МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ГУРСА–ДАРБУ С ВОЗМУЩАЕМЫМИ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ И ГРАНИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

И.В. Лисаченко

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

i_lisach@mail.ru

Поступила в редакцию 01.07.2008

Приводятся достаточные условия сохранения глобальной разрешимости нелинейной задачи Гурса–Дарбу при возмущении правой части дифференциального уравнения и граничных функций. Изучается случай, когда решение задачи имеет смысл искать в классе абсолютно непрерывных функций с суммируемыми в степени $p > 1$ смешанной производной и первыми частными производными.

Ключевые слова: нелинейная задача Гурса–Дарбу, граничная функция, разрешимость.

Управляемая задача Гурса–Дарбу занимает особое место в теории оптимального управления распределенными системами. На протяжении многих лет она фактически является «пробным камнем» этой теории (см., например, [1–21] и библиографию в [11] и [16]).

В статье рассматривается нелинейная задача Гурса–Дарбу общего вида. Обсуждаются достаточные условия сохранения глобальной разрешимости этой задачи при возмущении правой части дифференциального уравнения и граничных функций. Первые подобные условия для задачи Гурса–Дарбу были получены в [2, 3], где рассматривались решения с ограниченными смешанной и первыми частными производными, граничные функции предполагались фиксированными, а правая часть дифференциального уравнения возмущалась с помощью распределенного управления, стандартным образом входящего под знак функции правой части. В [12] результаты [2, 3] были распространены на более общего вида возмущения правой части и возмущения граничных функций[1].

Ниже мы остановимся на том случае, когда имеет смысл рассматривать решения задачи Гурса–Дарбу, имеющие суммируемые в некоторой степени p смешанную и первые частные производные. Ему в последнее время уделяется особое внимание в теории оптимизации управляемых систем типа Гурса–Дарбу (см., например, [15, 17, 18, 21]). Для этого случая в [22–25] получены достаточные условия сохранения глобальной разрешимости задачи Гурса–Дарбу при возмущении управления, входящего под знак правой части дифференциального уравнения. Отметим, что этот случай допускает различные естественные варианты условий на правую часть дифференциального уравнения и граничные функции, каждому из которых соответствуют, вообще говоря, свои достаточные условия сохранения глобальной разрешимости задачи Гурса–Дарбу. Эти варианты различаются между собой, в частности, свойствами операторов суперпозиции, задаваемых функцией правой части дифференциального уравнения и ее производными по «фазовым» переменным «решение», «производная решения по первой независимой переменной», «производная решения по второй независимой переменной» Так, в [24, 25] изучается вариант, в котором указанные операторы суперпозиции определены на прямых произведениях пространств типа L_∞ и L_p (в рассматриваемом случае решение заведомо принадлежит L_∞, а его первые частные производные лежат в L_p). В то же время понятно, что если производные граничных функций и смешанная производная решения задачи Гурса–Дарбу суммируемы в степени p, то первые частные производные решения автоматически принадлежат существенно более узким, чем L_p, лебеговым пространствам со смешанной нормой (о таких пространствах см., например, в [26]). Поэтому в настоящей статье изучается вариант, когда упомянутые операторы суперпозиции могут быть определены лишь на прямых произведениях пространств типа L_∞ и некоторых лебеговых пространств со смешанной нормой, естественным образом связанных с задачей Гурса–Дарбу.

Формулируемые ниже результаты получены с помощью аппарата вольтерровых функциональных уравнений в лебеговых пространствах [27, 28]. Некоторые результаты статьи были анонсированы в [29].

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Гурса–Дарбу

$$x''_{t_1t_2}(t) = g(t, x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t)), \qquad (1)$$

$$t = \{t_1, t_2\} \in \Pi \equiv [0,1]^2,$$

$$x(t_1, 0) = \varphi_1(t_1), t_1 \in [0,1],$$

$$x(0, t_2) = \varphi_2(t_2), t_2 \in [0,1], \qquad (2)$$

где $g(t, l_1, l_2, l_3) \equiv g(t, l) : \Pi \times \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ ($l = \{l_1, l_2, l_3\}$) и $\varphi_1(t_1)$, $\varphi_2(t_2) : [0,1] \to \mathrm{R}$ – функции, свойства которых мы сейчас опишем.

В задаче (1), (2) допустимы любые наборы функций g, φ_1, φ_2 из вводимого ниже класса Ψ. Этот класс состоит из всех тех троек $\psi = \{g, \varphi_1, \varphi_2\}$, каждая из которых удовлетворяет выписанным далее условиям a), b), c). Сформулируем первое из этих условий.

a) Функции φ_1, φ_2 абсолютно непрерывны, причем $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, а $\varphi'_1, \varphi'_2 \in L_p([0,1])$ при заданном $p \in (1, \infty)$. Формулой

$$f(t, l_1, l_2, l_3) \equiv f(t, l) \equiv g(t, l_1 + \varphi_1(t_1) +$$
$$+ \varphi_2(t_2), l_2 + \varphi'_1(t_1), l_3 + \varphi'_2(t_2)), \qquad (3)$$
$$t \in \Pi, l = \{l_1, l_2, l_3\} \in \mathrm{R}^3$$

задается функция, дифференцируемая по l для почти всех $t \in \Pi$, а вместе с производной $f'_l(t, l)$ измеримая по t при любом $l \in \mathrm{R}^3$ и непрерывная по l для почти всех $t \in \Pi$.

Чтобы сформулировать условия b), c), введем обозначения для интегральных операторов:

$$A_1[z](t) \equiv \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$A_2[z](t) \equiv \int_0^{t_2} z(t_1, \xi) d\xi,$$

$$A_3[z](t) \equiv \int_0^{t_1} z(\xi, t_2) d\xi,$$

$$A[z](t) \equiv \{A_1[z](t), A_2[z](t), A_3[z](t)\},$$

$t \in \Pi, z \in L_p$. Нам удобно обозначить через $L_q(t_i)$, $1 \le q \le \infty$, пространство $L_q[0,1]$ функций переменной t_i, $i = 1, 2$.

Обозначим через $L_p(t_1)[L_\infty(t_2)]$, $L_p(t_2) \times [L_\infty(t_1)]$, $L_\infty(t_1)[L_p(t_2)]$, $L_\infty(t_2)[L_p(t_1)]$ пространства измеримых на Π функций $z(\cdot)$ со смешанной нормой, нормы в которых определяются соответственно формулами

$$\|z\|_{L_p(t_1)[L_\infty(t_2)]} = \Big(\int_0^1 \operatorname*{vraisup}_{t_2 \in [0,1]} |z(t)|^p \, dt_1\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|z\|_{L_p(t_2)[L_\infty(t_1)]} = \Big(\int_0^1 \operatorname*{vraisup}_{t_1 \in [0,1]} |z(t)|^p \, dt_2\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|z\|_{L_\infty(t_1)[L_p(t_2)]} = \operatorname*{vraisup}_{t_1 \in [0,1]} \Big(\int_0^1 |z(t)|^p \, dt_2\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|z\|_{L_\infty(t_2)[L_p(t_1)]} = \operatorname*{vraisup}_{t_2 \in [0,1]} \Big(\int_0^1 |z(t)|^p \, dt_1\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Для сокращения записи положим[2]

$$M_1(\Pi) \equiv L_\infty(\Pi),$$
$$M_2(\Pi) \equiv L_p(t_1)[L_\infty(t_2)],$$
$$M_3(\Pi) \equiv L_p(t_2)[L_\infty(t_1)],$$
$$M(\Pi) \equiv M_1(\Pi) \times M_2(\Pi) \times M_3(\Pi),$$
$$M'_1(\Pi) \equiv L_p(\Pi),$$
$$M'_2(\Pi) \equiv L_\infty(t_1)[L_p(t_2)],$$
$$M'_3(\Pi) \equiv L_\infty(t_2)[L_p(t_1)],$$
$$M'(\Pi) \equiv M'_1(\Pi) \times M'_2(\Pi) \times M'_3(\Pi).$$

Пусть $\Sigma \equiv \Sigma(\Pi)$ – σ-алгебра всех измеримых по Лебегу множеств $H \subset \Pi$; $S(H)$ — класс измеримых на H функций, $H \in \Sigma$; $Q_H : S(H) \to S(\Pi)$ — оператор «продолжения нулем», задаваемый формулой

$$Q_H[z](t) \equiv \{z(t), t \in H; 0, t \in \Pi \setminus H\}.$$

Обозначим через $M_i(H)$ класс тех функций $z(\cdot) \in S(H)$, для каждой из которых $Q_H[z] \in M_i(\Pi)$, $i = 2, 3$. Очевидно, что $M_i(H)$ — линейное функциональное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число, $i = 2, 3$. Введем в $M_i(H)$ норму формулой

$$\|z\|_{M_i(H)} \equiv \|Q_H[z]\|_{M_i(\Pi)}, i = 2, 3.$$

Пусть $M'_i(H)$— класс тех функций $z(\cdot) \in S(H)$, для каждой из которых $Q_H[z] \in M'_i(\Pi)$, $i = 2, 3$. В линейном функциональном пространстве $M_i'(H)$ введем норму формулой

$$\|z\|_{M_i'(H)} \equiv \|Q_H[z]\|_{M_i'(\Pi)},\ i=2,\ 3.$$

При $H=\Pi$ значок Π в обозначениях будем, как правило, опускать, то есть вместо $L_p(\Pi)$, $M_i(\Pi)$, $M_i'(\Pi),\ldots$ будем писать соответственно L_p, M_i, $M_i',\ldots$. Заметим, что оператор A принадлежит классу $L(L_p,M)^3$.

Сформулируем теперь условия b) и c), определяющие вместе с условием a) класс Ψ допустимых в задаче (1), (2) троек $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}$. В условиях b) и c) указаны требования, которым для каждой такой тройки должна удовлетворять функция $f(t,l):\Pi\times\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}$, задаваемая формулой (3) из условия a).

b) Формула $\mathrm{f}[y](t)\equiv f(t,y(t))$, $y\in M$, $t\in\Pi$ определяет оператор

$$\mathrm{f}[\cdot]:M\to L_p.$$

c) Формула $\mathrm{f}_1[y](t)\equiv f_l'(t,y(t))$, $y\in M$, $t\in\Pi$ определяет ограниченный оператор

$$\mathrm{f}_1[\cdot]:M\to M'.$$

Точнее, существует функция $n(\cdot):\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}_+$ такая, что

$$\|\mathrm{f}_1[y]\|_{M'}\le n(m) \text{ при } m\ge\|y\|_M.$$

Функцию $n(m)$ без ограничения общности будем считать неубывающей.

Если $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}\in\Psi$, то решение задачи Гурса–Дарбу (1), (2) естественно искать в классе $W_\psi(\Pi)$ удовлетворяющих условиям (2) абсолютно непрерывных на Π функций с первыми производными по t_1 и t_2, соответственно, из M_2 и M_3 и второй смешанной производной из L_p[4]. Функцию x указанного класса назовем отвечающим тройке $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}\in\Psi$ глобальным решением задачи (1), (2), если она обращает уравнение (1) в тождество почти всюду на Π. Пусть Ψ_0 — та часть Ψ, каждому элементу которой отвечает глобальное решение задачи (1), (2).

Пусть T — система всех множеств $H_c\equiv\{t\in\Pi:t_1+t_2\le c\}$, $c\in[0,2]$. Для $H\in T$ через $W_\psi(H)$ обозначим множество всех сужений на H функций класса $W_\psi(\Pi)$, $\psi\in\Psi$. Функцию $x\in W_\psi(H)$, $H\in T$ назовем отвечающим тройке $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}\in\Psi$ решением задачи (1), (2) на множестве H, если она обращает уравнение (1) в тождество почти всюду на H. Если $H\in T$, но $H\ne\Pi$, то решения на множестве H будем называть локальными решениями задачи (1), (2).

Основные теоремы

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1. *Каково бы ни было $H\in T$, любой тройке $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}\in\Psi$ не может отвечать на множестве H более одного решения задачи* (1), (2).

Таким образом, Ψ_0 – та часть Ψ, каждому элементу которой отвечает ровно одно глобальное решение задачи (1), (2).

Чтобы сформулировать теорему существования локального решения задачи (1), (2), примем дополнительные соглашения и обозначения. Следуя [8], будем называть некоторый оператор F, действующий из L_p в пространство измеримых на Π вектор-функций, вольтерровым на системе множеств T, если для любого $H\in T$ сужение $F[z]\|_H$ не зависит от значений $z(t)$ при $t\in\Pi\setminus H$. Оператор $A:L_p\to M$ является вольтерровым на системе множеств T в указанном смысле. Это означает, что

$$\forall H\in T:\{z_1,z_2\in L_p:z_1(t)\equiv z_2(t),t\in H\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{A[z_1](t)\equiv A[z_2](t),t\in H\}.$$

Свойство вольтерровости оператора A позволяет принять следующее соглашение: для любого $H\in T$ считаем оператор A определенным на $L_p(H)$ формулой

$$A[z](t)\equiv AQ_H[z](t),t\in H,z\in L_p(H).$$

Очевидно, что $A\in L(L_p(H),M(H))$ для любого $H\in T$. Введем обозначение:

$$\sigma(\psi,H,m,\hat z)\equiv\|A[f(\cdot,A[\hat z](\cdot))-\hat z]\|_{M(H)}+$$

$$+mn\left(\|A[\hat z]\|_M+m\right)\|A\|_{L_p(H)\to M(H)},$$

где $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}\in\Psi$, $H\in T$, $m\in R_+$, $\hat z\in L_p$.

Теорема 2. *Если тройка $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}\in\Psi$ и множество $H\in T$ таковы, что существуют положительное число m и функция $\hat z\in L_p$, при которых выполняется неравенство*

$$\sigma(\psi,H,m,\hat{z})<m,$$

то тройке ψ *отвечает на множестве* H *единственное решение* x_* *задачи* (1), (2), *причем*

$$\left\|A[x''_{*t_1t_2}-\hat{z}]\right\|_{M(H)}\le\sigma(\psi,H,m,\hat{z}).$$

Сформулируем для задачи (1), (2) достаточные условия сохранения глобальной разрешимости при возмущении правой части уравнения (1) и граничных функций (2). Пусть x_0 — глобальное решение задачи (1), (2), отвечающее $\psi_0=\{g_0,\varphi_{01},\varphi_{02}\}\in\Psi_0$. Для $\psi\in\Psi$ положим:

$$R(\psi,\psi_0)\equiv\left\|A[\Delta(\psi,\psi_0)]\right\|_M,$$

где

$$\Delta(\psi,\psi_0)=g(t,x_0+\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_2,x'_{0t_1}+\Delta\varphi'_1,$$
$$x'_{0t_2}+\Delta\varphi'_2)-g_0(t,x_0,x'_{0t_1},x'_{0t_2}),$$
$$\Delta\varphi_i\equiv\varphi_i(t_i)-\varphi_{0i}(t_i),i=1{,}2.$$

Теорема 3. *Для любой* $\psi_0=\{g_0,\varphi_{01},\varphi_{02}\}\in\in\Psi_0$ *существует* $\delta>0$ *такое, что если некоторое* $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}\in\Psi$ *удовлетворяет условию*

$$R(\psi,\psi_0)<\delta,$$

то $\psi\in\Psi_0$.

Справедлива также следующая теорема об оценке разности отвечающих разным тройкам решений задачи Гурса–Дарбу.

Теорема 4. *Для любой* $\psi_0=\{g_0,\varphi_{01},\varphi_{02}\}\in\in\Psi_0$ *и любого положительного числа* m_0 *существует* $C>0$ *такое, что если* $\psi\in\Psi_0$ *и выполняется неравенство*

$$\left\|x-x_0\right\|_C+\left\|x'_{t_1}-x'_{0t_1}\right\|_{M_2}+\left\|x'_{t_2}-x'_{0t_2}\right\|_{M_3}\le m_0,$$

где x *– решение задачи* (1), (2), *отвечающее* $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}$, *то*

$$\left\|x''_{t_1t_2}-x''_{0t_1t_2}\right\|_{L_p}\le C\left\|\Delta(\psi,\psi_0)\right\|_{L_p},$$

$$\left\|x-x_0\right\|_C+\left\|x'_{t_1}-x'_{0t_1}\right\|_{M_2}+\left\|x'_{t_2}-x'_{0t_2}\right\|_{M_3}\le$$
$$\le CR(\psi,\psi_0).$$

Доказательства

Сформулированные теоремы можно доказать подобно тому, как доказываются сходные теоремы в [24, 25], приводя задачу (1), (2) к эквивалентному интегральному уравнению в L_p. Отметим лишь главные моменты.

Выберем произвольно $\psi\in\Psi$, возьмем соответствующую этой тройке ψ по формуле (3) функцию f и рассмотрим интегральное уравнение

$$z(t)=f(t,A[z](t))\tag{4}$$

при $z\in L_p$, $t\in\Pi$. Функцию $z\in L_p$ назовем отвечающим тройке ψ глобальным решением уравнения (4), если она обращает (4) в тождество почти всюду на Π. Аналогично вводится понятие отвечающего тройке $\psi\in\Psi$ решения уравнения (4) на множестве $H\in T$. Именно, функцию $z\in L_p(H)$, $H\in T$ назовем отвечающим $\psi\in\Psi$ локальным решением уравнения (4), если она обращает (4) в тождество почти всюду на H.

Уравнение (4) эквивалентно задаче (1), (2). Действительно, при любых $H\in T$ и $\psi\in\Psi$ между классами функций $W_\psi(H)$ и $L_p(H)$ существует взаимно-однозначное соответствие, устанавливаемое формулой

$$x(t)=\varphi_1(t_1)+\varphi_2(t_2)+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}z(\xi)d\xi,t\in H,\tag{5}$$

где $x\in W_\psi(H)$, $z\in L_p(H)$. Подстановка (5) приводит задачу (1), (2) к уравнению (4) на множестве $H\in T$. Наоборот, если при некотором $\psi\in\Psi$ функция $z(\cdot)\in L_p(H)$ — решение уравнения (4) на $H\in T$, то функция $x(t)$, $t\in H$, задаваемая формулой (5), принадлежит классу $W_\psi(H)$ и является решением задачи (1), (2) на H.

Переформулируем теоремы предыдущего раздела в терминах уравнения (4). Начнем с теоремы единственности. Следующая теорема эквивалентна теореме 1.

Теорема 5. *Каково бы ни было* $H\in T$, *любой тройке* $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}\in\Psi$ *не может отвечать на множестве* H *более одного решения уравнения* (4).

Теорема 5 доказывается с помощью обобщенной леммы Гроноулла (см., например, [22], [24]), которая является частным случаем теоремы 1.9.3 из [30].

Следующая теорема существования эквивалентна теореме 2.

Теорема 6. *Если* $\psi=\{g,\varphi_1,\varphi_2\}\in\Psi$ *и множество* $H\in T$ *таковы, что существуют по-*

ложительное число m *и функция* $\hat{z} \in L_p$, *при которых выполняется неравенство*

$$\sigma(\psi, H, m, \hat{z}) < m,$$

то тройке ψ *отвечает на множестве* H *единственное решение* z_* *уравнения* (4), *причем*

$$\|A[z_* - \hat{z}]\|_{M(H)} \le \sigma(\psi, H, m, \hat{z}).$$

Доказательство теоремы 6 может быть проведено с помощью принципа сжимающих отображений и леммы об эквивалентных нормах (см., например, лемму 4.1 в [22] или лемму 4.2 в [24]), доказанной в [28] и развивающей известные утверждения об эквивалентной норме из §2 главы 2 книги [31].

Сформулируем теорему об условиях сохранения глобальной разрешимости уравнения (4), которая эквивалентна теореме 3.

Пусть

$$r(f, f_0) \equiv \|A[\Delta(f, f_0)]\|_M,$$

где

$$\Delta(f, f_0) = f(t, A[z_0](t)) - f_0(t, A[z_0](t)),$$

z_0 — глобальное решение уравнения (4), отвечающее $\psi_0 = \{g_0, \varphi_{01}, \varphi_{02}\}$,

$$f_0(t, l_1, l_2, l_3) = g_0\big(t, l_1 + \varphi_{01}(t_1) + \varphi_{02}(t_2), l_2 + \varphi'_{01}(t_1), l_3 + \varphi'_{02}(t_2)\big),$$

$$f(t, l_1, l_2, l_3) = g(t, l_1 + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), l_2 + \varphi'_1(t_1), l_3 + \varphi'_2(t_2)),$$

$$\psi = \{g, \varphi_1, \varphi_2\} \in \Psi.$$

Теорема 7. *Для любой* $\psi_0 = \{g_0, \varphi_{01}, \varphi_{02}\} \in \Psi_0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что если некоторое* $\psi = \{g, \varphi_1, \varphi_2\} \in \Psi$ *удовлетворяет условию*

$$r(f, f_0) < \delta,$$

то $\psi \in \Psi_0$.

Теорема 7 может быть доказана методом продолжения отвечающего тройке ψ локального решения уравнения (4) вдоль конечной цепочки $\{H_{c_0}, H_{c_1}, \ldots, H_{c_k}\}$ множеств системы T, $H_{c_0} \subset H_{c_1} \subset \ldots \subset H_{c_k}$, $mesH_{c_0} > 0$, $H_{c_k} = \Pi$. При достаточно малом $\delta > 0$ существование некоторого множества $H_{c_0} \in T$, $mesH_{c_0} > 0$, на котором тройке ψ отвечает решение уравнения (4), гарантирует теорема 6.

Сформулируем наконец теорему об оценке разности решений уравнения (4), эквивалентную теореме 4.

Теорема 8. *Для любой* $\psi_0 = \{g_0, \varphi_{01}, \varphi_{02}\} \in \Psi_0$ *и любого положительного числа* m_0 *существует* $C > 0$ *такое, что если* $\psi \in \Psi_0$ *и выполняется неравенство*

$$\|A[z - z_0]\|_M \le m_0,$$

где z *— решение уравнения* (4), *отвечающее* $\psi = \{g, \varphi_1, \varphi_2\}$, *то*

$$\|z - z_0\|_{L_p} \le C\|\Delta(f, f_0)\|_{L_p},$$

$$\|A[z - z_0]\|_M \le Cr(f, f_0).$$

Теорема 8 доказывается с помощью обобщенной леммы Гронуолла.

Благодарю своего научного руководителя профессора В.И. Сумина за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00495).

Примечания

1. История изучения проблемы устойчивости (по возмущению управления) существования глобальных решений управляемых краевых задач кратко изложена в [19].

2. Под нормой в прямом произведении $X \times Y$ нормированных пространств X, Y понимается стандартная норма $\|\{x, y\}\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

3. $L(X, Y)$ – класс линейных ограниченных операторов, действующих из нормированного пространства X в нормированное пространство Y.

4. Так определенный класс функций зависит от φ_1, φ_2 и не зависит от g, но нам удобно использовать обозначение $W_\psi(\Pi)$.

Список литературы

1. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29, № 6. С. 1205–1260.

2. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса–Дарбу // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12, № 1. С. 61–77.

3. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса–Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 5. С. 845–856.

4. Suryanarayana M.B. Necessary conditions for optimization problems with hyperbolic partial differential equations // SIAM J. Control. 1973. V. 11. № 1.

5. Ащепков Л.Т., Васильев О.В. Об оптимальности особых управлений в системах Гурса–Дарбу // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15, № 5. С. 1157–1167.

6. Срочко В.А. Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами // Сибирский матем. журн. 1976. Т. 17, № 5. С.1108–1115.

7. Потапов М.М. Разностная аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления системами Гурса–Дарбу // Вестник МГУ. Сер. Вычислит. матем. и киберн. 1978. № 2. С.17–26.

8. Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальное управление некоторыми системами с распределенными параметрами // Сибирский матем. журн. 1978. Т. 19, № 5. С.1109–1140.

9. Ащепков Л.Т., Васильев О.В., Коваленок И.Л. Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса–Дарбу // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 6. С. 1154–1159.

10. Срочко В.А. Условия оптимальности типа принципа максимума в системах Гурса–Дарбу // Сибирский матем. журн. 1984. Т. 25, № 1. С. 126–132.

11. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1989. 160 с.

12. Сумин В.И. Функционально-операторные уравнения Вольтерра и устойчивость существования глобальных решений краевых задач // Украинский матем. журн. 1991. Т. 43, № 4. С. 555–561.

13. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть 1. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 110 с.

14. Данилова О.А., Матвеев А.С. Нетрадиционные условия существования оптимального управления для системы Гурса–Дарбу // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1998. Т. 62, № 5. С.79–102.

15. Толстоногов А.А. Теорема существования оптимального управления в задаче Гурса–Дарбу без предположения выпуклости // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64, № 4. С. 163–182.

16. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 824 с.

17. Idczak D., Majewski M., Walczak S. Stability analysis of solutions to an optimal control problem associated with a Goursat–Darboux problem // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2003. V.13, № 1. P. 29–44.

18. Idczak D. Bang-bang principle for linear and non-linear Goursat–Darboux problem // Int. J. Contr. 2003. V. 76, № 11. P. 1089–1904.

19. Сумин В.И. Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2003. Вып. 1. С. 91–108.

20. Гаврилов В.С., Сумин М.И. Параметрическая оптимизация нелинейных систем Гурса–Дарбу с фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 6. С. 1002–1022.

21. Погодаев Н.И. О свойствах решений задачи Гурса–Дарбу с граничными и распределенными управлениями // Сибирский матем. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1116–1133.

22. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Управляемая задача Гурса–Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной // Вестник ННГУ. Математика. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. Вып. 1 (3). С. 88–101.

23. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Управляемая задача Гурса–Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной. II // Вестник ННГУ. Математика. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. Вып. 1(4). С. 65–80.

24. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Об условиях устойчивости существования глобальных решений управляемой задачи Гурса–Дарбу // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. Вып. 2 (31). С. 64–82.

25. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Условия сохранения глобальной разрешимости задачи Гурса–Дарбу при возмущении управления / Деп. в ВИНИТИ 06.02.08. № 85-В2008. 23 с.

26. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

27. Сумин В.И. Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1998. Вып. 2 (19). С. 138–151.

28. Сумин В.И. Об управляемых функциональных вольтерровых уравнениях в лебеговых пространствах / Деп. в ВИНИТИ 03.09.98. № 2742-В98. 96 с.

29. Лисаченко И.В. О глобальных решениях задачи Гурса–Дарбу // Материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения – XIX». Воронеж: ВГУ, 2008. С. 129.

30. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.

31. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1962. 394 с.

THE NONLINEAR GOURSAT-DARBOUX PROBLEM WITH PERTURBED RIGHT-HAND SIDE AND BOUNDARY FUNCTIONS

I.V. Lisachenko

The sufficient conditions are given of the global solvability preservation of the nonlinear Goursat-Darboux problem with perturbed right-hand side and boundary functions. A case is studied when the problem solution should be sought in a class of absolutely continuous functions with mixed derivative and first partial derivatives summable in power $p > 1$.