(v)\times$$
$$\times\left(\Phi_i(v,j,l)+Q_i(\overline{0};n,l)\frac{\lambda_j^{(l)}}{\lambda_+^{(l)}}f_j^{(l)}(v_j)\right), \tag{2}$$

$$\Psi_{i+1}(v,n,k)=\sum_{l=1}^{2}a_{l,k}\sum_{r=1}^{m}\overline{q}_r^{(l)}(v)\Psi_i(v,r,l). \tag{3}$$

Лемма 1. *Для положительных* v_1, v_2, …, v_m, $j=1,2,\ldots,m$ *и* $l=1,2$ *имеем*

$$\Phi_i(v,j,l)+Q_i(\overline{0};n,l)\frac{\lambda_j^{(l)}}{\lambda_+^{(l)}}\le\Psi_i(v,n,l). \tag{4}$$

Доказательство. Из определения производящих функций,

$$\Phi_i(v,j,l)+Q_i(\overline{0};n,l)\frac{\lambda_j^{(l)}}{\lambda_+^{(l)}}=$$
$$=\sum_{x\in X_j}v^xQ_i(x;n,l)+Q_i(\overline{0};n,l)\frac{\lambda_j^{(l)}}{\lambda_+^{(l)}}.$$

Поскольку $X_j\subset X$ и $\lambda_j^{(l)}<\lambda_+^{(l)}$, то

$$\sum_{x\in X_j}v^xQ_i(x;n,l)+Q_i(\overline{0};n,l)\frac{\lambda_j^{(l)}}{\lambda_+^{(l)}}\le$$
$$\le\sum_{x\in X}v^xQ_i(x;n,l)=\Psi_i(v,n,l).$$

Неравенство (4) установлено.

Лемма 2 (основное неравенство мажоризации). *Для положительных* v_1, v_2, …, v_m *и натурального* b *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{2}\Psi_{i+2b}(v,n,k)\le\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{2b}=1}^{2}\ \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_b=1}^{m}a_{l_{2b},l_{2b-1}}\times$$
$$\times a_{l_{2b-1},l_{2b-2}}\cdots a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)q_{j_1}^{(l_2)}(v)R_{j_1}(v)\overline{q}_{j_2}^{(l_3)}(v)\times$$
$$\times q_{j_2}^{(l_4)}(v)R_{j_2}(v)\cdots\overline{q}_{j_b}^{(l_{2b-1})}(v)q_{j_b}^{(l_{2b})}(v)R_{j_b}(v)\Psi_i(v,n,l_{2b})+$$

$$+\sum_{l_1,l_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{m}a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)q_{j_1}^{(l_2)}(v)R_{j_1}(v)Q_{i+2b-2}(\overline{0};n,l_2)\times$$

$$\times\frac{\lambda_{j_1}^{(l_2)}}{\lambda_{+}^{(l_2)}}(f_{j_1}^{(l_2)}(v_{j_1})-1)+\sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=1}^{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{m}a_{l_4,l_3}a_{l_3,l_2}a_{l_2,l_1}\times$$

$$\times\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)q_{j_1}^{(l_2)}(v)R_{j_1}(v)\overline{q}_{j_2}^{(l_3)}(v)q_{j_2}^{(l_4)}(v)R_{j_2}(v)\times$$

$$\times Q_{i+2b-4}(\overline{0};n,l_4)\frac{\lambda_{j_2}^{(l_4)}}{\lambda_{+}^{(l_4)}}(f_{j_2}^{(l_4)}(v_{j_2})-1)+\ldots+$$

$$+\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{2b}=1}^{2}\sum_{j_1,j_2,\ldots,l_b=1}^{m}a_{l_{2b},l_{2b-1}}a_{l_{2b-1},l_{2b-2}}\cdots a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)\times$$

$$\times q_{j_1}^{(l_2)}(v)R_{j_1}(v)\overline{q}_{j_2}^{(l_3)}(v)q_{j_2}^{(l_4)}(v)R_{j_2}(v)\cdots\overline{q}_{j_b}^{(l_{2b-1})}\times$$

$$\times(v)q_{j_b}^{(l_{2b})}(v)R_{j_b}(v)Q_i(\overline{0};n,l_{2b})\frac{\lambda_{j_b}^{(l_{2b})}}{\lambda_{+}^{(l_{2b})}}\times \qquad (5)$$

$$\times(f_{j_b}^{(l_{2b})}(v_{j_b})-1).$$

Доказательство. Суммируя рекуррентные соотношения (2) по $k=1,\ 2$ и воспользовавшись соотношением (3), получим:

$$\sum_{k=1}^{2}\Psi_{i+2b}(v,n,k)=\sum_{l_1=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{m}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)\times$$

$$\times\sum_{l_2=1}^{2}a_{l_2,l_1}q_{j_1}^{(l_2)}(v)R_{j_1}(v)\Bigg(\Phi_{i+2b-2}(v,j_1,l_2)+$$

$$+Q_{i+2b-2}(\overline{0};n,l_2)\frac{\lambda_{j_1}^{(l_2)}}{\lambda_{+}^{(l_2)}}f_{j_1}^{(l_2)}(v_{j_1})\Bigg). \qquad (6)$$

Применим оценку (4) к сумме, написанной в скобках в правой части равенства (6),

$$\Phi_{i+2b-2}(v,j_1,l_2)+Q_{i+2b-2}(\overline{0};n,l_2)\frac{\lambda_{j_1}^{(l_2)}}{\lambda_{+}^{(l_2)}}f_{j_1}^{(l_2)}(v_{j_1})=$$

$$=\Phi_{i+2b-2}(v,j_1,l_2)+Q_{i+2b-2}(\overline{0};n,l_2)\frac{\lambda_{j_1}^{(l_2)}}{\lambda_{+}^{(l_2)}}+$$

$$+Q_{i+2b-2}(\overline{0};n,l_2)\frac{\lambda_{j_1}^{(l_2)}}{\lambda_{+}^{(l_2)}}(f_{j_1}^{(l_2)}(v_{j_1})-1)\le$$

$$\le\Psi_{i+2b-2}(v,n,l_2)+Q_{i+2b-2}(\overline{0};n,l_2)\times$$

$$\times\frac{\lambda_{j_1}^{(l_2)}}{\lambda_{+}^{(l_2)}}(f_{j_1}^{(l_2)}(v_{j_1})-1).$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{2}\Psi_{i+2b}(v,n,k)\le\sum_{l_1,l_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{m}a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)q_{j_1}^{(l_2)}(v)\times$$

$$\times R_{j_1}(v)\Psi_{i+2b-2}(v,n,l_2)+\sum_{l_1,l_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{m}a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)\times$$

$$\times q_{j_1}^{(l_2)}(v)R_{j_1}(v)Q_{i+2b-2}(\overline{0};n,l_2)\times$$

$$\times\frac{\lambda_{j_1}^{(l_2)}}{\lambda_{+}^{(l_2)}}(f_{j_1}^{(l_2)}(v_{j_1})-1). \qquad (7)$$

Правая часть неравенства (7) содержит слагаемое, входящее вторым в правую часть соотношения (5). Оценим первое слагаемой в правой части неравенства (7). Воспользовавшись сперва рекуррентными соотношениями (2), (3), найдём:

$$\sum_{l_1,l_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{m}a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)q_{j_1}^{(l_2)}(v)R_{j_1}(v)\Psi_{i+2b-2}(v,n,l_2)=$$

$$=\sum_{l_1,l_2,l_3=1}^{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{m}a_{l_3,l_2}a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)q_{j_1}^{(l_2)}(v)R_{j_1}(v)\overline{q}_{j_2}^{(l_3)}(v)\times$$

$$\times\sum_{l_4=1}^{2}a_{l_4,l_3}q_{j_2}^{(l_4)}(v)R_{j_2}(v)\Bigg(\Phi_{i+2b-4}(v,j_2,l_4)+$$

$$+Q_{i+2b-4}(\overline{0};n,l_4)\frac{\lambda_{j_2}^{(l_4)}}{\lambda_{+}^{(l_4)}}f_{j_2}^{(l_4)}(v_{j_2})\Bigg). \qquad (8)$$

Применив оценку (4) к стоящей в скобках сумме, получим

$$\sum_{l_1,l_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{m}a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)q_{j_1}^{(l_2)}(v)R_{j_1}(v)\Psi_{i+2b-2}(v,n,l_2)\le$$

$$\le\sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=1}^{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{m}a_{l_4,l_3}a_{l_3,l_2}a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)q_{j_1}^{(l_2)}(v)\times$$

$$\times R_{j_1}(v)\overline{q}_{j_2}^{(l_3)}(v)q_{j_2}^{(l_4)}(v)R_{j_2}(v)\Psi_{i+2b-4}(v,n,l_4)+$$

$$+\sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=1}^{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{m}a_{l_4,l_3}a_{l_3,l_2}a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v)q_{j_1}^{(l_2)}(v)R_{j_1}(v)\times$$

$$\times\overline{q}_{j_2}^{(l_3)}(v)q_{j_2}^{(l_4)}(v)R_{j_2}(v)Q_{i+2b-4}(\overline{0};n,l_2)\times$$

$$\times\frac{\lambda_{j_2}^{(l_4)}}{\lambda_{+}^{(l_4)}}(f_{j_2}^{(l_4)}(v_{j_2})-1). \qquad (9)$$

Теперь второе слагаемое в правой части последнего неравенства входит третьим слагаемым в правую часть соотношения (5). Повторяя рассуждения, приведшие от соотношения (8) к неравенству (9) ещё $(b-2)$ раза, окончательно установим неравенство (5).

Условия существования стационарного распределения

Положим $\mathbf{a}_1=a_{2,1}(a_{1,2}+a_{2,1})^{-1}$, $\mathbf{a}_2=a_{1,2}\times\times(a_{1,2}+a_{2,1})^{-1}$, $P=(p_{j,r})_{j,r=1,2,\ldots m}$, пусть I_m — единичная матрица размера $m\times m$, $\delta_{l,k}$ — символ Кронекера, принимающий значение 0 при $l\ne k$ и значение 1 при $l=k$. Заметим, что $\mathbf{a}_l$ — стационарная вероятность состояния $e^{(l)}$ случайной среды. Вероятности перехода среды из состояния $e^{(l)}$ в состояние $e^{(k)}$ за n шагов обозначим $a_{l,k}^{(n)}$, так что

$a_{l,k}^{(0)} = \delta_{l,k}$, $a_{l,k}^{(i+1)} = \sum_{g=1}^{2} a_{l,g}^{(i)} a_{g,k}$. Будем предполагать, что длительности обслуживаний и переналадок имеют конечные моменты $\beta_j = \int_0^\infty t\, dB_j(t)$, $\overline{\beta}_j = \int_0^\infty t\, d\overline{B}_j(t)$, размеры групп первичных требований имеют конечные математическое ожидания $\mu_j^{(k)} = \left.\dfrac{df_j^{(k)}(z)}{dz}\right|_{z=1}$ и матрица $(I_m - P)$ обратима. Введём векторы $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ и $\overline{\beta} = (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_m)$, $\overline{\lambda}^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}\mu_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}\mu_2^{(k)}, \ldots, \lambda_m^{(k)}\mu_m^{(k)})^{\mathsf{T}}$, здесь T – символ транспонирования.

Поскольку марковская цепь неразложима, то может иметь место лишь одна из двух альтернатив [8]: либо для всех $(\Gamma^{(s)}, x, e^{(k)}) \in \Gamma \times X \times \{e^{(1)}, e^{(2)}\}$ и независимо от распределения $(\Gamma_0, \kappa_0, \chi_0)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{i\to\infty} Q_i(x; s, k) = 0, \tag{10}$$

либо существует единственное стационарное распределение цепи (1). В следующей теореме содержится фактически необходимое условие существования стационарного распределения марковской цепи (1).

Теорема 1. *Пусть* $(\beta + \overline{\beta})(I_m - P^{\mathsf{T}})^{-1}(\mathbf{a}_1\overline{\lambda}^{(1)} + \mathbf{a}_2\overline{\lambda}^{(2)}) > 1$. *Тогда для всех* $(\Gamma^{(s)}, x, e^{(k)}) \in \Gamma \times X \times \{e^{(1)}, e^{(2)}\}$ *и независимо от распределения* $(\Gamma_0, \kappa_0, \chi_0)$ *имеет место предельное соотношение (10).*

Доказательство. Выберем числа θ_1, θ_2, …, θ_m — решение системы

$$\theta_j = \sum_{r=1}^{m} \theta_r p_{j,r} + \beta_j + \overline{\beta}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{11}$$

Тогда $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)^{\mathsf{T}} = (I_m - P)^{-1}(\beta + \overline{\beta})^{\mathsf{T}} > 0$. Выберем функции $v_j = v_j(u)$ (действительного) переменного u, удовлетворяющие условиям: $v_j(0) = 1$, $v_j'(0) = \theta_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Вычислим производную по u от выражения, стоящего сомножителем перед $\Psi_i(v, n, l_{2b})$ в неравенстве (5):

$$\frac{d}{du}\Big(\sum\nolimits^{(1)} a_{l_{2b},l_{2b-1}} \cdots a_{l_2,l_1} \overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v) q_{j_1}^{(l_2)}(v) \times$$
$$\times R_{j_1}(v) \cdots \overline{q}_{j_b}^{(l_{2b-1})}(v) q_{j_b}^{(l_{2b})}(v) R_{j_1}(v)\Big)\Big|_{v=\overline{1}} =$$
$$= \sum_{r=1}^{m} \theta_r \Big(\sum\nolimits^{(1)} a_{l_{2b},l_{2b-1}} \cdots a_{l_2,l_1} (\overline{\lambda}_r^{(l_1)}\overline{\beta}_{j_1} + \overline{\lambda}_r^{(l_2)}\beta_{j_1} +$$
$$+ \overline{\lambda}_r^{(l_3)}\overline{\beta}_{j_2} + \overline{\lambda}_r^{(l_4)}\beta_{j_2} + p_{j_2,r} - \delta_{j_2,r} p_{j_1,r} - \delta_{j_1,r} +$$
$$+ \ldots + \overline{\lambda}_r^{(l_{2b-1})}\overline{\beta}_{j_b} + \overline{\lambda}_r^{(l_{2b})}\beta_{j_b} + p_{j_b,r} - \delta_{j_b,r})\Big) =$$
$$= \sum_{r=1}^{m} \theta_r \left(\sum_{l_1=1}^{2} \sum_{j_1=1}^{m} a_{l_{2b},l_1}^{(2b-1)} \overline{\lambda}_r^{(l_1)} \overline{\beta}_{j_1} m^{b-1} + \sum_{l_2=1}^{2} \sum_{j_1=1}^{m} a_{l_{2b},l_2}^{(2b-2)} \times \right.$$
$$\times (\overline{\lambda}_r^{(l_2)}\overline{\beta}_{j_1} + p_{j_1,r}) m^{b-1} - m^{b-1} + \sum_{l_3=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{m} a_{l_{2b},l_3}^{(2b-3)} \times$$
$$\times \overline{\lambda}_r^{(l_3)} \overline{\beta}_{j_2} m^{b-1} + \sum_{l_4=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{m} a_{l_{2b},l_4}^{(2b-4)} (\overline{\lambda}_r^{(l_4)}\overline{\beta}_{j_2} + p_{j_2,r}) m^{b-1} -$$
$$- m^{b-1} + \ldots + \sum_{l_{2b-1}=1}^{2} \sum_{j_b=1}^{m} a_{l_{2b},l_{2b-1}}^{(1)} \overline{\lambda}_r^{(l_{2b-1})} \overline{\beta}_{j_b} m^{b-1} +$$
$$\left. + \sum_{j_b=1}^{m} (\overline{\lambda}_r^{(l_{2b})}\overline{\beta}_{j_b} + p_{j_b,r}) m^{b-1} - m^{b-1} \right) =$$
$$= m^{b-1} \left(\sum_{j=1}^{m} \overline{\beta}_j \sum_{r=1}^{m} \theta_r \sum_{l=1}^{2} \overline{\lambda}_r^{(l)} (a_{l_{2b},l}^{(2b-1)} + a_{l_{2b},l}^{(2b-3)} + \ldots + \right.$$
$$+ a_{l_{2b},l}^{(1)}) + \sum_{j=1}^{m} \overline{\beta}_j \sum_{r=1}^{m} \theta_r \sum_{l=1}^{2} \overline{\lambda}_r^{(l)} (a_{l_{2b},l}^{(2b-2)} + a_{l_{2b},l}^{(2b-4)} + \ldots +$$
$$+ a_{l_{2b},l}^{(0)}) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} \theta_r \sum_{l=1}^{2} p_{j,r} (a_{l_{2b},l}^{(2b-2)} + a_{l_{2b},l}^{(2b-4)} + \ldots +$$
$$\left. + a_{l_{2b},l}^{(0)}) - b \sum_{r=1}^{m} \theta_r \right). \tag{12}$$

Здесь знак $\sum^{(1)}$ означает суммирование по l_1, l_2, …, l_{2b-1} от 1 до 2 и по j_1, j_2, …, j_b от 1 до m. Известно [9], что при $\xi \to \infty$ существуют пределы вариант $(a_{l_{2b},l}^{(2b-1)} + a_{l_{2b},l}^{(2b-3)} + \ + \ldots + a_{l_{2b},l}^{(1)}) b^{-1}$ и $(a_{l_{2b},l}^{(2b-2)} + a_{l_{2b},l}^{(2b-4)} + \ldots + a_{l_{2b},l}^{(0)}) b^{-1}$, равные стационарной вероятности $\mathbf{a}_l$ состояния $e^{(l)}$. Выбирая b достаточно большим, можно сделать так, чтобы знак выражения (12) совпал со знаком выражения

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{\beta}_j \sum_{r=1}^{m} \theta_r \sum_{l=1}^{2} \overline{\lambda}_r^{(l)} \mathbf{a}_l + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{r=1}^{m} \theta_r \sum_{l=1}^{2} \overline{\lambda}_r^{(l)} \mathbf{a}_l +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{r=1}^{m} \theta_r p_{j,r} - \theta_j \right) = \sum_{j=1}^{m} (\beta_j + \overline{\beta}_j)(\theta^{\mathsf{T}}(\mathbf{a}_1\overline{\lambda}^{(1)} +$$
$$+ \mathbf{a}_2\overline{\lambda}^{(2)}) - 1) = \sum_{j=1}^{m} (\beta_j + \overline{\beta}_j)((\beta + \overline{\beta})(I_m - P^{\mathsf{T}})^{-1} \times$$
$$\times (\mathbf{a}_1\overline{\lambda}^{(1)} + \mathbf{a}_2\overline{\lambda}^{(2)}) - 1) > 0. \tag{13}$$

Тогда существует такое значение $u^* < 0$, что $0 < v_j(u^*) < 1$ и

$$R_+ = \max_{l_{2b}=1,2} \Big\{ \sum\nolimits^{(1)} a_{l_{2b},l_{2b-1}} a_{l_{2b-1},l_{2b-2}} \cdots \times$$
$$\times a_{l_2,l_1} \overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v(u^*)) q_{j_1}^{(l_2)}(v(u^*)) R_{j_1}(v(u^*)) \times$$

$$\times\overline{q}_{j_2}^{(l_3)}(v(u^*))q_{j_2}^{(l_4)}(v(u^*))R_{j_2}(v(u^*))\cdots\overline{q}_{j_b}^{(l_{2b-1})}\times$$
$$\times(v(u^*))q_{j_b}^{(l_{2b})}(v(u^*))R_{j_b}(v(u^*))\Big\}<1.$$

Отметим, что $f_j^{(1)}(v_j(u^*))<1$. Образуем числовую последовательность

$$M_0=\sum_{k=1}^{2}\Psi_0(v(u^*),n,k),\ M_1=\sum_{k=1}^{2}\Psi_1(v(u^*),n,k),$$
$$M_{2b-1}=\sum_{k=1}^{2}\Psi_{2b-1}(v(u^*),n,k),\ M_{i+2b}=R_+M_i,$$

$i=0,\ 1,\ \ldots$ При всех i имеет место оценка $0\le\sum_{k=1}^{2}\Psi_i(v(u^*),n,k)\le M_i$. Но $M_i\to 0$ при $i\to\infty$. Это с необходимостью приводит нас к (10). Теорема доказана.

В работе [4, с. 94] доказано, что если предельное соотношение (10) имеет место для всех $(\Gamma^{(s)},x,e^{(k)})\in\Gamma\times X\times\{e^{(1)},e^{(2)}\}$ и независимо от распределения $(\Gamma_0,\kappa_0,\chi_0)$, то последовательность $\{\mathrm{E}\sum_{j=1}^{m}\kappa_{j,i};i=0,1,\ldots\}$ неограниченно возрастает. Таким образом, ограниченность последовательности среднего числа требований в системе является достаточным условием существования стационарного распределения.

Теорема 2. *Пусть* $(\beta+\overline{\beta})(I_m-P^{\mathsf{T}})^{-1}(\mathbf{a}_1\overline{\lambda}^{(1)}+$ $+\mathbf{a}_2\overline{\lambda}^{(2)})<1$. *Тогда последовательность* $\{\mathrm{E}\sum_{j=1}^{m}\kappa_{j,i};\,i=0,1,\ldots\}$ *ограничена и марковская цепь (1) имеет единственное стационарное распределение.*

Доказательство. Пусть $v_j=v_j(u)$, $j=1,2,\ldots,m$, суть функции (комплексного) переменного u такие, что $v_j(0)=1$ и $v_j'(0)=\theta_j$, а числа θ_1, θ_2, …, θ_m удовлетворяют системе (11). Тогда существуют такое число $u^{**}>0$ и натуральное b, что выполняются неравенства $1<v_j(u^{**})<1+\varepsilon$ ($j=1,2,\ldots,m$) и

$$\tilde{R}_+=\max_{l_{2b}=1,2}\Big\{\sum{}^{(1)}a_{l_{2b},l_{2b-1}}a_{l_{2b-1},l_{2b-2}}\cdots a_{l_2,l_1}\times$$
$$\times\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v(u^{**}))q_{j_1}^{(l_2)}(v(u^{**}))R_{j_1}(v(u^{**}))\overline{q}_{j_2}^{(l_3)}(v(u^{**}))\times$$
$$\times q_{j_2}^{(l_4)}(v(u^{**}))R_{j_2}(v(u^{**}))\cdots\overline{q}_{j_b}^{(l_{2b-1})}(v(u^{**}))\times$$
$$\times q_{j_b}^{(l_{2b})}(v(u^{**}))R_{j_b}(v(u^{**}))\Big\}<1.$$

Предположим, что в условиях теоремы независимо от распределения $(\Gamma_0,\kappa_0,\chi_0)$ имеет место равенство (10). Выберем распределение $(\Gamma_0,\kappa_0,\chi_0)$ так, чтобы ряды $\Psi_0(v,s,k)$ сходились в области $|v_j'|\le 1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Образуем последовательность

$$M_0'=\sum_{k=1}^{2}\Psi_0(v(u^{**}),n,k),$$
$$M_1'=\sum_{k=1}^{2}\Psi_1(v(u^{**}),n,k),\ldots,$$
$$M_{2b-1}'=\sum_{k=1}^{2}\Psi_{2b-1}(v(u^{**}),n,k),$$
$$M_{i+2b}'=\tilde{R}_+M_i'+\sum_{l_1,l_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{m}a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v(u^{**}))\times$$
$$\times q_{j_1}^{(l_2)}(v(u^{**}))R_{j_1}(v)\frac{\lambda_{j_1}^{(l_2)}}{\lambda_+^{(l_2)}}(f_{j_1}^{(l_2)}(v_{j_1}(u^{**}))-1)+$$
$$+\sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=1}^{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{m}a_{l_4,l_3}a_{l_3,l_2}a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v(u^{**}))q_{j_1}^{(l_2)}(v(u^{**}))\times$$
$$\times R_{j_1}(v(u^{**}))\overline{q}_{j_2}^{(l_3)}(v(u^{**}))q_{j_2}^{(l_4)}(v(u^{**}))R_{j_2}(v(u^{**}))\times$$
$$\times\frac{\lambda_{j_2}^{(l_4)}}{\lambda_+^{(l_4)}}(f_{j_2}^{(l_4)}(v_{j_2}(u^{**}))-1)+\ldots+$$
$$+\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{2b}=1}^{2}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_b=1}^{m}a_{l_{2b},l_{2b-1}}a_{l_{2b-1},l_{2b-2}}\cdots a_{l_2,l_1}\overline{q}_{j_1}^{(l_1)}(v(u^{**}))\times$$
$$\times q_{j_1}^{(l_2)}(v(u^{**}))R_{j_1}(v)\overline{q}_{j_2}^{(l_3)}(v(u^{**}))q_{j_2}^{(l_4)}(v(u^{**}))\times$$
$$\times R_{j_2}(v(u^{**}))\cdots\overline{q}_{j_b}^{(l_{2b-1})}(v(u^{**}))q_{j_b}^{(l_{2b})}(v(u^{**}))\times$$
$$\times R_{j_b}(v(u^{**}))\frac{\lambda_{j_b}^{(l_{2b})}}{\lambda_+^{(l_{2b})}}(f_{j_b}^{(l_{2b})}(v_{j_b}(u^{**}))-1).$$

Эта последовательность сходится, следовательно, ограничена. Кроме того, для всех $i=0,1,\ldots$ имеем $0\le\sum\Psi_i(v(u^{**}),n,k)\le M_i'$, а значит, существует число M' такое, что для всех i, k, s $\Psi_i(v(u^{**}),n,k)<M'$. Теперь последовательность средних ограничена вследствие интегральной формулы Коши. Теорема доказана.

Рассмотрим декартову плоскость, отмечая по оси абсцисс величину $(\beta+\overline{\beta})(I_m-P^{\mathsf{T}})^{-1}\overline{\lambda}^{(1)}$, а по оси ординат величину $(\beta+\overline{\beta})(I_m-P^{\mathsf{T}})^{-1}\overline{\lambda}^{(2)}$. По теореме 2 область существования стационарного распределения последовательности (1) имеет вид внутренности прямоугольного треугольника с вершинами $(0,0)$, $(\mathbf{a}_1^{-1},0)$, $(0,\mathbf{a}_2^{-1})$. Можно убедиться, что область, приведённая в работе [5], целиком содержится в указанном треугольнике. В то же время вне указанного треугольника по теореме 2 стационарного распределения существовать не может. Область существования стационарного распределения установлена.

Список литературы

1. Куделин А.Н., Федоткин М.А. Управление конфликтными потоками в случайной среде по информации о наличии очереди // Деп. в ВИНИТИ. 1996. № 1717–В–96.

2. Куделин А.Н., Федоткин М.А. Предельные теоремы для систем управления потоками в случайной среде в классе алгоритмов с упреждением // Деп. в ВИНИТИ. 1996. № 2593–В–96.

3. Зорин А.В., Федоткин М.А. Анализ процессов с разделением времени // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия Математика. 2003. Т. 1. № 1. С. 18–28.

4. Зорин А.В., Федоткин М.А. Анализ и оптимизация процессов с разделением времени, функционирующих в случайной среде // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математика. 2004. № 1. С. 92–103.

5. Зорин А.В., Федоткин М.А. Оптимизация управления дважды стохастическими неординарными потоками в системах с разделением времени // Автоматика и телемеханика. 2005. № 7. С. 102–111.

6. Зорин А.В. О стационарном режиме системы разделения времени с ветвящимися потоками вторичных требований, формируемыми в случайной среде // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Серия Математика. 2006. Вып. 1(4) С. 38–48.

7. Федоткин М.А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой. Ч. II // Литовский математический сборник. 1989. Т. 29. № 1. С. 148–159.

8. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн. Кн. 2 М.: МЦНМО, 2004. 408 с.

9. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956 г. 605 с.

ITERATIVE MAJORANT METHOD TO PROVE LIMIT THEOREMS FOR SERVICE PROCESS OF CONFLICT FLOWS IN RANDOM ENVIRONMENT

A.V. Zorine

Taking as an example a time-sharing queuing system for servicing conflict flows of varying structure with readjustments it is demonstrated that the averaging of the external random environment’s influence should be taken into account to effectively apply iterative majorant method for obtaining the conditions for stationary mode existence. New conditions for the stationary mode existence are proved.