

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 531.36:534.1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОБЪЕКТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО УПРУГОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ

© 2008 г.

С.Н. Веричев

Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

s.verichev@infonet.nnov.ru

Поступила в редакцию 30.04.2008

Работа посвящена обзору математических методов исследования устойчивости сосредоточенных объектов, движущихся вдоль распределенных упругих направляющих. Перечисляются основные этапы математического анализа устойчивости колебаний (для случая линейных моделей). Затем, все эти этапы демонстрируются на конкретном примере осциллятора, движущегося вдоль балки Бернулли-Эйлера.

Ключевые слова: упругая направляющая, осциллятор, линейная модель.

Математическая постановка задачи о взаимодействии движущегося объекта с упругой направляющей содержит уравнение в частных производных, описывающее колебания направляющей и уравнение(я) колебаний объекта [1–3]. Эти уравнения динамически связаны в движущейся точке контакта. Связь отражает баланс поперечных сил, действующих в контакте. Для описания динамических условий в контакте, в правую часть уравнения колебаний упругой системы вводится обобщенная дельта-функция Дирака, описывающая положение движущегося объекта и вследствие этого зависящая как от времени, так и от пространственной переменной.

При исследовании подобных уравнений очень удобным является *введение движущейся системы отсчета*, которая сопровождает движущийся объект. В этой системе отсчета дельта-функция перестает зависеть от времени, что позволяет сделать заключение об устойчивости системы в пространстве изображений по Лапласу, не переходя в пространство оригиналов. Далее, *применение интегральных преобразований Фурье по пространственной переменной(ым) и Лапласа по времени* позволяет перейти от системы дифференциальных уравнений в частных производных к системе алгебраических уравнений и в итоге получить характеристическое уравнение для колебаний объекта движущегося по упругой направляющей. По-

скольку устойчивость системы определяется корнями данного уравнения, то дальнейший анализ связан с изучением этих корней. В силу того, что характеристическое уравнение является интегральным (в него входит обратное преобразование Фурье), решение его «в лоб» довольно затруднительно. Поэтому, для исследования корней характеристического уравнения используются *метод D-разбиения и принцип аргумента* [4–6]. Метод D-разбиения, разработанный Ю.И. Неймарком, используется для разделения пространства параметров системы на области с различным числом «неустойчивых» корней (корней с положительной действительной частью). Последующее применение принципа аргумента используется для нахождения числа данных «неустойчивых» корней в одной из полученных областей (для одного набора параметров). Комбинация этих двух методов является очень удачной и может быть использована для исследования различных, в том числе и трехмерных моделей [7, 8].

Рассмотрим последовательно применение данных методов на простом примере одномассового осциллятора массы m и жесткости k , равномерно и безотрывно движущегося вдоль балки Бернулли-Эйлера [9–13] (см. рис. 1). Данная задача позволит наглядно продемонстрировать вышеупомянутые этапы математического анализа устойчивости рассматриваемых систем.

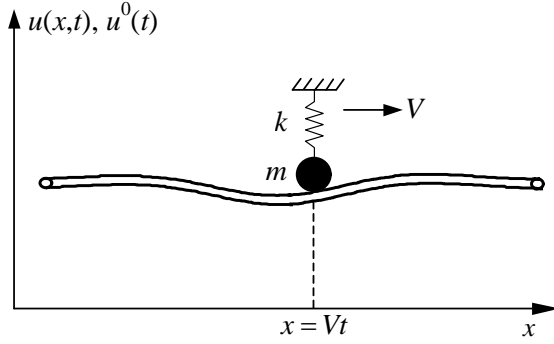


Рис. 1. Равномерное движение одномассового осциллятора вдоль балки Бернулли-Эйлера

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\rho F u_{tt} + E I u_{xxxx} = -\delta(x-Vt) \left(m \frac{d^2 u^0}{dt^2} + k u^0 \right) \quad (1)$$

$$u^0(t) = u(Vt, t), \quad \lim_{|x-Vt| \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty.$$

Здесь $u^0(t)$ и $u(x, t)$ – вертикальное отклонение массы m и поперечное смещение балки соответственно; E – модуль Юнга; ρ и I – погонная плотность материала балки и момент инерции сечения балки на поворот; F – площадь поперечного сечения балки; k – жесткость осциллятора; $\delta(\dots)$ – дельта-функция. Заметим, что частные производные в первом уравнении системы (1) являются обобщенными производными.

Введем движущуюся систему отсчета $\{\xi = x - Vt, t = t\}$. В этой системе уравнения (1) примут вид

$$\rho F (u_{tt} - 2V u_{t\xi} + V^2 u_{\xi\xi}) + E I u_{\xi\xi\xi\xi} = -\delta(\xi) \left(m \frac{d^2 u(0, t)}{dt^2} + k u(0, t) \right). \quad (2)$$

Как видно из (2), переход в движущуюся систему координат позволяет уменьшить число полевых переменных путем исключения из уравнений смещения массы u^0 , а также избавиться от временной зависимости в аргументе дельта-функции.

Следующий шаг – применение интегральных преобразований Фурье и Лапласа по переменным ξ и t :

$$\{\tilde{u}_s(\xi, s)\} = \int_0^\infty \{u(\xi, t)\} \exp(-st) dt, \\ \{\tilde{u}_{k_B, s}(k_B, s)\} = \int_{-\infty}^\infty \{\tilde{u}_s(\xi, s)\} \exp(-ik_B \xi) d\xi. \quad (3)$$

Это позволяет перейти от дифференциального уравнения в частных производных (2) к алгебраическому уравнению:

$$\left(\rho F (s^2 - 2ik_B sV - V^2 k^2) + E I k_B^4 \right) \tilde{u}_{k_B, s} = - (ms^2 + k) \tilde{u}_s(0, s), \quad (4)$$

которое может быть переписано в виде

$$D(k, s) \tilde{u}_{k, s} = - (ms^2 + k) \tilde{u}_s(0, s), \\ D(k, s) =$$

$$\left(\rho F (s^2 - 2ik_B sV - V^2 k_B^2) + E I k^4 \right). \quad (5)$$

Для нахождения замкнутого уравнения относительно фурье-образа смещения массы $\tilde{u}(0, s)$ применим к (4) обратное преобразование Фурье по волновому числу k_B . Полагая в полученном уравнении $\xi = 0$, придем к следующему уравнению:

$$\tilde{u}(0, s) \left(ms^2 + k + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{D(k, s)} \right)^{-1} \right) = 0 \\ \Rightarrow ms^2 + k + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{D(k, s)} \right)^{-1} = 0. \quad (6)$$

Последнее уравнение в (6) представляет собой характеристическое уравнение колебаний осциллятора, равномерно и безотрывно движущегося вдоль балки. Корни этого уравнения определяют устойчивость системы. Достаточным условием возникновения неустойчивости вертикальных колебаний осциллятора является наличие хотя бы у одного корня характеристического уравнения (6) положительной действительной части. Легко видеть, что данное уравнение является интегральным по отношению к переменной Лапласа s , и найти его комплексные корни крайне сложно. Поэтому для дальнейшего исследования удобно использовать метод D -разбиения по одному комплексному параметру. Идея метода состоит в отображении мнимой оси комплексной плоскости (s) на плоскость системных параметров, которые временно будут рассматриваться как комплексные. Закон отображения следует из характеристического уравнения, которое должно быть переписано таким образом, чтобы выразить выбранный параметр явно. Полученная посредством данного отображения линия разделяет пространство параметров на области с различным числом корней характеристического уравнения, имеющих положительную действительную часть. Чтобы отобразить мнимую ось s -плоскости на плоскость некоторого комплексного параметра,

например k (забудем на время о его физическом смысле), необходимо подставить $s = i\Omega$ в уравнение (6) и затем, используя это уравнение как закон отображения, проварьировать Ω от $-\infty$ до $+\infty$. Согласно (6) закон отображения на комплексную плоскость (k) имеет вид

$$k = m\Omega^2 - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{D(k, \Omega)} \right)^{-1}. \quad (7)$$

Взаимное расположение кривых D -разбиения на комплексной плоскости (k) показано на рис. 2. Как видно из рисунка, возможно два типичных расположения данных кривых. Левый рисунок соответствует случаю, когда скорость осциллятора не превышает минимальную фазовую скорость волн в балке $\left(V < V_{\min}^{\phi} = 2 \left(\frac{k EI}{m \rho A} \right)^{1/4} \right)$, правый же соответствует так называемому «закритическому» движению со скоростью $V > V_{\min}^{\phi}$. Таким образом, осуществив отображение (7), мы получили разбиение комплексной плоскости (k) на области с различным числом корней характеристического уравнения (6), имеющих положительную действительную часть. Штриховка на линиях D -разбиения показывает направление перехода из левой в правую полуплоскость комплексной плоскости (s). При пересечении кривых D -разбиения в направлении штриховки число N корней характеристического уравнения с положительной действительной частью (число неустойчивых корней) увеличивается на единицу.

Рис. 2а показывает, что при «докритическом» движении осциллятора ($V < V_{\min}^{\phi}$) устойчивость системы не зависит от жесткости осциллятора (жесткость осциллятора отражена положительной полуосью оси $\text{Re } k$). Напротив, при закритическом движении, как видно из рис. 2б, существует критическая жесткость осциллятора $k = k^*$. При переходе k через это значение (в направлении возрастания жесткости), количество корней с положительной действительной частью уменьшается на 2.

Итак, с помощью метода D -разбиения, мы ответили на вопрос: зависит ли количество корней характеристического уравнения с $\text{Re } s > 0$ от жесткости осциллятора, и если да, то каким образом. Для завершения анализа задачи нужно определить число N таких корней для произвольного набора параметров задачи. Это удобно сделать с помощью **принципа аргумента**. Для его применения уравнение (6) должно быть рассмотрено как некая функция комплексного аргумента $P(s)$:

$$P(s) = ms^2 + k + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{D(k, s)} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Далее, на плоскости (s) необходимо выбрать замкнутый контур, и отобразить его на комплексную плоскость P , используя s как параметр. Таким образом, можно получить на плоскости (P) замкнутый контур, число вращений которого в положительном направлении вокруг начала координат равно разнице между числом корней уравнения $P(s) = 0$ и числом

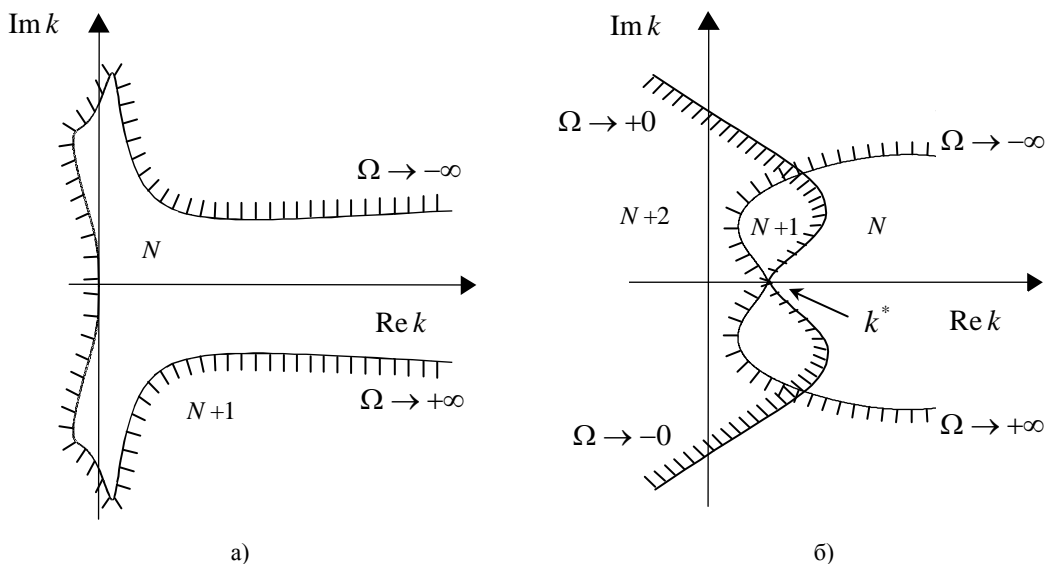


Рис. 2. D -разбиение по комплексному параметру k

полюсов данного уравнения, лежащих внутри выбранного контура. Для определения количества корней с положительной действительной частью, контур на плоскости s необходимо выбрать в виде полуокружности, представленной на рис. 3.

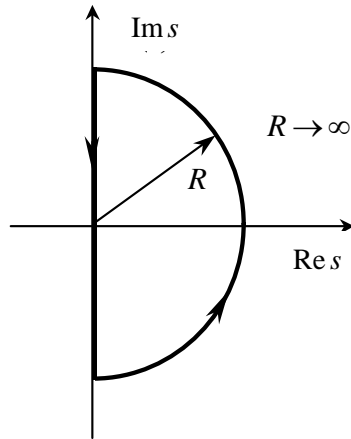


Рис. 3. Контур на комплексной плоскости s , используемый для принципа аргумента

кости P равно числу корней характеристического уравнения с $\text{Re } s > 0$.

Применение принципа аргумента к отображению (8) показывает, что в «докритическом» режиме, при $k > 0$ контур $P(s)$, определяемый выражением (8), не включает в себя начало координат комплексной плоскости P . Это означает, что на рис. 2а $N = 0$, т.е. колебания осциллятора в «докритическом» режиме всегда устойчивы. Напротив, в закритическом режиме, при $0 < k < k^*$, контур $P(s)$ дважды обходит начало координат (см. рис. 4). Из этого следует, что на рис. 2б, $N + 2 = 2 \Rightarrow N = 0$, т.е. колебания осциллятора в «закритическом» режиме устойчивы при $k > k^*$ и неустойчивы при $0 < k < k^*$.

Таким образом, применение принципа аргумента завершает математическую процедуру анализа устойчивости колебаний системы движущийся осциллятор — балка.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта

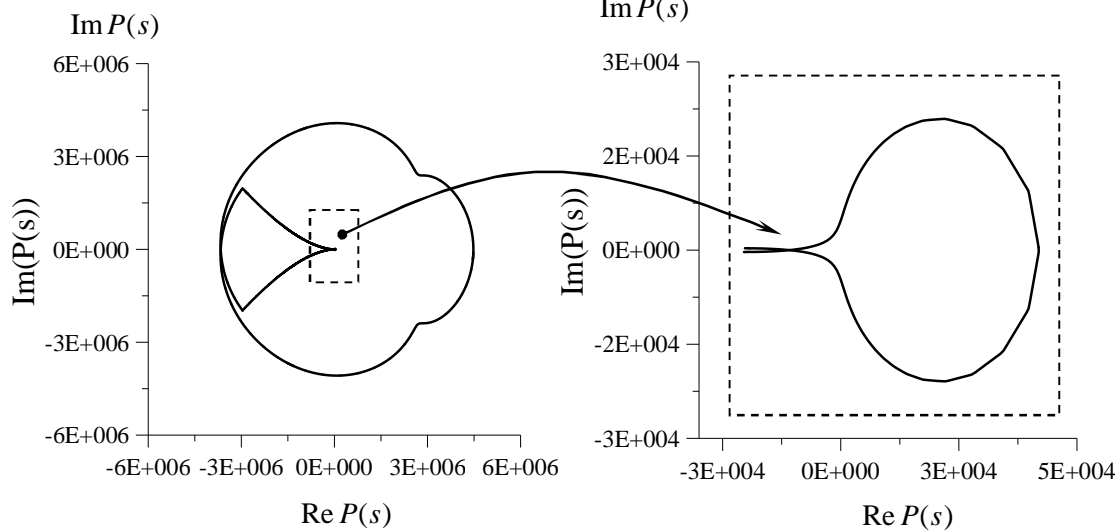


Рис. 4. Кривая в плоскости $(\text{Im } P(s), \text{Re } P(s))$, полученная с помощью принципа аргумента для «закритического» случая движения осциллятора для области $0 < k < k^*$. Данная кривая дважды обходит начало координат. Это означает, что количество «неустойчивых» корней в данной области $N = 2$

Данный контур должен быть выбран таким образом, чтобы он лежал в правой полуплоскости комплексной плоскости s и имел достаточно большой радиус, чтобы включать в себя все корни и полюса уравнения $P(s) = 0$. Легко показать, что уравнение $P(s) = 0$ не имеет полюсов в полуплоскости $\text{Re } s > 0$ и, следовательно, число вращений контура на комплексной плос-

РФФИ, № 08-08-97057-р_поволжье_а.

Список литературы

1. Метрикин А.В. Постановка задачи о взаимодействии движущегося точечного объекта и упругой направляющей с использованием обобщенных функций // Волновые задачи механики: Сб. научн. трудов. Нижний Новгород, 1994. С. 32–37.

2. Весницкий А.И., Каплан Л.Э., Уткин Г.А. Вывод естественных граничных условий для одномерных задач динамики с движущимися нагрузками и закреплениями // Дифференциальные и интегральные уравнения. 1982. С. 75–80.
3. Весницкий А.И., Каплан Л.Э., Уткин Г.А. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47. С. 863–866.
4. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
5. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968.
6. Verichev S.N., Metrikine A.V. Instability of a moving bogie on a flexibly supported Timoshenko beam // J. of sound and vibrations. 2001. V. 253. P. 653–668.
7. Verichev S.N. Instability of a vehicle moving on an elastic structure // Delft University press. 2002. P. 192.
8. Metrikine A.V., Verichev S.N., Blaauwendraad J. Stability of a two-mass oscillator moving on a beam supported by a visco-elastic half-space // International Journal of Solids and Structures. 2005. V. 42. P. 1187–1207.
9. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Кугушева Е.К. К задаче об устойчивости одномерных безграничных систем // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49. С. 691–696.
10. Крысов С.В. Вынужденные колебания и резонанс в упругих системах с движущимися нагрузками: Учебное пособие. Горький: Изд-во ГГУ, 1985.
11. Лисенкова Е.Е. Некоторые общие соотношения для упругих волн, возбуждаемых в направляющей для движущимся объектом // Волновые задачи механики: Сб. статей. Нижний Новгород: Нф ИМАШ РАН, 1991. С. 44–52.
12. Метрикин А.В. Неустойчивость поперечных колебаний объекта, равномерно движущегося вдоль упругой направляющей как следствие аномального эффекта Доплера // Акустический журнал. 1994. Т. 40. № 1. С. 99–103.
13. Метрикин А.В. Резонанс в системе упругая направляющая – движущийся осциллятор // Акустический журнал. 1994. Т. 40. № 6. С. 974–978.

MATHEMATICAL METHODS TO STUDY THE STABILITY OF AN OBJECT MOVING ALONG AN ELASTIC GUIDE

S.N. Verichev

Mathematical methods used to study the stability of lumped objects moving along distributed elastic guides have been reviewed. The main stages of mathematical analysis of the stability of an object moving along an elastic guide are listed (for the case of linear models). All these stages are then demonstrated by the example of an oscillator moving along an Euler-Bernoulli beam.