

УДК 548.732

## РАСЧЕТ ИЗМЕНЕНИЙ ПРОФИЛЕЙ КРИВИЗНЫ МОДУЛЬНЫХ ОБРАЗЦОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НИХ ТЕПЛОВЫМИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

© 2008 г. *А.В. Марков, В.Н. Трушин, М.А. Фаддеев, Е.В. Зайцева, Е.В. Чупрунов*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

trushin@phys.unn.ru

*Поступила в редакцию 20.05.2008*

Исследуется возможность корректировки профилей изгиба модульных образцов (МО), состоящих из основания и активных элементов (АЭ). Приводятся данные расчетов изгиба двух типов МО, в одном из которых АЭ являлись терморасширяющиеся элементы, во втором – пьезоэлементы. В первом случае изгиб МО изменяется за счет термодформаций, управляемых изменением его температуры, во втором изгиб управляется электрическим полем за счет пьезодеформаций АЭ. Активные элементы варьируются по размерам и располагаются вдоль поверхности МО. В зависимости от параметров АЭ и величины воздействия на них профиль поверхности МО может принимать параболическую, эллиптическую и гиперболическую формы.

*Ключевые слова:* модульные образцы, терморасширяющиеся элементы, пьезоэлементы, кривая дифракционного отражения.

### Введение

В настоящее время среди методов формирования поверхности заданной формы наиболее широко известны: метод упругого изгиба [1–3], метод термопластического изгиба [3] и метод изгиба на основе шаблона заданной формы [4].

Изогнутую поверхность заданного профиля, используемого в качестве фокусирующего элемента (ФЭ), можно получить непосредственно с помощью механических приводов. В работе [5] описан метод, в котором изгибаемая пластина (отражатель) прижимается к стержням механизма, снабжённого высокоточными силовыми приводами. Стержни приводятся в движение и тем самым изменяют кривизну отражателя.

При изготовлении ФЭ форма поверхности не всегда получается оптимальной, в том числе в отношении геометрических aberrаций. В этих случаях, как правило, применяют механические методы коррекции профиля изгиба ФЭ. Использование таких методов имеет ряд недостатков, связанных с точностью корректировки формы поверхности ФЭ и сложностью автоматизации данного процесса. Особенно это касается случаев, когда размеры ФЭ менее 20 мм. В этой связи актуальным является развитие методов адаптивной рентгеновской оптики, позволяющих интерактивно изменять профиль ФЭ, что позволяет улучшить характеристики рентгенооптических систем.

В данной работе исследуется возможность управления профилем поверхности кристаллов

при помощи модульных образцов (МО), представляющих собой основания с интегрированными в них активными элементами: терморасширяющимися элементами (ТЭ) либо пьезоэлементами (ПЭ). Форму поверхности МО можно изменять посредством изменения его температуры или создания в ПЭ пьезодеформаций. Профиль изгиба МО определяется функцией распределения внешнего воздействия и конфигурацией АЭ.

В случае малых изгибов, когда можно пренебречь изменением параметров кристаллической решетки, связь между радиусом кривизны  $R$  рабочей поверхности МО и изменением полуширины кривой дифракционного отражения (КДО) дифракционного пучка выражается формулой

$$R = d \cdot k / ((\beta_1 - \beta_0) \sin \Theta), \quad (1)$$

где  $d$  – ширина падающего рентгеновского пучка,  $\Theta$  – брэгговский угол,  $\beta_0$  и  $\beta_1$  – полуширины КДО плоского и изогнутого кристалла соответственно,  $k$  – коэффициент асимметрии, характеризующий изменение ширины рентгеновского пучка в асимметричной схеме дифракции, определяемый как  $k = \sin(\Theta + \varphi) / \sin(\Theta - \varphi)$ ,  $\varphi$  – угол между входной поверхностью кристалла и отражающей плоскостью.

### Методика расчётов

Рассмотрим МО в стационарных температурных полях. Предположим, что образец на-

гревается однородно. В МО возникает неоднородное поле деформаций, неоднородность которого связана с различными значениями коэффициентов теплового расширения (КТР) и коэффициентов упругой жёсткости материалов, составляющих МО.

В работе проводилось математическое моделирование нагревания МО, у которых компоненты тензора КТР  $\alpha_{ij}$  основания были меньше, чем соответствующие величины  $\alpha_{ij}$  для ТЭ. Помимо температурных деформаций, равных  $\alpha_{ij}\Delta T$ , в МО возникают линейные упругие деформации  $S_{ijkl}\sigma_{kl}$ , обусловленные жёсткой границей «ТЭ – основание». В результате тензор поля упругих деформаций примет вид [6]:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij}\Delta T + S_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad i, j, k, l = 1..3, \quad (2)$$

где  $\Delta T = T - 273$  К – изменение температуры МО относительно 0°C,  $S_{ijkl}$  – компоненты тензора упругой податливости. Тензор упругих механических напряжений связан с разностью температур  $\Delta T$  следующим образом:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}\Delta T), \quad (3)$$

где  $C_{ijkl}$  – компоненты тензора коэффициентов жёсткости.

Распределение температуры определяется решением стационарного уравнения теплопроводности:

$$\operatorname{div} \left( \chi_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (4)$$

где  $x_i$  – координаты точки в МО,  $\chi_i$  – коэффициенты теплопроводности. Граничными условиями являются значения нормальной компоненты градиента температуры на гранях МО:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = k\Delta T, \quad (5)$$

где  $k$  – коэффициент конвективного теплообмена, равный 0.5.

Трёхмерные поля деформаций, возникающие в кристаллах, можно найти из стационарного уравнения равновесия [7]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1..3, \quad (6)$$

где  $\sigma_{ij}$  – матрица напряжений, определяемая по формуле (3).

Для получения профиля деформаций необходимо найти функцию трёхмерных смещений  $U_i$ . Известно, что тензор деформации  $\varepsilon_{ij}$  выражается через компоненты вектора смещений  $U_i$  следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (7)$$

Для каждой грани, разделяющей АЭ и кристаллическое основание (см. рис. 1б), должны выполняться условия равновесия:

$$\sigma_{ij} \Big|_{s-0}^l = \sigma_{ij} \Big|_{s+0}^r, \quad (8)$$

$$U_j \Big|_{s-0}^l = U_j \Big|_{s+0}^r, \quad (9)$$

где  $s$  – номер данной грани,  $l$  и  $r$  – номера левой и правой соответственно граничащих между собой частей МО. Внешняя граница МО предполагается свободной.

Объединив уравнения (6) и (3) с учётом (7) и граничных условий (4), (8), (9) для каждой части МО в систему, можно найти  $U_i$  – смещение каждой точки образца как трёхмерную функцию координат.

Результирующее смещение  $\bar{U}_i$  элемента образца представим в виде:

$$\bar{U}_i = U_i + T_i + \omega_{ij}x_j, \quad (10)$$

где  $T_i$  – смещение тела как целого,  $\omega_{ij}$  – тензор дисторсии, определяющий поворот тела как целого и выражающийся как

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (11)$$

Координаты точки МО при наличии термодеформаций запишутся в следующем виде:

$$X_i = x_i + \bar{U}_i. \quad (12)$$

Аппроксимировав профиль деформации центрального сечения образца соответствующей кривой  $U_j^c$ , можно найти локальный радиус кривизны в точке  $x_{0i}$ :

$$R(x_{0i}) = \frac{[1 + (dU_j^c / dx_i)^2]^{3/2}}{|d^2U_j^c / dx_i^2|}. \quad (13)$$

Управление профилем МО можно также осуществлять, варьируя пьезоэлектрические деформации АЭ, изменяя величину подаваемого на них электрического поля.

При моделировании полей деформаций, возникающих в системе с ПЭ, при приложении к ним постоянного электрического поля, мы учитывали два механизма деформаций. Первый механизм связан с обратным пьезоэффектом в ПЭ, второй механизм – с линейными упругими деформациями МО. Граница «ПЭ-основание» также предполагается жёсткой. Выражение для суммарного поля деформаций в системе с активными пьезоэлементами можно записать в виде:

$$\varepsilon_{ij} = E_k d_{kij} + S_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad i, j, k, l = 1..3, \quad (14)$$

где  $d_{kij}$  – тензор пьезоэлектрических модулей ПЭ или основания МО,  $E_i$  – компоненты напряжённости электрического поля. Выразим тензор упругих напряжений  $\sigma_{ij}$  через компоненты поля  $E_m$ :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - d_{mkl} E_m), m=1..3 \quad (15)$$

Чтобы получить профили деформаций, необходимо найти функции трёхмерных смещений  $U_i$  точек МО. Для этого решается система уравнений (15) и (6), с учётом замены (7) и граничных условий (8), (9), определяющих положение АЭ в МО.

### Результаты и обсуждение

Рассмотрим случай нагреваемого МО. При моделировании ТЭ предполагались изготовленными из эпоксидной смолы, а основание – из кристалла KDP ( $KH_2PO_4$ ). Данные по КТР этих материалов приведены в табл. 1. С помощью трёхмерного моделирования были найдены поля напряжений, деформаций и смещений для всего образца, получен профиль его поверхности при нагреве МО до заданной температуры.

Было обнаружено, что профили МО различной формы можно получить, задавая определенным образом геометрические параметры ТЭ. При задании распределения высот ТЭ по гиперболическому и эллиптическому законам были получены на определённых интервалах  $x \in [-x_1, x_1]$  или  $x \in [0, x_1]$ ,  $x_1 \sim 0.5l$  ( $l$  – длина МО) соответствующие гиперболические и эллиптические профили следующих типов:

$$\begin{aligned} \bar{U}_y(x) &= \pm b \sqrt{1 \pm \frac{x^2}{a^2} + c}; \\ \bar{U}_y(x) &= b + \frac{a}{1 + cx}. \end{aligned} \quad (16)$$

На рис. 1а, 2а показаны рассчитанные профили 1, 2, 3 образцов рис. 1б, 2б, нагретых до температур 10, 30, 60 °С, соответственно. Ширина ТЭ бралась равной 0.2 см при размерах образца 3?2?1 см<sup>3</sup>. Данные по коэффициентам линейного теплового расширения  $\alpha_{ij}$ , коэффициентам теплопроводности  $\chi_i$  и коэффициентам жёсткости  $C_{\mu\nu}$  приведены в табл. 1. Показанные на рис. 2а профили на участке  $x \in [-1, 1]$  хорошо совпадают с вписанными эллипсами, проведенными штриховыми линиями, причем наибольшее совпадение отмечается у профиля 2. В центре образца решение является устойчивым в широком диапазоне температур.

На рис. 1с, 2с показаны изменения локальных радиусов кривизны  $R$  профилей образцов при изменении их температуры. Из приведенных зависимостей видно, что при одинаковой температуре наибольшее изменение кривизны наблюдается у структуры с гиперболическим профилем (рис. 1б).

Если поместить в рассматриваемые нами МО вставки одинаковой высоты, то профиль поверх-

ности после однородного нагрева, как показало моделирование, становится параболическим.

Результаты моделирования целесообразно сопоставить с экспериментальными данными работы [8]. В работе [8] нами проводилось управление радиусом кривизны МО посредством термдеформаций. В качестве образца использовалась монокристаллическая пластина XY-среза кристалла KDP толщиной 2 мм, на обратной стороне которой вытравливались пазы в виде одинаковых полос глубиной 1 мм, шириной 2 мм (рис. 3б). Полосы травления заполнялись наполнителем, состоящим из смеси эпоксидной смолы и порошка меди (см. табл. 1).

На рис. 3а показан расчетный профиль поверхности кристалла KDP, который имел параболический вид. Параметры и расположение вставок в расчетах соответствовали параметрам и расположению вставок экспериментально исследуемого образца (рис. 3б). Полученное значение радиуса кривизны поверхности образца  $R = 98$  м при  $\Delta T = 49$  °С с относительной погрешностью 10% совпадало со значением радиуса кривизны, рассчитанным по формуле (1) для КДО.

Особый интерес представляют МО, где в качестве АЭ применяются пьезоэлементы. Нами были проведены расчеты и получены профили поверхностей МО, представляющего собой кристалл KDP с размещенными в нём образцами цирконата-титаната свинца  $Pb(Ti_{0.48}Zr_{0.52})O_3$  (ЦТС). Компоненты тензора пьезоэлектрических модулей  $d_{ij}$  и коэффициенты жёсткости  $C_{\mu\nu}$  для KDP и ЦТС приведены в табл. 2.

Таблица 1

Коэффициенты	KDP	Эпоксидная смола	Наполнитель
$\alpha_1, \alpha_2, 10^{-6}/K$	26.5	65	40
$\alpha_3$	44.4	65	40
$\chi_1, \chi_2, Вт/(м \cdot K)$	1.339	0.19	0.19
$\chi_3$	1.214	0.19	0.19
$C_{11}, C_{33}, 10^{10} Н/м^2$	8.0	3.43	4
$C_{12}$	3.4	3.43	4
$C_{13}$	4.1	3.43	4
$C_{44}$	1.28	3.43	4
$C_{66}$	0.61	3.43	4

Таблица 2

Коэффициенты	KDP	ЦТС
$d_{14}, 10^{-12} Кл/Н$	3.8	0
$d_{36}$	-62	0
$d_{33}$	0	290
$d_{31}$	0	125
$d_{15}$	0	480
$C_{11}, 10^{10} Н/м^2$	8	8
$C_{33}$	8	6.8

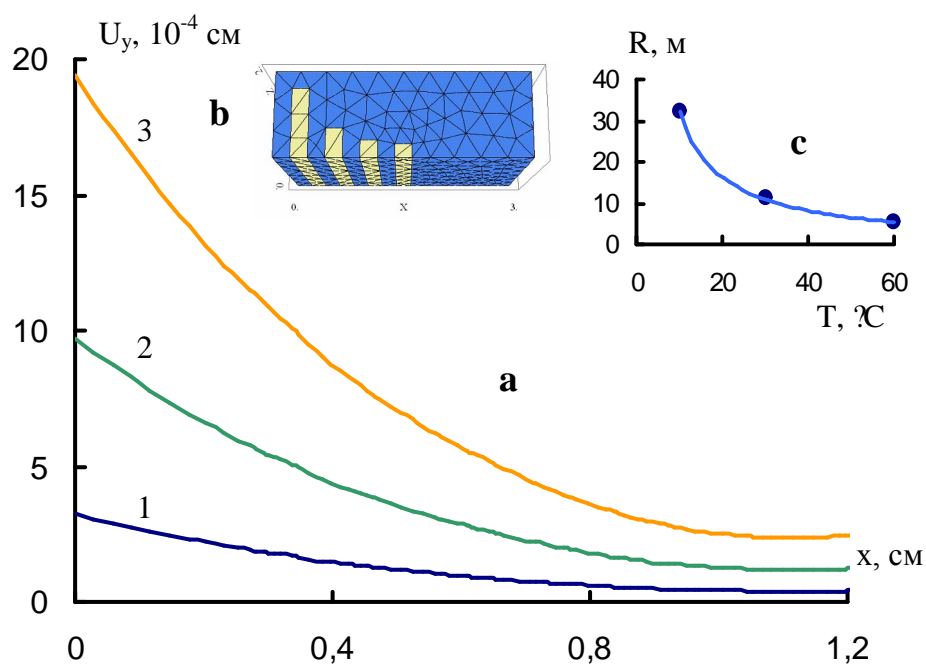


Рис. 1. Профили (а) поверхности модульного образца (б) и зависимости от температуры радиуса кривизны поверхности образца в точке  $x = 0.6$  см (с). Распределение высоты ТЭ изменяется по гиперболическому закону. Кривые 1, 2, 3 соответствуют нагреву до температур 10, 30, 60 °С

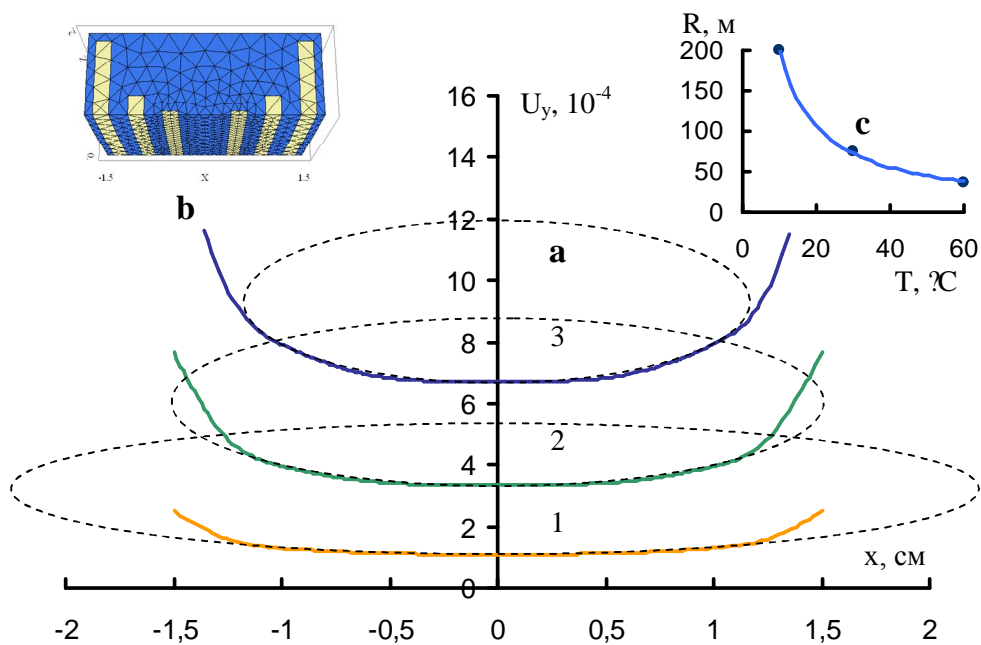


Рис. 2. Профили (а) поверхности модульного образца (б) и зависимости от температуры радиуса кривизны поверхности образца в точке  $x = 0$  см (с). Распределение высоты ТЭ изменяется по эллиптическому закону. Кривые 1, 2, 3 соответствуют нагреву до температур 10, 30, 60 °С

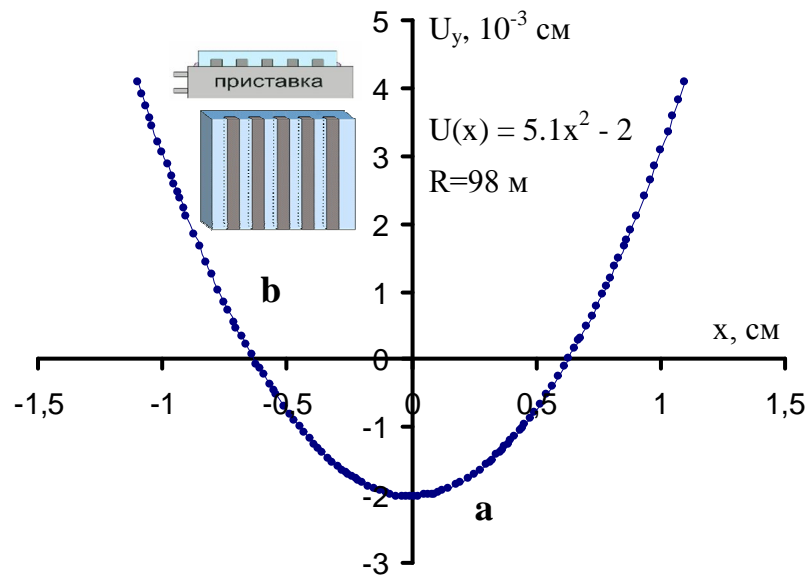


Рис. 3. Расчетный профиль (а) поверхности МО (b), состоящей из монокристалла KDP и ТЭ из эпоксидной смолы при нагреве от 0°C до 49°C

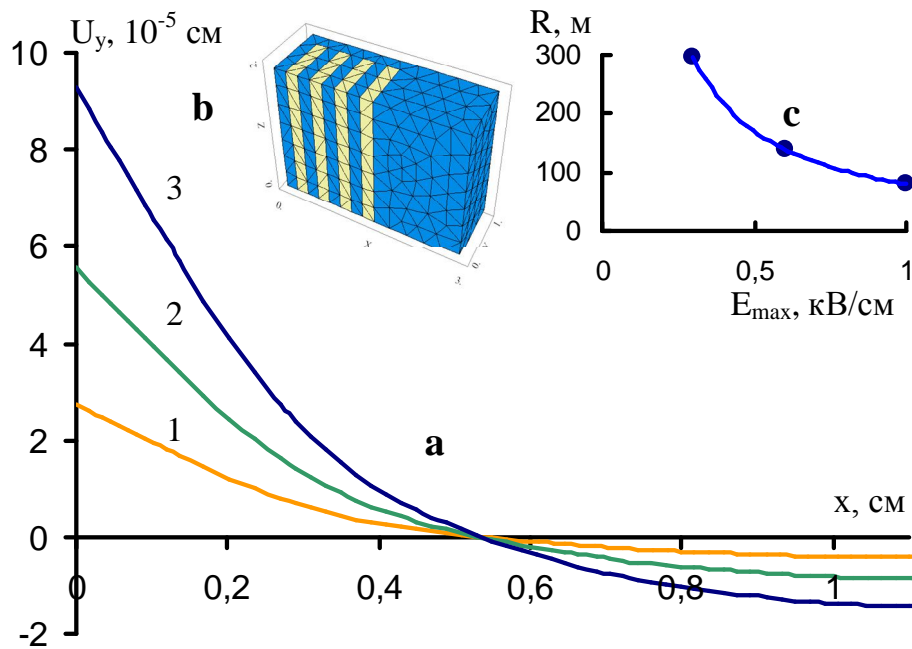


Рис. 4. Профили (а) поверхности модульного образца (b) и зависимость радиуса кривизны поверхности образца в точке  $x = 0.6$  от величины  $E_{\text{max}}$  (с). Вставки находятся в постоянном неоднородном электрическом поле, значение которого изменяется по гиперболическому закону. Кривые 1, 2, 3 соответствуют параметру  $E_{\text{max}}$ , равному 0.3, 0.6 и 1 кВ/см

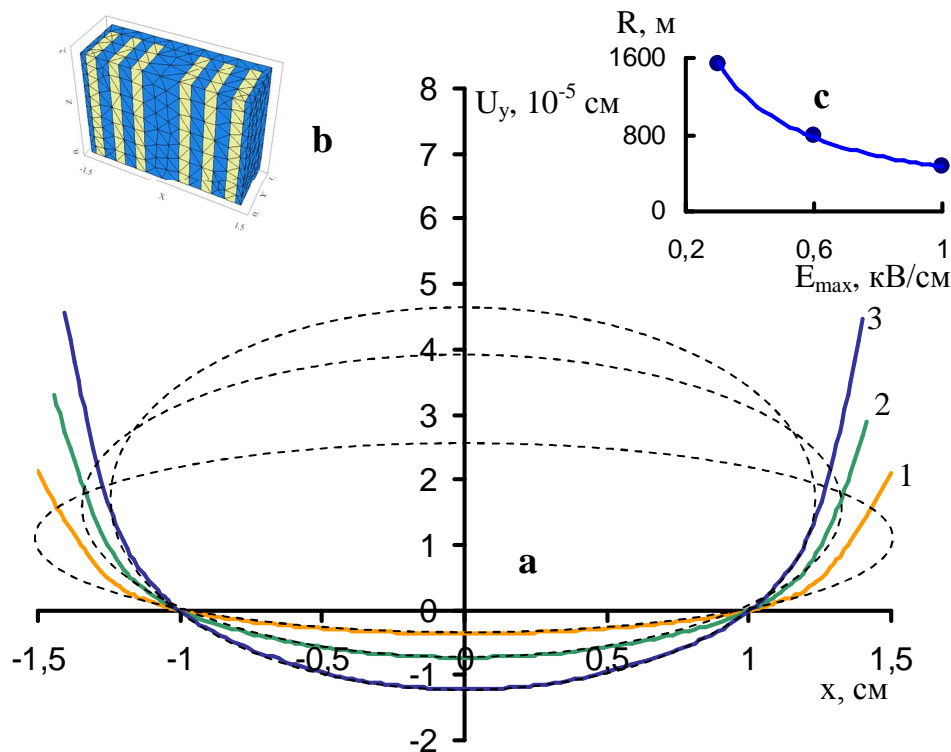


Рис. 5. Профили (а) поверхности модульного образца (б) со вставками, находящимися в постоянном электрическом поле, значение которого изменяется по эллиптическому закону. Кривые 1, 2, 3 поверхности образца (б) соответствуют параметру  $E_{\max}$ , равному 0,3, 0,6 и 1 кВ/см, (с) – зависимости радиуса кривизны поверхности образца в точке  $x = 0$  от величины  $E_{\max}$

Как показали расчеты, наилучшее совпадение профиля поверхности МО с гиперболической, эллиптической или параболической кривой получается в том случае, когда ПЭ имеют одинаковую высоту, а расстояние между ними постоянно. Ориентация вставок выбирается таким образом, чтобы ось  $z$  их кристаллографической системы координат совпадала с осью  $x$  системы координат основания. На каждую вставку подается электрическое поле, вызывающее деформацию растяжения, направленную вдоль основания МО. При получении заданного профиля поверхности МО изначально на вставки подается напряжение, величина которого является функцией координат вставок, т.е. функцией, которой должен соответствовать искомый профиль. Напряженность электрического поля от вставки к вставке изменялась в соответствии с заданной функцией, например гиперболической или эллиптической. Профили поверхности МО в этом случае, так же как при термодетформациях, приобретали гиперболический или эллиптический вид, соответственно.

В модульных пластинах, показанных на рис. 4б и 5б, электрическое поле во вставках

распределено по гиперболическому и эллиптическому законам.

Расчетные кривые, показанные на рис. 4 и 5, хорошо аппроксимируются гиперболами и эллипсами, соответственно. Там же приведены графики зависимости радиусов кривизны гиперболической (рис. 4с) и эллиптической (рис. 5с) поверхностей от значения  $E_{\max}$  в уравнениях:

$$E = E_{\max} \frac{x_0}{x}, \quad (17)$$

$$E = E_{\max} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}} \right). \quad (18)$$

Из характера зависимостей рис. 4с, 5с видно, что наибольшая кривизна наблюдается у поверхностей гиперболического вида (рис. 4а), а наибольший диапазон изменения радиуса кривизны в зависимости от напряжений на ПЭ у эллиптической поверхности (рис. 5а). Эллиптические профили рабочей поверхности на участке  $x \in [-1, 1]$  практически полностью совпадают с вписанными эллипсами, показанными штриховыми линиями. Как и в случае термодетфор-

маций, в центре МО решение является устойчивым в широком диапазоне параметра  $E_{\max}$ .

Таким образом, управление кривизной поверхности МО путем варьирования напряженностей электрических полей в пьезоэлектрических АЭ позволяет получить профили различной формы в образцах с равномерно расположенными вставками одинакового размера.

### Выводы

Проведенные расчеты по формированию профилей кривизны поверхности неоднородных образцов показывают принципиальную возможность корректировки их профилей за счет как изменения температуры данных образцов, так и перераспределения напряжений, подаваемых на вставленные пьезоэлементы.

В первом методе деформирования поверхности расчетный радиус кривизны имеет меньшее значение по сравнению с радиусом кривизны образцов, где в качестве вставок используются пьезоэлементы (см. рис. 1с и 4с, 2с и 5с). Второй метод деформирования является более предпочтительным, поскольку позволяет более гибко изменять форму поверхности образца и автоматизировать процесс коррекции. Основная трудность в технической реализации данного метода заключается в необходимости высокой температурной стабилизации.

Изменение температурных полей в активных элементах тепловым воздействием света (например, световым потоком от мультимедийного проектора или с помощью полупроводникового ИК-лазера) позволит автоматизировать процесс корректировки профиля кривизны модульного образца.

### Список литературы

1. Underwood J.H., Turner D. // Proc. SPIE. 1977. V. 106. P. 125–128.
2. Stedman M. // Workshop on X-ray Instrumentation for Synchrotron Radiation Research / Eds. H. Winick, G. Brown. Stanford Liner Accelerator Center. 1978. SS-RL Report № 78/04. P. VII142.
3. Ахсахалян А.А. и др. // Поверхность. Рентгеновские синхротронные и нейтронные исследования. 2002. № 1. С. 51–54.
4. Ахсахалян А.Д. и др. // Поверхность. Рентгеновские синхротронные и нейтронные исследования. 1999. № 1. С. 162–165.
5. Jiang, et al. US Patent 6421417, July 16, 2002.
6. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 639 с.
7. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Физматлит, 2003. 264 с.
8. Трушин В.Н., Маркелов А.С., Чупрунов Е.В. Управление рентгеновским излучением с использованием воздействия электрических и тепловых полей на дифрагирующий кристалл // Материалы электронной техники. 2007. № 1. С. 76–80.

## CALCULATION OF CURVATURE PROFILE CHANGES OF MODULAR SAMPLES UNDER THE ACTION OF THERMAL AND ELECTRIC FIELDS

*A. V. Markov, V. N. Trushin, M. A. Faddeev, E. V. Zaitseva, E. V. Chuprunov*

The possibility to correct curvature profiles of modular samples (MS) consisting of active elements (AE) and the base is studied. Calculations of two types of MS have been performed, with AE being thermoexpanding elements for the first type, and piezoelements for the second. In the first case, the MS curvature varies due to the thermal deformations regulated by the change of the MS temperature, while in the second case the curvature is controlled by the electric field due to AE piezodeformations. AE parameters are varied according to the dimensions and are positioned along the MS surface. Depending on AE modifying parameters, the MS surface profile takes a parabolic, elliptical, or hyperbolic shape.